

Андрій Бандура¹ (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу),

Тетяна Сало (Національний університет „Львівська політехніка”),

Олег Скасків (Львівський національний університет імені Івана Франка)

ОБМЕЖЕНІСТЬ L -ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ КОМПОЗИЦІЇ ФУНКЦІЙ, ЦІЛИХ НА ЗРІЗКАХ, ТА ФУНКЦІЙ, ГОЛОМОРФНИХ НА ЗРІЗКАХ В ОДИНИЧНІЙ КУЛІ

We study the composition $F(z) := f(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ times}}) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1, m \geq 1$, where $\Phi : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{C}$ is a slice holomorphic function in the unit ball and $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ is a slice holomorphic function in the whole m -dimensional complex space \mathbb{C}^m , i.e., a slice function $g_z(\tau) = f(z + \mathbf{b}\tau)$ is an entire function of $\tau \in \mathbb{C}$ for any fixed $z \in \mathbb{C}^m$ and a given direction $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$. The slice holomorphicity in a unit ball \mathbb{B}^n means that, for a fixed direction $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ and any point $z^0 \in \mathbb{B}^n$ of the unit ball, the function is holomorphic on its restriction to the slice $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\} \cap \mathbb{B}^n$. An additional assumption about equicontinuity of these functions allows us to construct an analog of the theory of entire functions with bounded index. This analog can be applied to the investigation of the properties of slice-holomorphic solutions of directional differential equations that describe local behaviors and the distribution of values. We establish conditions sufficient for the boundedness of the L -index in the direction \mathbf{b} for the function $F(z)$. Some of the obtained results are also new in one-dimensional case, i.e., for $n = 1$ and $m = 1$. The indicated conditions are obtained by using two different approaches: an analog of Hayman's theorem and analog of the logarithmic criterion. We also present examples of functions whose composition satisfies all conditions of only one of the obtained theorems.

Вивчається композиція $F(z) := f(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 1, m \geq 1$, де $\Phi : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфна на зрізках в одиничній кулі функція, а $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ — функція, голоморфна на зрізках в усьому m -вимірному комплексному просторі \mathbb{C}^m , тобто зріз-функція $g_z(\tau) = f(z + \mathbf{b}\tau)$ — ціла функція змінної $\tau \in \mathbb{C}$ при кожному фіксованому $z \in \mathbb{C}^m$ та для заданого напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$. Голоморфність на зрізці в одиничній кулі \mathbb{B}^n означає, що для заданого напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ і для кожної точки z^0 з одиничної кулі відповідна зріз-функція голоморфна на звуженні початкової функції на зрізку $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\} \cap \mathbb{B}^n$. Додаткове припущення про сукупну неперервність для цих функцій дозволяє побудувати аналог теорії цілих функцій обмеженого індексу. Відповідні результати також застосовні до вивчення властивостей голоморфних на зрізках розв'язків диференціальних рівнянь з похідними за напрямком, описують локальне поведіння та розподіл значень. Знайдено умови, достатні для обмеженості L -індексу за напрямком \mathbf{b} для функції $F(z)$. Деякі з отриманих результатів також нові в одновимірному випадку, а саме для $n = 1, m = 1$, тоді куля зводиться до одиничного круга. Відповідні умови знайдено двома різними підходами у теорії функцій обмеженого індексу: аналогом теореми Хеймана та аналогом логарифмічного критерію. Також наведено приклади функцій, композиція яких задовольняє всі умови лише однієї з доведених теорем.

1. Вступ. Попри чимале число праць про композицію аналітичних функцій та обмеженість L -індексу за напрямком [6–10, 17, 24, 25], ця тема лишається досі цікавою, тому що дозволяє відкривати нові властивості функцій обмеженого індексу та застосовувати їх до диференціальних рівнянь і теорії розподілу значень. Навіть більше, у перерахованих вище дослідженнях розглядаються різноманітні класи голоморфних функцій кількох змінних: аналітичні функції в одиничній кулі [6], в одиничному полікрузі, в декартовому добутку комплексної площини та одиничного круга [9] і так звані голоморфні на зрізках функції, які є аналітичними на кожній зрізці за деяким фіксованим напрямком та неперервні за сукупністю змінних у всьому просторі [4] або в одиничній кулі [1].

