

Ольга Бойко, Ольга Мартинюк (Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса),

Вячеслав Пивоварчик¹ (Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса; Університет м. Вааса, Фінляндія)

ПРО ЗАДАЧУ РОЗСІЯННЯ ТА ЗАДАЧУ ВІДНОВЛЕННЯ ФОРМИ ГРАФА

We consider a scattering problem generated by the Sturm–Liouville equation on a tree formed by an equilateral compact subtree with a lead (a half-infinite edge) attached to this compact subtree. It is assumed that the potential on the lead is identically equal to zero and the potentials on finite edges are real L_2 -functions. We show how to determine the shape of the tree by using the S-function and the eigenvalues of the scattering problem.

Розглянуто задачу розсіювання Штурма–Ліувілля, породжену рівнянням Штурма–Ліувілля на дереві, яке складається з рівнобічного компактного піддерева з жилою (напівнескінченим ребром), приєднаною до цього компактного підграфа. При цьому припускається, що потенціал на жилі тотожно нульовий, а потенціали на скінченних ребрах — дійсні функції з L_2 . Показано як знайти форму дерева, використовуючи S-функцію та власні значення задачі розсіювання.

1. Вступ. Ми розглядаємо задачу розсіювання, породжену рівнянням Штурма–Ліувілля, та задачу відновлення форми метричного графа, який складається з компактного дерева та приєднаної до нього жили (lead) — напівнескінченного ребра. Наскільки нам відомо, перший результат щодо цієї задачі було отримано в [10], де доведено, що якщо довжини ребер не сумірні, то S-функція однозначно визначає форму графа. В загальному випадку знання S-функції не є достатнім для однозначного визначення топологічної структури графа: чисельні приклади було наведено у [14]. Огляд важливих результатів на цю тему можна знайти у [12].

Важливу спробу вирішити це питання шляхом знаходження коспектральних об'єктів та перевірки чи взяття до уваги даних розсіювання було зроблено у 2005 р. Окада, Шудо та ін. у [21]. Зокрема, вони розглянули класичний приклад Гордона і Вебба і перевірили властивості розсіювання. Мотивовані цією роботою Р. Банд, А. Савіцкі та У. Сміланські перевірили ситуацію з метричними графами [2]. Вони встановили, що розсіювання може і не розрізняти коспектральні графи, якщо жили приєднано спеціальним чином (який трохи нагадує симетрію ізоспектральних конструкцій). У [3] автори пояснили, чому існує відмінність між результатами японської групи (про те, що дані розсіювання розв'язують коспектральність) та їхнім результатом (про те, що не розв'язує). Після цих теоретичних робіт А. Савіцкі продовжив співпрацю з польськими фізиками-експериментаторами, які сконструювали такі мікрохвильові мережі і перевірили на них цю задачу (див., наприклад, [11]).

Цікавий результат, пов'язаний з цим питанням, це так звана геометрична теорема Амбарцумяна, доведена у [13] (див. також [4]).

У цій статті ми продовжуємо дослідження, розпочаті у [20], де було розглянуто задачу розсіювання на компактному простому рівнобічному графі з жилою (напівнескінченим ребром), приєднаною під стандартними умовами у вершинах (умова Кірхгофа та умова неперервності або умова Неймана, якщо вершина висяча).

¹ Відповідальний за листування, e-mail: vpivovarchik@gmail.com.

У [20] було показано, що S -функція разом з власними значеннями однозначно визначає форму графа, якщо кількість вершин $p \leq 5$, а якщо компактний підграф є рівнобічним деревом, то це твердження правильне при кількості вершин $p \leq 8$. Цей результат було отримано використанням результатів [6, 7].

Ми розглядаємо задачу розсіяння Штурма–Ліувілля на дереві T , яке складається з компактного рівнобічного підграфа T' з $p \leq 8$ вершинами та жили, приєднаної до однієї з висячих вершин, з умовами Діріхле на висячих вершинах T .

Ми показуємо, що S -функція та власні значення однозначно визначають форму дерева. Як і у [20], вважаємо потенціал на жилі тотожно рівним 0, щоб мати справу з мероморфною S -функцією. Цей підхід походить від [23] і був застосований до квантових графів у [15, 22]. У випадку мероморфної S -функції відповідна функція Йоста (точніше, аналог класичної функції Йоста) є цілою функцією експоненціального типу.

У пункті 2 описано спектральні задачі, породжені рівнянням Штурма–Ліувілля на компактному рівнобічному піддереві T' . Розглянемо задачу Неймана, тобто спектральну задачу зі стандартними умовами у внутрішніх вершинах T' , умовою Неймана у корені (довільно вибраній висячій вершині) і умовами Діріхле у всіх інших висячих вершинах. Задачею Діріхле будемо називати задачу з умовами Діріхле в усіх висячих вершинах дерева T' і стандартними умовами (умовами неперервності і Кірхгофа) у внутрішніх вершинах. Ми розглядаємо співвідношення між характеристичними функціями цих задач та відповідними характеристичними многочленами, які є визначниками підматриць, отриманих з нормованого лапласіана видаленням рядків та стовпців, які відповідають висячим вершинам з умовами Діріхле.