¹ Відповідальний за листування, e-mail: andriykopanytsia@gmail.com.

Водночас більшість статей про композицію в рамках теорії функцій обмеженого індексу присвячено застосуванням теореми Хеймана [16] та її аналогів. Згадані твердження для різних класів аналітичних функцій доволі зручні для відшукування умов обмеженості індексу за напрямком. До того ж вони застосовні до вивчення аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь та їхніх систем. Теорема Хеймана показує, що ми можемо довести відповідну нерівність з означення індексу функції без факторіалів (пор. нижче нерівності (1) та (6)). У цій роботі продовжено дослідження, започатковані в [1–3], власне, основним об'єктом є голоморфні на зрізках в одиничній кулі функції обмеженого L -індексу за напрямком. Ми досліджуємо композицію таких функцій у випадку, коли внутрішня функція є голоморфною на зрізках в одиничній кулі, а зовнішня функція голоморфна на зрізках в усьому n -вимірному комплексному просторі.

Для такої композиції застосовуються дві теореми, щоб знайти достатні умови обмеженості індексу за напрямком, а саме аналог теореми Хеймана та аналог логарифмічного критерію. Цей критерій описує поведінку модуля логарифмічної похідної функції за напрямком зовні деякої виняткової множини та розподіл нулів цієї ж функції на зрізках за тим самим напрямком. Обидві теореми відіграють важливу роль в застосуванні поняття обмеженості індексу до аналітичної теорії диференціальних рівнянь. Вони допомагають знайти умови на коефіцієнти рівнянь, які забезпечують обмеженість індексу кожного аналітичного розв'язку. Обмеженість індексу композиції переважно доводиться прямою перевіркою або використанням тверджень, виведених з аналогів теореми Хеймана (див. [6–9, 24, 25]). У статті [10] вперше запропоновано застосувати логарифмічний критерій до композиції цілих функцій для отримання достатніх умов обмеженості індексу. Ця стаття демонструє застосування вказаного підходу до композиції голоморфних на зрізках функцій, одна з яких є голоморфною на зрізках в одиничній кулі. До того ж ми не обмежуємося встановленням нових достатніх умов обмеженості через цей підхід та наводимо якісну характеристику цих умов. Зокрема, виділено підклас зовнішніх функцій у вказаній композиції, для яких умови, знайдені за цим підходом (логарифмічним критерієм), є слабшими за умови, отримані з допомогою теореми Хеймана.

Тому основна мета цієї статті така: *з використанням логарифмічного критерію знайти слабші достатні умови обмеженості L -індексу за напрямком для композиції двох голоморфних на зрізках функцій, одна з яких голоморфна на зрізках в одиничній кулі.*

Насправді отримано дещо більше, ніж просто аналоги відомих результатів. Твердження 1 і 3 не мають аналогів у теорії обмеженого l -індексу для композиції аналітичних у крузі функцій. Крім того, умови твердження 1, отримані через логарифмічний критерій, істотно слабші, ніж у твердженнях, отриманих за теоремою Хеймана (теореми 5 і 6), якщо нульова множина зовнішньої функції порожня (див. зауваження 1).

Твердження 3 використовує зв'язок між функціями обмеженого розподілу значень і функціями обмеженого індексу. У статті [16] доведено, що ціла функція має обмежений розподіл значень тоді й лише тоді, якщо її похідна має обмежений індекс. Однак до статті [10] не було відомо інших результатів про функції обмеженого індексу з використанням поняття обмеженого розподілу значень. Твердження 3 — це друге твердження такого типу.

2. Основні означення та позначення. Здебільшого будемо використовувати позначення з [1]. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R}_+^* = [0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, $\mathbf{1}_j =$

$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-те місце}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ – заданий напрямком, $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ – одинична куля, $\mathbb{D} = \mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – одиничний круг, $L: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ – неперервна функція. Для заданої точки $z \in \mathbb{B}^n$ позначимо $S_z = \{t \in \mathbb{C} : z + t\mathbf{b} \in \mathbb{B}^n\}$. Зріз-функції на S_z при фіксованому $z^0 \in \mathbb{B}^n$ позначатимемо так: $g_{z^0}(t) = F(z^0 + t\mathbf{b})$ та $l_{z^0}(t) = L(z^0 + t\mathbf{b})$ для $t \in S_z$.

Нехай $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ – клас функцій, які голоморфні на кожній зрізці $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in S_{z^0}\}$ для кожного $z^0 \in \mathbb{B}^n$, а $\mathcal{H}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ – підклас функцій з $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, які неперервні за сукупністю змінних. Запис $\partial_{\mathbf{b}} F(z)$ означає похідну функції $g_z(t)$ у точці 0, тобто для кожного $p \in \mathbb{N}$ $\partial_{\mathbf{b}}^p F(z) = g_z^{(p)}(0)$, де $g_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$ – аналітична функція комплексної змінної $t \in S_z$ при заданому $z \in \mathbb{B}^n$.

Припущення про сукупну неперервність разом з голоморфністю за одним напрямком не гарантують голоморфність у всій n -вимірній одиничній кулі. Відповідні приклади побудовано у статті [1].

Функція $F \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ називається [1] функцією обмеженого L -індексу за напрямком \mathbf{b} , якщо існує таке $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ і кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^m F(z)|}{m!L^m(z)} \leq \max_{0 \leq k \leq m_0} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{k!L^k(z)}. \quad (1)$$

Найменше таке ціле число m_0 , що задовольняє (1), називається L -індексом за напрямком \mathbf{b} функції F і позначається через $N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$. Для $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$, $L(z) = l(z)$, $z \in \mathbb{C}$ нерівність (1) визначає функцію обмеженого l -індексу [24] з l -індексом $N(F, l) \equiv N_1(F, l, \mathbb{C})$, а якщо додатково $l(z) \equiv 1$, то дістаємо означення функції обмеженого індексу [18, 19] з індексом $N(F) \equiv N_1(F, 1, \mathbb{C})$. Аналогічно, аналітична функція $F: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, якщо вона задовольняє (1) для всіх $z \in \mathbb{B}^n$.

Введемо позначення

$$\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{B}^n} \sup_{t_1, t_2 \in S_z} \left\{ \frac{L(z + t_1\mathbf{b})}{L(z + t_2\mathbf{b})} : |t_1 - t_2| \leq \frac{\eta}{\min\{L(z + t_1\mathbf{b}), L(z + t_2\mathbf{b})\}} \right\}.$$

Через $Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ позначимо клас додатних неперервних функцій $L: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, які для кожного $\eta \in [0, \beta]$ задовольняють умову

$$\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty, \quad (2)$$

а для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ – умову

$$L(z) > \frac{\beta|\mathbf{b}|}{1 - |z|}, \quad (3)$$

де $\beta > 1$ – деяка стала. Цей клас $Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ є допоміжним класом при вивченні аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L -індексу за напрямком.

Аналогічно, $Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^n)$ є класом додатних неперервних функцій $L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, для яких нерівність (2) виконується при всіх $\eta \in [0; +\infty)$ з

$$\lambda_{\mathbf{b}}(\eta) = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \sup_{t_1, t_2 \in \mathbb{C}} \left\{ \frac{L(z + t_1\mathbf{b})}{L(z + t_2\mathbf{b})} : |t_1 - t_2| \leq \frac{\eta}{\min\{L(z + t_1\mathbf{b}), L(z + t_2\mathbf{b})\}} \right\}.$$

Як і в [25], $Q \equiv Q_1^1$ і $\lambda(\eta) \equiv \lambda_1(\eta)$ при $\mathbf{b} = 1$, $n = 1$, $L \equiv l$, де $l \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ теж неперервна функція. Зрозуміло, що $Q(\mathbb{D}) = Q_1(\mathbb{D})$.

3. Допоміжні твердження. Далі нам буде потрібен аналог логарифмічного критерію для функцій із класу $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$. Зазначимо, що відповідний одновимірний критерій доволі ефективний при дослідженні обмеженості l -індексу нескінченних добутків та аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь [11, 26, 27]. Необхідність умов у цьому критерії вперше отримано в [12, 13] для цілих функцій обмеженого індексу однієї комплексної змінної.