У пункті 3 розглянуто оператор, пов'язаний із задачею розсіяння на некомпактному дереві T , яке складається з жили, приєднаної до кореня компактного метричного рівнобічного піддерева T' , при стандартних умовах у внутрішніх вершинах та умовах Діріхле у висячих вершинах дерева T . Цей оператор самоспряжений і його суттєвий спектр покриває невід'ємну піввісь. При цьому можуть існувати нормальні (ізолювані, скінченної кратності) власні значення та власні значення занурені у суттєвий спектр. Ми описуємо зв'язок між S -функцією задачі розсіяння на дереві T і характеристичними функціями задач Неймана та Діріхле на дереві T' , описаному у пункті 2, а також асимптотики S -функції та функції Йоста.

В пункті 4 показано, що асимптотика S -функції та власних значень однозначно визначає характеристичний многочлен $\hat{\psi}$, який є визначником підматриці, отриманої з нормованого лапласіана видаленням рядків та стовпців, що відповідають умовам Діріхле у задачі Діріхле (тобто всім висячим вершинам). Відповідно до результату роботи [5], якщо $p \leq 8$, то цей визначник однозначно визначає форму компактного піддерева T' . Для знаходження форми T' слід знайти у [5] дерево, яке відповідає знайденому многочлену $\hat{\psi}$.

В пункті 5 розглянуто приклади знаходження піддерев T' , виходячи з S -функції задачі розсіяння на дереві T та власних значень. У цих прикладах, як виявилось, можна знайти висячу вершину (корінь), до якої приєднана жила, тобто знайти дерево T .

2. Задачі, пов'язані з квантовими графами. В цьому пункті ми розглядаємо компактні рівнобічні дерева.

Нехай T' — рівнобічне метричне дерево з p вершинами і $g = p - 1$ ребрами, кожне з яких має довжину l . Виберемо довільно висячу вершину v_0 в якості кореня і спрямуємо всі ребра

від кореня. Позначимо через

$$D = \text{diag} \{d(v_0), d(v_1), \dots, d(v_{p-1})\}$$

діагональну матрицю степенів (через $d(v)$ позначено степінь вершини v). Нехай A — матриця суміжності дерева T' , а $\tilde{A}$ — головна підматриця матриці A , отримана видаленням всіх рядків та стовпців, які відповідають висячим вершинам, окрім кореня. Нехай $\hat{\tilde{A}}$ — головна підматриця матриці $\tilde{A}$, отримана видаленням першого рядка (який відповідає кореню) та першого стовпця матриці $\tilde{A}$. Далі, нехай $\tilde{D}$ — діагональна підматриця, отримана видаленням з D рядків та стовпців, які відповідають всім висячим вершинам, окрім кореня, а $\hat{\tilde{D}}$ — підматриця, отримана з $\tilde{D}$ видаленням першого рядка і першого стовпця (що відповідають кореню).

Позначимо

$$\psi(z) := \det(-z\tilde{D} + \tilde{A}), \quad \hat{\psi}(z) = \det(-z\hat{\tilde{D}} + \hat{\tilde{A}}).$$

Опишемо спектральну задачу *Неймана* на дереві T' . Нехай на ребрах задано рівняння Штурма–Ліувілля

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

де $q_j \in L_2(0, l)$ — дійсні функції (потенціали).

У кожній висячій вершині, крім кореня з інцидентним їй ребром e_j , ми накладаємо умову Діріхле

$$y_j(l) = 0. \quad (2)$$

У кожній внутрішній вершині накладаємо умови неперервності

$$y_j(l) = y_k(0) \quad (3)$$

для ребра e_j , яке входить у вершину v_i , і всіх вихідних ребер e_k та умови Кірхгофа

$$y_j'(l) = \sum_k y_k'(0), \quad (4)$$

де суму взято по всіх ребрах e_k , які виходять з v_i .

В корені накладаємо умову Неймана

$$y_1'(0) = 0. \quad (5)$$

Назвемо (1)–(5) задачею *Неймана*.

Тепер опишемо спектральну задачу *Діріхле* на дереві T' . Вона складається з рівнянь (1)–(4) та умови Діріхле в корені

$$y_1(0) = 0. \quad (6)$$

Для знаходження характеристичної функції Штурма–Ліувілля шукаємо коефіцієнти $A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q$ такі, щоб розв'язок рівняння (1) можна було записати у вигляді

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \text{ для } y_i(x) = A_i s_i(\lambda, x) + B_i c_i(\lambda, x), \quad x \in (0, l),$$

де $s_j(\lambda, x)$ — розв’язок рівняння (1), що задовольняє умови $s(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) - 1 = 0$, а $c(\lambda, x)$ — розв’язок рівняння (1), який задовольняє умови $c(\lambda, 0) - 1 = c'(\lambda, 0) = 0$.