Додатково скористаємося позначеннями з [2]

$$G_r^{\mathbf{b}}(F) = G_r^{\mathbf{b}}(F; L) := \bigcup_{z \in \mathbb{B}^n : F(z)=0} \{z + t\mathbf{b} : |t| < r/L(z)\}.$$

Якщо $n = 1$ і $\mathbf{b} = 1$, то користуватимемося спрощеним записом $G_r(F; L) = G_r^1(F; L)$ і $G_r(F) = G_r^1(F; 1)$ при $L \equiv 1$. Через $n_{z^0}(r) = n_{\mathbf{b}}(r, z^0, 1/F) := \sum_{|a_k^0| \leq r} 1$ позначатимемо лічильну функцію нулів a_k^0 для зріз-функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ у крузі $\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq r\}$ при заданому $z^0 \in \mathbb{B}^n$. Якщо ж для цього $z^0 \in \mathbb{B}^n$ і для всіх $t \in S_z$ $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$, то покладемо $n_{z^0}(r) = -1$. Позначимо $n(r) = \sup_{z \in \mathbb{B}^n} n_z(r/L(z))$.

Теорема 1 [2]. *Нехай $F \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$. Якщо функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} , то:*

1) для кожного $r \in (0, \beta]$ існує така стала $P = P(r) > 0$, що для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_r^{\mathbf{b}}(F)$ виконується

$$\left| \frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)} \right| \leq PL(z); \tag{4}$$

2) для будь-якого $r \in (0, \beta]$ існує таке $\tilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{B}^n$, для яких $F(z^0 + t\mathbf{b}) \not\equiv 0$, виконується

$$n_{\mathbf{b}}(r/L(z^0), z^0, 1/F) \leq \tilde{n}(r). \tag{5}$$

Теорема 2 [2]. *Нехай $F \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, $\mathbb{B}^n \setminus G_{\beta}^{\mathbf{b}}(F) \neq \emptyset$, а функція $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ задовольняє нерівність $(1 - |z|)L(z) > 2|\mathbf{b}|\beta$. Якщо виконуються умови:*

- 1) існує $r_1 \in (0, \beta)$, для якого $n(r_1) \in [-1; \infty)$,
- 2) існують такі $r_2 \in (0, \beta)$, $P > 0$, що $2r_2 n(r_1) < r_1/\lambda_{\mathbf{b}}(r_1)$ і для всіх $z \in \mathbb{B}^n \setminus G_{r_2}(F)$ виконується нерівність (4),

то функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Теорема 2 тут записана в дещо іншій рівносильній формі, якщо порівнювати з відповідною теоремою з [2]. Зазначимо, що достатні умови в теоремі 2 слабші за необхідні умови в теоремі 1. Відмінність між ними полягає у кванторах існування та загальності, відповідно. Іншими словами, з того, що виконуються нерівності (4) та (5) для деякого радіуса r , безпосередньо випливає, що ці нерівності виконуються для всіх можливих значень r з деякого інтервалу.

Нижче ми сформулюємо критерій для функцій з класу $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, що є певним аналогом теореми Хеймана [16], яка встановлена для цілих функцій однієї змінної.

Теорема 3 [3]. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$. Функція $F \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} тоді й лише тоді, якщо існують такі $p \in \mathbb{Z}_+$ і $C > 0$, що для будь-якого $z \in \mathbb{B}^n$ маємо*

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\}. \tag{6}$$

Нехай $\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^m)$ — клас функцій, які голоморфні на кожній зрізці $\{z^0 + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ для будь-якого $z^0 \in \mathbb{C}^m$. Ці функції називатимемо цілими на зрізках функціями. Функція $f \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^m)$ називається функцією обмеженого L -індексу за напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, якщо нерівність (1) виконується для всіх $z \in \mathbb{C}^m$, де $L : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.

Для доведення одного з основних тверджень у цій статті нам потрібен також такий аналог теореми Хеймана для цілих на зрізках функцій.

Теорема 4 [4]. *Нехай $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^n)$. Функція $F \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}^n$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} тоді й лише тоді, якщо існують такі $p \in \mathbb{Z}_+$ і $C > 0$, що оцінка (6) виконується для кожного $z \in \mathbb{C}^n$.*

4. Застосування теореми Хеймана до композицій. На даний час відомо багато праць про обмеженість індексу композиції цілих та аналітичних функцій однієї змінної [8, 25] та кількох комплексних змінних [6, 7, 9]. У цьому пункті ми дослідимо деяку композицію функцій, голоморфних на зрізках в одиничній кулі.