Підставляючи це в умови неперервності та умови Кірхгофа в кожній внутрішній вершині, умови Діріхле у кожній висячій вершині, крім кореня для задачі Неймана (відповідно умови Діріхле у всіх висячих вершинах), отримуємо систему $2q$ лінійних алгебраїчних рівнянь з невідомими $A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q$. Позначимо $(2q \times 2q)$ -матрицю цієї системи через $\|\Phi_N(\lambda)\|$ (відповідно $\|\Phi_D(\lambda)\|$) і назовемо її *характеристичною матрицею* нашої задачі.

Якщо корінь $\det\|\Phi_N(\lambda)\|$ (або $\det\|\Phi_D(\lambda)\|$) має кратність m , то беручи до уваги, що матриці $\|\Phi_N(\lambda)\|$ та $\|\Phi_D(\lambda)\|$ ермітові, приходимо до висновку, що існують m лінійно незалежних розв’язків рівняння $\|\Phi_N(\lambda)\|Y = 0$ (або $\|\Phi_D(\lambda)\|Y = 0$).

Це означає, що кратність λ як кореня $\det\|\Phi_N(\lambda)\|$ (або $\det\|\Phi_D(\lambda)\|$) збігається з кратністю λ як відповідного власного значення задачі (1)–(5) (або задачі (1)–(4), (6)).

Зауважимо, що ці визначники виражені через $s_i(\lambda, l)$, $s'_i(\lambda, l)$, $c_i(\lambda, l)$ і $c'_i(\lambda, l)$. Отже, рівняння

$$\det\|\Phi_N(\lambda)\| = 0 \quad (\text{відповідно } \det\|\Phi_D(\lambda)\| = 0)$$

повністю визначає спектр задачі (1)–(5) (відповідно (1)–(4), (6)).

Означення 2.1. Назвемо

$$\lambda \mapsto \phi_N(\lambda) := \det(\Phi_N(\lambda)) \quad (\text{відповідно } \lambda \mapsto \phi_D(\lambda) := \det\|\Phi_D(\lambda)\|)$$

характеристичною функцією задачі Неймана (відповідно задачі Діріхле).

Ця характеристична функція визначена спектром з точністю до сталого множника. Таким чином, множина коренів цієї функції збігається зі спектром задачі Неймана (відповідно задачі Діріхле).

В подальшому, якщо потенціали однакові на всіх ребрах, будемо пропускати індекс у q_j та y_j .

Застосовуючи теорему 6.4.2 з монографії [19] (узагальнення результату [1]) до випадків наших задач Неймана і Діріхле, отримуємо таку теорему.

Теорема 2.1. Нехай T' — дерево з $p \geq 2$. Припустимо, що всі ребра мають однакову довжину l та однаковий потенціал, симетричний щодо середини ребра ($q(l-x) \stackrel{a.e.}{=} q(x)$). Тоді спектр задачі (1)–(5) (відповідно задачі (1)–(4), (6)) збігається з множиною коренів функції

$$\phi_N(\lambda) = s^{p_{pen}-2}(\lambda, l)\psi(c(\lambda, l)), \quad (7)$$

$$(\text{відповідно } \phi_D(\lambda) = s^{p_{pen}-1}(\lambda, l)\hat{\psi}(c(\lambda, l))). \quad (8)$$

3. Приєднання жили до компактного метричного дерева. В цьому пункті будемо розглядати граф T , отриманий приєднанням жили e_0 до вершини v_0 , яка є коренем компактного рівнобічного дерева T' , описаного у попередньому пункті. Спрямуємо ребро e_0 від v_0 і припустимо, що потенціал q_0 на e_0 тотожно дорівнює 0. Таким чином, маємо рівняння

$$-y_i''(x) + q_i(x)y_e(x) = \lambda y_i(x), \quad i \in E, \quad x \in [0, l], \quad (9)$$

на всіх скінченних ребрах з дійсними потенціалами $q_i \in L_2(0, l)$ та рівняння

$$-y_0''(x) = \lambda y_0(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (10)$$

на ребрі e_0 . Ми доповнюємо рівняння Штурма–Ліувілля (9), (10) на T стандартними умовами в усіх внутрішніх вершинах та умовами Діріхле в усіх висячих вершинах.