Нехай функція $\Phi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ додатково задовольняє умову

$$|\partial_{\mathbf{b}}^j \Phi(z)| \leq K |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^j, \quad K \equiv \text{const} > 0, \quad (7)$$

для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ і всіх натуральних $j \leq p$, де p — деяке натуральне число. Прикладом такої функції $\Phi(z)$ є кожний аналітичний на зрізках в одиничній кулі розв'язок рівняння $\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z) =$

$$\exp \left\{ \frac{P(z_{m+1}, \dots, z_n)}{\prod_{j=1}^m (e^{i\theta_j} - z_j)} \right\}, \quad \text{де } P : \mathbb{C}^{n-m} \rightarrow \mathbb{C} \text{ — довільна ціла функція, } \theta_j \in [0; 2\pi], \quad 1 \leq m \leq n,$$

а вектор $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ такий, що $b_s = 0$ для $s \in \{m+1, \dots, n\}$. Основним результатом цього пункту є така теорема.

Теорема 5. *Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $f \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbb{C}^m)$, а функція $\Phi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ така, що $\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z) \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{B}^n$. Припустимо, що $l \in Q_1(\mathbb{C}^m)$, $l(w) \geq 1$ ($w \in \mathbb{C}^m$), $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, $L(z) = |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)| l(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{t \text{ разів}})$.*

Якщо функція f має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}$ і функція Φ задовольняє умову (7) з $p = N_1(f, l, \mathbb{C}^m)$, то функція $F(z) = f(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{t \text{ разів}})$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Якщо ж функція $F(z) = f(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{t \text{ разів}})$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} і функція Φ задовольняє умову (7) з $p = N_{\mathbf{b}}(F, L, \mathbb{B}^n)$, то функція f має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}$.

Доведення. Введемо позначення $\nabla f = \partial_1 f = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial z_j}$, $\nabla^k f \equiv \partial_1^k f$ при $k \geq 2$. Наше доведення подібне до доведення відповідної теореми з [7]. Зокрема, там встановлено такі формули:

$$\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = \nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) (\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z))^k + \sum_{j=1}^{k-1} \nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) Q_{j,k}(z), \quad (8)$$

де

$$Q_{j,k}(z) = \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+kn_k=k \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} c_{j,k,n_1,\dots,n_k} (\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^{n_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z))^{n_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^k\Phi(z))^{n_k}$$

і c_{j,k,n_1,\dots,n_k} — невід’ємні цілі числа. Також в [7] доведено рівність

$$\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) = \frac{\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)}{(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^k} + \frac{1}{(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^{2k}} \sum_{j=1}^{k-1} \partial_{\mathbf{b}}^j F(z) (\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^j Q_{j,k}^*(z), \quad (9)$$

де

$$Q_{j,k}^*(z) = \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=2(k-j)} b_{j,k,m_1,\dots,m_k} (\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^{m_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z))^{m_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^k\Phi(z))^{m_k}$$

і b_{j,k,m_1,\dots,m_k} — деякі цілі числа. Хоча формули (8) і (9) доведено у статті [7] для аналітичних функцій, проте в їхніх доведеннях не використовують сукупної аналітичності за всіма змінними, а базуються лише на методі математичної індукції та диференціюванні за напрямком. З огляду на це можна вважати рівності (8) і (9) доведеними для функцій, голоморфних на зрізках за тим самим напрямком.

Нехай $f \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{C}^m)$ — функція обмеженого l -індексу. За теоремою 4 нерівність (6) виконуються при $n = m$, $F = f$, $L = l$, $\mathbf{b} = \mathbf{1}$. Зважаючи на (7) та (8), при $k = p + 1$ отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} &\leq \frac{|\nabla^{p+1} f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{L^{p+1}(z)} |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{p+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))| |Q_{j,p+1}(z)|}{L^{p+1}(z)} \\ &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \frac{|Q_{j,p+1}(z)|}{l^{p+1-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{p+1}} \right) \\ &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+(p+1)n_{p+1}=p+1 \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} c_{j,p+1,n_1,\dots,n_{p+1}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{|(\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z))^{n_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2\Phi(z))^{n_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}\Phi(z))^{n_{p+1}}|}{l^{p+1-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|^{p+1}} \right) \\ &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+(p+1)n_{p+1}=p+1 \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} \frac{c_{j,p+1,n_1,\dots,n_{p+1}} K^{p+1}}{l^{p+1-j}(\Phi(z))} \right) \\ & \leq C_1 \max_{0 \leq k \leq p} \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}. \end{aligned}$$

Використовуючи (9), знаходимо верхню оцінку для дробу $\frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))}$:

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} & \leq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{l^k(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)| |Q_{j,k}^*(z)|}{l^k(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2k-j}} \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{L^j(z)} \left| \partial_{\mathbf{b}}^j F(z) \right| : 1 \leq j \leq k \right\} \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|Q_{j,k}^*(z)|}{l^{k-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(k-j)}} \right) \\ & \leq \max \left\{ \frac{1}{L^j(z)} \left| \partial_{\mathbf{b}}^j F(z) \right| : 1 \leq j \leq k \right\} \\ & \quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=2(k-j)} |b_{j,k,m_1,\dots,m_k}| \right. \\ & \quad \left. \times \frac{|(\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z))^{m_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2 \Phi(z))^{m_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^k \Phi(z))^{m_k}|}{l^{k-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(k-j)}} \right) \\ & \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)|}{L^j(z)} : 1 \leq j \leq k \right\} \\ & \quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=2(k-j)} \frac{|b_{j,k,m_1,\dots,m_k}| K^k}{l^{k-j}(\Phi(z))} \right) \\ & \leq C_2 \max_{1 \leq j \leq k} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)|}{L^j(z)}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C_1 C_2 \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\}$. Тому за теоремою 3 з останньої нерівності випливає, що функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Навпаки, будемо вважати тепер, що функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} . Тоді вона задовольняє (6). Із врахуванням (7) і (9) встановлюємо

$$\frac{|\nabla^{p+1} f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^{p+1}(\Phi(z))} \leq \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{l^{p+1}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}} + \sum_{j=1}^p \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)| |Q_{j,p+1}^*(z)|}{l^{p+1}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2p+2-j}}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \\
 &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \frac{|Q_{j,p+1}^*(z)|}{l^{p+1-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(p+1-j)}} \right) \\
 &\leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \\
 &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{m_1+\dots+(p+1)m_{p+1}= \\ 2(p+1-j)}} |b_{j,p+1,m_1,\dots,m_{p+1}}| \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{|(\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z))^{m_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2 \Phi(z))^{m_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} \Phi(z))^{m_{p+1}}|}{l^{p+1-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(p+1-j)}} \right) \\
 &\leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \\
 &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{m_1+\dots+(p+1)m_{p+1}= \\ 2(p+1-j)}} \frac{|b_{j,p+1,m_1,\dots,m_{p+1}}| K^{2p+2-2j}}{l^{p+1-j}(\Phi(z))} \right) \\
 &\leq C_3 \max_{0 \leq k \leq p} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)}.
 \end{aligned}$$

Застосовуючи (8), отримуємо

$$\begin{aligned}
 \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} &\leq \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))| |\varphi'(z)|^k}{L^k(z)} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))| |Q_{j,k}(z)|}{L^k(z)} \\
 &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))} : 1 \leq j \leq k \right\} \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|Q_{j,k}(z)|}{l^{k-j}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^k} \right) \\
 &\leq C_4 \max \left\{ \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))} : 1 \leq j \leq k \right\}.
 \end{aligned}$$

Тоді остаточно маємо

$$\frac{|\nabla^{p+1} f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^{p+1}(\Phi(z))} \leq C_3 C_4 \max \left\{ \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^j(\Phi(z))} : 0 \leq j \leq p \right\}.$$

Отже, за теоремою 4 ($n = m$, $F = f$, $L = l$, $\mathbf{b} = \mathbf{1}$) функція f має обмежений l -індекс.

Теорему 5 доведено.