Для замкненого лінійного оператора B , який діє у гільбертовому просторі, позначимо через $D(B)$, $\rho(B)$ та $\sigma(B)$ область означення, резольвентну множину та спектр. Ми посилаємось на [9] (розділ I.2) щодо означення *нормального власного значення* (ізолюваного власного значення скінченної кратності) та позначаємо через $\sigma_0(B)$ множину нормальних власних значень оператора B , а через $\sigma_{\text{ess}}(B) = \sigma(B) \setminus \sigma_0(B)$ суттєвий спектр. Тут нагадаємо, що спектр будь-якого самоспряженого оператора B збігається з апроксимативним спектром (див., наприклад, [8, с. 118]), де останній означений як множина таких $\lambda \in \mathbb{C}$, що існує послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ у $D(B)$ така, що $\|f_n\| \equiv 1$ та $(\lambda I - B)f_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Якщо послідовність $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ компактна, то λ або нормальне власне значення, або власне значення, що належить до суттєвого спектра (в останньому випадку у квантовій механіці такі λ називають *зв'язаними станами*, *зануреними у неперервний спектр*). У гільбертовому просторі

$$L_2(T) := L_2(0, \infty) \oplus \bigoplus_{j=1}^g L_2(0, \ell)$$

інтегровних із квадратом вектор-функцій $y = (y_j)_{j=0}^g$ розглянемо оператор B , пов'язаний з крайовою задачею (9), (10) зі стандартними умовами в усіх внутрішніх вершинах та умовами Діріхле у висячих вершинах дерева T , який діє згідно з формулою

$$B(y_j)_{j=0}^g = (-y_j'' + q_j y_j)_{j=0}^g$$

(нагадаємо, що $q_0(x) \equiv 0$), з областю визначення

$$D(B) := \left\{ y = (y_j)_{j=0}^g \in L_2(T) : y_j'' \in L_2(T), \right.$$

стандартні умови у внутрішніх вершинах T та

$$y_j(l) = 0 \text{ в усіх висячих вершинах } T \}.$$

Ототожнимо спектр оператора B зі спектром крайової задачі (9), (10) із стандартними умовами у внутрішніх вершинах та умовами Діріхле у висячих вершинах.

Доведення наступної теореми з відповідними змінами збігається з доведенням теореми 3.1 у [20].

Теорема 3.1. *Нехай $q_0 \equiv 0$. Тоді оператор B , що діє в $L_2(T)$, самоспряжений і обмежений знизу. Крім того, $\sigma_{\text{ess}}(B) = [0, \infty)$.*

Аргументи, аналогічні тим, що наведені у доведенні теореми 2.1 в [16], показують, що звуження розв'язку задачі (9), (10) зі стандартними умовами на внутрішніх вершинах T і умовами Діріхле на висячих вершинах на ребро e_0 має вигляд

$$y_0(\lambda, x) = \phi_N(\lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \phi_D(\lambda) \cos \sqrt{\lambda} x. \quad (11)$$

Рівняння (11) запишемо так:

$$y_0(\lambda, x) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \left(e^{i\sqrt{\lambda}x} (\phi_N(\lambda) + i\sqrt{\lambda}\phi_D(\lambda)) - e^{-i\sqrt{\lambda}x} (\phi_N(\lambda) - i\sqrt{\lambda}\phi_D(\lambda)) \right).$$

За аналогією з класичною S -функцією (див., наприклад, [17]) ми розглядаємо мероморфну функцію

$$S : \lambda \mapsto \frac{E(\sqrt{\lambda})}{E(-\sqrt{\lambda})},$$

де

$$E(\sqrt{\lambda}) := \phi_N(\lambda) + i\sqrt{\lambda}\phi_D(\lambda), \quad \lambda \in C, \quad (12)$$

— аналог функції Йоста. Зрозуміло, що $E(\sqrt{\lambda})$ — ціла функція змінної $\sqrt{\lambda}$. Власні значення оператора B (якщо такі є) — це спільні нулі ϕ_N та ϕ_D .

Теорема 3.2. 1. Нулі функції $E(\sqrt{\lambda})$ розташовані у замкненій верхній півплощині і на скінченному інтервалі від'ємної уявної півосі.

2. Кількість (з урахуванням кратностей) нулів функції $E(\sqrt{\lambda})$ на від'ємній півосі збігається з кількістю (з урахуванням кратностей) від'ємних нулів функції $\phi_N(\lambda)$.

Доведення цієї теореми можна знайти у додатку.

Відомо (див., наприклад, [17], лема 3.4.2), що

$$s_j(\lambda, l) \stackrel{|\lambda| \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin \sqrt{\lambda}l}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|l}}{|\lambda|}\right), \quad c_j(\lambda, l) \stackrel{|\lambda| \rightarrow \infty}{=} \cos \sqrt{\lambda}l + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}|l}}{|\sqrt{\lambda}|}\right).$$

Підставляючи ці вирази у (7) та (8), отримуємо таку лему.

Лема 3.1. Нехай $q_0 = 0$. Тоді справджуються асимптотики

$$\phi_N(\lambda) \stackrel{\lambda \rightarrow \pm\infty}{=} \check{\phi}_N(\lambda) + o(1), \quad \phi_D(\lambda) \stackrel{\lambda \rightarrow \pm\infty}{=} \check{\phi}_D(\lambda) + o(1), \quad (13)$$

де символ $\sim$ відповідає випадку тотожно нульових потенціалів на всіх ребрах.

Далі ми будемо посилалися на $\check{\phi}_N, \check{\phi}_D$ як на головні члени характеристичних функцій ϕ_N і ϕ_D відповідно.

Підставляючи (13) у (12), безпосередньо отримуємо такий наслідок.

Наслідок 3.1. Нехай $q_0 = 0$. Тоді справджуються асимптотики

$$S(\sqrt{\lambda}) \stackrel{\lambda \rightarrow \pm\infty}{=} \check{S}(\sqrt{\lambda})(1 + o(1)),$$

$$E(\sqrt{\lambda}) \stackrel{\lambda \rightarrow \pm\infty}{=} \check{E}(\sqrt{\lambda})(1 + o(1)),$$

де величини з символом $\sim$ відповідають випадку тотожно нульового потенціала на всіх ребрах.

4. Відновлення форми дерева за даними розсіяння. В цьому пункті будемо розглядати задачу розсіяння на дереві T , яке отримане приєднанням жили (напівнескінченного ребра) до однієї з висячих вершин компактного дерева T' . Як у [20], ми припускаємо, що потенціал q_0 на жилі тотожно дорівнює нулю, а потенціали на скінченних ребрах можуть бути різними, але всі вони дійсні і належать до $L_2(0, l)$. Тоді, використовуючи результати [20], можемо стверджувати, що S -функцію задачі розсіяння на T можна подати як

$$S(\sqrt{\lambda}) = \frac{\phi_N(\lambda) + i\sqrt{\lambda}\phi_D(\lambda)}{\phi_N(\lambda) - i\sqrt{\lambda}\phi_D(\lambda)} = \frac{e(\sqrt{\lambda})}{e(-\sqrt{\lambda})}.$$

Тут $\frac{e(\sqrt{\lambda})}{e(-\sqrt{\lambda})}$ виникає після скорочення спільних множників у чисельнику та знаменнику S -функції. Зведену S -функцію $\frac{e(\sqrt{\lambda})}{e(-\sqrt{\lambda})}$ можна знайти з експериментів розсіяння. Ми припускаємо, що S -функція відома, як і власні значення (нормальні та занурені у суттєвий (неперервний) спектр).

Наступну теорему було доведено у [5].

Теорема 4.1. Нехай T' — рівнобічне дерево. Власні значення задачі (1)–(4), (6) можна подати як об'єднання підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2p-p_{pen}-1} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ з асимптотиками

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} \pm \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p - p_{pen}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = p - p_{pen} + 1, \dots, p - 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тут $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-p_{pen}}$ — нулі многочлена $\hat{\psi}(z)$.

Теорема 4.2. Нехай кількість вершин у компактному рівнобічному піддереві T' не перевищує 8, а зведена S -функція $\frac{e(\sqrt{\lambda})}{e(-\sqrt{\lambda})}$ задачі (1)–(4), (6) відома разом з власними значеннями (якщо вони є) $\{\lambda_k^0\}$.

Тоді ці дані однозначно визначають форму компактного піддерева.

Доведення. Ми можемо побудувати $\phi_N(\lambda) + i\sqrt{\lambda}\phi_D(\lambda) = C \prod \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_k^0}}\right) e(\sqrt{\lambda})$, де $C \neq 0$ — стала. Тоді

$$\phi_D(\lambda) = \frac{C \prod \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_k^0}}\right) e(\sqrt{\lambda}) - C \prod \left(1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda_k^0}}\right) e(-\sqrt{\lambda})}{2i\sqrt{\lambda}}$$

і згідно з (13) та (8)

$$\hat{\psi}(\cos \lambda l) = \frac{\check{\phi}(\cos \lambda l)}{\sin \lambda l}.$$

Якщо кількість вершин у дереві не перевищує 8, то $\hat{\psi}$ однозначно визначає форму дерева, що було доведено у [5]. У [5] многочлени $\hat{\psi}$ позначені як $\phi_{i,j}^k(z)$ і вони знаходяться у взаємно однозначній відповідності з певними деревами. Отже, використовуючи результати [5], можна знайти форму дерева, виходячи з S -функції та власних значень, якщо $p \leq 8$.

5. Приклади. Приклад 5.1. Нехай піддерево $T' = P_4$ (маршрут з 4 вершинами), а T отримано приєднанням жили до однієї з висячих вершин T' . Нехай потенціали на всіх ребрах піддерева P_4 сталі, $q_j = \text{const} > 0$. Тоді $s(\lambda, x) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda+q} x)}{\sqrt{\lambda+q}}$ і $s'(\lambda, x) = \cos(\sqrt{\lambda+q} x)$.

Для S-функції отримуємо

$$S(\lambda) = \frac{s'(\lambda, 3l) + i\lambda s(\lambda, 3l)}{s'(\lambda, 3l) - i\lambda s(\lambda, 3l)} = \frac{\cos \sqrt{\lambda+q} 3l + i\sqrt{\lambda} \frac{\sin(\sqrt{\lambda+q} 3l)}{\sqrt{\lambda+q}}}{\cos \sqrt{\lambda+q} 3l - i\sqrt{\lambda} \frac{\sin(\sqrt{\lambda+q} 3l)}{\sqrt{\lambda+q}}}.$$

У цьому випадку власні значення відсутні, але може існувати так званий віртуальний стан $\lambda = 0$, якщо $\cos(\sqrt{q}3l) = 0$:

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda+q} 3l)}{\sqrt{\lambda+q}} = \frac{\sin \sqrt{\lambda+q} l}{\sqrt{\lambda+q}} (4 \cos^2 \sqrt{\lambda+q} l - 1).$$

Це означає, що $\hat{\psi}(\cos \lambda l) = 4 \cos^2 \sqrt{\lambda} l - 1$ і $\hat{\psi}(z) = 4z^2 - 1$. Останню функцію можна ототожнити з $\phi_{4,2}(z)$, яку можна знайти у [5]. Отже, ми бачимо, що форма графа однозначно визначена S-функцією.

Приклад 5.2. Нехай відомими є зведена S-функція

$$\begin{aligned} S(\sqrt{\lambda}) &= \frac{e(\sqrt{\lambda})}{e(-\sqrt{\lambda})} \\ &= \frac{c(\lambda, l)(-32c(\lambda, l)^4 + 28(\lambda, l)^2 - 5) + i\sqrt{\lambda}s(\lambda, l)(32c^4(\lambda, l) - 20c^2(\lambda, l) + 1)}{c(\lambda, l)(-32c(\lambda, l)^4 + 28(\lambda, l)^2 - 5) - i\sqrt{\lambda}s(\lambda, l)(32c^4(\lambda, l) - 20c^2(\lambda, l) + 1)} \end{aligned} \quad (14)$$

і власні значення, що є нулями функції $s^2(\lambda, l)$. З рівняння (14) випливає, що

$$\begin{aligned} S(\sqrt{\lambda}) &= \\ &\stackrel{\lambda \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos \sqrt{\lambda} l (-32 \cos^4 \sqrt{\lambda} l + 28 \cos^2 \sqrt{\lambda} l - 5) + i \sin \sqrt{\lambda} l (32 \cos^4 \sqrt{\lambda} l - 20 \cos^2 \sqrt{\lambda} l + 1)}{\cos \sqrt{\lambda} l (-32 \cos^4 \sqrt{\lambda} l + 28 \cos^2 \sqrt{\lambda} l - 5) - i \sin \sqrt{\lambda} l (32 \cos^4 \sqrt{\lambda} l - 20 \cos^2 \sqrt{\lambda} l + 1)} \\ &\quad + o(1). \end{aligned} \quad (15)$$

Отже, в цьому випадку

$$\hat{\psi}(z) = 32z^4 - 20z^2 + 1.$$

У [5] цей многочлен було позначено через $\phi_{8,4}^1$, а також було показано, що цьому многочлену відповідає лише дерево, зображене на рис. 1. Отже, приходимо до висновку, що компактне піддерево T' нашого дерева — це дерево на рис. 1. Тому наш граф T — це або граф на рис. 2, або граф на рис. 3. Якщо ми хочемо з'ясувати, який з цих двох графів відповідає нашим даним, то маємо розглянути многочлени $\psi(z)$ для цих дерев. Згідно з (15) у цьому випадку

$$\psi(z) = -32z^5 + 28z^3 - 5z.$$

Обчислення показують, що саме такий многочлен ψ відповідає дереву на рис. 2, тоді як дереву на рис. 3 відповідає многочлен

$$\psi(z) = -32z^5 + 36z^3 - 7z.$$

Отже, ми прийшли до висновку, що йдеться про дерево на рис. 2.

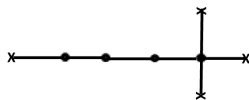


Рис. 1

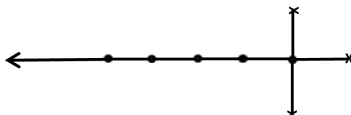


Рис. 2

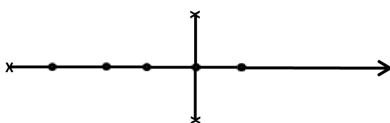


Рис. 3

Приклад 5.3. Розглянемо дерево на рис. 4. Для цього дерева

$$\begin{aligned} S(\sqrt{\lambda}) &= \frac{e(\sqrt{\lambda})}{e(-\sqrt{\lambda})} \\ &= \frac{27c^3(\lambda, l) - 15c(\lambda, l) + i\sqrt{\lambda}s(\lambda, l)(-27c^2(\lambda, l) + 6)}{27c^3(\lambda, l) - 15c(\lambda, l) - i\sqrt{\lambda}s(\lambda, l)(-27c^2(\lambda, l) + 6)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Власними значеннями є нулі функції $c(\lambda, l)s^3(\lambda, l)$, і тому

$$e(\sqrt{\lambda}) = c(\lambda, l)s^3(\lambda, l)(27c^3(\lambda, l) - 15c(\lambda, l) + i\sqrt{\lambda}s(\lambda, l)(-27c^2(\lambda, l) + 6))$$

та

$$e(\sqrt{\lambda})$$

$$\stackrel{\lambda \rightarrow +\infty}{\equiv} \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}} \right)^3 ((27 \cos^4 \sqrt{\lambda} l - 15 \cos^2 \sqrt{\lambda} l) + i \sin \sqrt{\lambda} l (-27 \cos^3 \sqrt{\lambda} l + 6 \cos \sqrt{\lambda} l)) + o(1).$$

Отже, отримуємо

$$\hat{\psi}(z) = -27z^3 + 6z.$$

Цей многочлен, позначений як $\phi_{8,5}^4(z)$ у [5], відповідає компактному піддереву, зображеному на рис 5. Якщо ми хочемо дізнатися, до якої з висячих вершин приєднано жило, то маємо знайти відповідні $\psi(z)$. Відповідно до (16), для графа на рис. 4 маємо $\psi(z) = 27z^4 - 15z^2$, тоді як обчислення показують, що для графа на рис. 6 $\psi(z) = 27z^4 - 15z^2 + 1$. Тому ми приходимо до висновку, що S-функція і власні значення однозначно визначають форму дерева з приєднаною жилою, як на рис. 4.

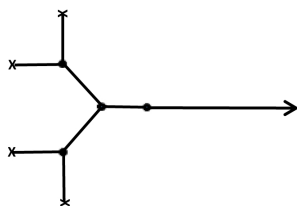


Рис. 4

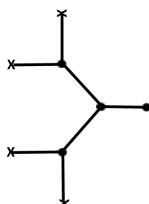


Рис. 5

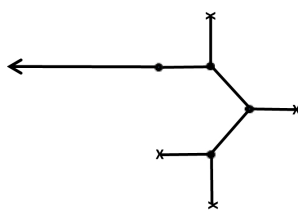


Рис. 6

6. Додаток. Доведення теореми 3.2. Розглянемо спектральну задачу на дереві T :

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad j = 1, 2, \dots, g,$$

де $q_j \in L_2(0, l)$ — дійсні функції,

$$-y_0'' = \lambda y_0.$$

Для кожного ребра e_j , інцидентного з висячою вершиною T , накладаємо умову Діріхле

$$y_j(l) = 0,$$

а в кожній внутрішній вершині — умови неперервності

$$y_j(l) = y_k(0)$$

для вхідного у v_i ребра e_j і для всіх e_k ребер, вихідних з v_i , і умови Кірхгофа

$$y_j'(l) = \sum_k y_k'(0),$$

де суму взято по всіх ребрах e_k , вихідних з v_i .

У корені маємо умову

$$y_1'(0) = i\sqrt{\lambda}y_0(0).$$

Розглянемо операторну в'язку

$$\lambda M - i\sqrt{\lambda}K + \tilde{B},$$

де оператор $\tilde{B}$ діє у $L_2(0, l) \oplus \dots \oplus L_2(0, l) \oplus C$:

$$\tilde{B} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_g(x) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1''(x) + q_1(x)y_1(x) \\ \vdots \\ -y_g''(x) + q_g(x)y_g(x) \\ y_1'(0) \end{pmatrix},$$

$$D(\tilde{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} cy_1(x) \\ \vdots \\ y_g(x) \\ c \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y_j(x) \in W_2^2(0, l), \quad y_j(0) = 0 \text{ для } (j = 2, \dots, g), \\ \text{стандартні умови в усіх внутрішніх вершинах дерева } T \\ y_1(0) = c \end{array} \right\},$$

$$M = \text{diag} \{1, \dots, 1, 0\}, \quad K = \text{diag} \{0, \dots, 0, 1\}.$$

Вводячи новий спектральний параметр $\tau = \sqrt{\lambda}$, отримуємо квадратичну операторну в'язку. Застосовуючи лему 1.2.1 і теорему 1.3.3 з [18], завершуємо доведення.

Подяки. Автори вдячні рецензенту за корисні зауваження. Третій автор вдячний Університету м. Вааса (Фінляндія) за гостинність.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Дослідження авторів підтримано МОН України (проект „Обернені задачі знаходження форми графа за спектральними даними”, № 0124U00818) та NSF US (проект IMPRESS-U „Spectral and geometric methods for damped wave equations with applications to fiber lasers”).

Авторські внески. Всі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. J. von Below, *A characteristic equation associated with an eigenvalue problem on c^2 -networks*, Linear Algebra and Appl., **71**, 309–325 (1985).
2. R. Band, A. Sawicki, U. Smilansky, *Scattering from from isospectral quantum graphs*, J. Phys. A: Math. and Theor., **43**, № 41 (2010).
3. R. Band, A. Sawicki, U. Smilansky, *Note on the role of symmetry in scattering from isospectral graphs and drums*; math-ph > arXiv:1110.2475.
4. J. Boman, P. Kurasov, R. Suhr, *Schrödinger operators on graphs and geometry II. Spectral estimates for L_1 -potentials and Ambartsumian's theorem*, Integral Equat. and Oper. Theory, **90** (2018); <https://doi.org/10.1007/s00020-018-2467-1>. DOI: 10.1007/s00020-018-2467-1.

5. O. Boyko, M. Martynyuk, V. Pivovarchik, *On recovering the shape of a quantum tree from the spectrum of the Dirichlet boundary problem*, Mat. Stud., **60**, № 2, 162–172 (2023). (See the version improved according to the remarks of a referee in <https://arxiv.org/abs/2211.11280>).
6. R. Carlson, V. Pivovarchik, *Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths*, J. Phys. A: Math. and Theor., **41**, Article 145202 (2008).
7. A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *Recovering the shape of a quantum graph*, Integral Equat. and Oper. Theory, **92** (2020).
8. D. E. Edmunds, W.D. Evans, *Spectral theory and differential operators*, Clarendon Press, Oxford (1989).
9. I. Gohberg, M. Krein, *Introduction to the theory of linear non-selfadjoint operators in Hilbert space*, Amer. Math. Soc. (1969).
10. B. Gutkin, U. Smilansky, *Can one hear the shape of a graph?* J. Phys. A: Math. and Gen., **34**, 6061–6068 (2001).
11. O. Hul, M. Lawniczak, S. Bauch, A. Sawicki, M. Kus, L. Sirko, *Are scattering properties of graphs uniquely connected to their shapes?* Phys. Rev. Lett., **109**, Article 040402 (2012).
12. P. Kurasov, *Spectral geometry of graphs*, Oper. Theory: Adv. and Appl., **293**, Birkhäuser/Springer (2024); <https://doi.org/10.1007/978-3-662-67872-5>.
13. P. Kurasov, S. Naboko, *Rayleigh estimates for differential operators on graphs*, J. Spectr. Theory, **4**, № 2, 211–219 (2014); DOI 10.4171/JST.
14. P. Kurasov, F. Stenberg, *On the inverse scattering problem on branching graphs*, J. Phys. A, **35**, 101–121 (2002).
15. Y. Latushkin, V. Pivovarchik, *Scattering in a forked-shaped waveguide*, Integral Equat. and Oper. Theory, **61**, 365–399 (2008).
16. C.-K. Law, V. Pivovarchik, *Characteristic functions of quantum graphs*, J. Phys. A: Math. and Theor., **42**, Article 035302 (2009).
17. V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, revised ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (2011).
18. M. Möller, V. Pivovarchik, *Spectral theory of operator pencils, Hermite–Biehler functions, and their applications*, Birkhäuser, Cham (2015).
19. M. Möller, V. Pivovarchik, *Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs*, Oper. Theory: Adv. and Appl., **283**, Birkhäuser/Springer (2020); <https://www.springer.com/gp/book/9783030604837>.
20. D. Mugnolo, V. Pivovarchik, *Distinguishing co-spectral quantum graphs by scattering*, J. Phys. A: Math. and Theor., **56**, № 9 (2023); DOI: 10.1088/1751-8121/acbb44, arXiv: 2211.05465.
21. Y. Okada, A. Shudo, S. Tasaki, T. Harayama, *Can one hear the shape of a drum?: revisited*. J. Phys. A: Math. and Gen., **38** (2005); <https://doi.org/10.1007/s00020-024-02759-6>.
22. V. Pivovarchik, *Scattering in a loop-shaped waveguide*, in: Recent Advances in Operator Theory, Groningen (1998), Birkhäuser, Basel and Boston (2001), p. 527–543.
23. T. Regge, *Construction of potential from resonances*, Nuovo Cimento, **9**, 491–503, 671–679 (1958).

Одержано 14.02.24