Теорема 6. Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $l \in Q_1(\mathbb{C}^m)$, $l(w) \geq 1$, $w \in \mathbb{C}^m$, $\Phi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, а функція $f \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbb{C}^m)$ має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}$. Припустимо, що $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, де

$$L(z) = \max\{1, |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|\} l\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right), \quad (10)$$

а також для всіх $z \in \mathbb{B}^n$ і $k \in \{1, 2, \dots, N_1(f, l) + 1\}$ виконується

$$|\partial_{\mathbf{b}}^k \Phi(z)| \leq K(l(\Phi(z)))^{1/(N_1(f, l)+1)} |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^k, \quad (11)$$

де $K \geq 1$ — деяка стала. Тоді функція $F(z) = f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Доведення. Будемо використовувати ідеї з [6] для аналітичних в одиничній кулі функцій. Знову застосовуватимемо формули (8) і (9).

Позначимо $L_0(z) = l\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|$. Беручи до уваги (8) та (10), для $k = p + 1$ одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L_0^{p+1}(z)} &\leq \frac{|\nabla^{p+1} f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{L_0^{p+1}(z)} |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))| |Q_{j, p+1}(z)|}{L_0^{p+1}(z)} \\ &\leq \frac{|\nabla^{p+1} f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))| |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}}{l^{p+1}(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \frac{|\nabla^j f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^j(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} \frac{|Q_{j, p+1}(z)| l^j(\Phi(z), \dots, \Phi(z))}{|\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1} l^{p+1}(\Phi(z), \dots, \Phi(z))}. \end{aligned} \quad (12)$$

Нехай f — ціла на зрізках функція обмеженого l -індексу за напрямком $\mathbf{1}$. За теоремою 4 нерівність (6) справджується для $n = m$, $F = f$, $L = l$, $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ та $p = N_1(f, l)$, тобто

$$(\forall \tau \in \mathbb{C}^m): \quad \frac{|\nabla^{p+1} f(\tau)|}{l^{p+1}(\tau)} \leq C \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\tau)|}{l^k(\tau)} : 0 \leq k \leq p \right\}.$$

Застосовуючи до (12) цю нерівність з $\tau = (\Phi(z), \dots, \Phi(z))$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L_0^{p+1}(z)} &\leq \max_{0 \leq k \leq p} \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} \right\} \\ &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \frac{|Q_{j, p+1}(z)| l^{j-p-1}(\Phi(z), \dots, \Phi(z))}{|\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+(p+1)n_{p+1}=p+1 \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} C_{j,p+1,n_1,\dots,n_{p+1}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{|(\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z))^{n_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2 \Phi(z))^{n_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} \Phi(z))^{n_{p+1}}|}{l^{p+1-j}(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Внаслідок умови (11) з нерівності (13) випливає, що

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L_0^{p+1}(z)} &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+(p+1)n_{p+1}=p+1 \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} C_{j,p+1,n_1,\dots,n_{p+1}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{K^{p+1} l(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}}{l^{p+1-j}(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{p+1}} \right) \\ &\leq \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &\quad \times \left(C + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+(p+1)n_{p+1}=p+1 \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} \frac{C_{j,p+1,n_1,\dots,n_{p+1}} K^{p+1}}{l^{p-j}(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Скористаємося тим, що $l(\Phi(z)) \geq 1$. Тоді з (14) отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1} F(z)|}{L_0^{p+1}(z)} \leq C_1 \max \left\{ \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} : 0 \leq k \leq p \right\}, \tag{15}$$

де

$$C_1 = C + K^{p+1} \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{n_1+2n_2+\dots+(p+1)n_{p+1}=p+1 \\ 0 \leq n_1 \leq j-1}} C_{j,p+1,n_1,\dots,n_{p+1}}.$$

Застосовуючи нерівність (9), можемо оцінити дріб $\frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^k} \\
& + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)| |Q_{j,k}^*(z)|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2k-j}} \\
& \leq \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j \Phi(z)|}{l^j(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^j} \right\} \\
& \quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|Q_{j,k}^*(z)|}{l^{k-j}(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(k-j)}} \right) \\
& \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j \Phi(z)|}{l^j(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^j} : 1 \leq j \leq k \right\} \\
& \quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=2(k-j)} |b_{j,k,m_1,\dots,m_k}| \right. \\
& \quad \left. \times \frac{|(\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z))^{m_1} (\partial_{\mathbf{b}}^2 \Phi(z))^{m_2} \dots (\partial_{\mathbf{b}}^k \Phi(z))^{m_k}|}{l^{k-j}(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(k-j)}} \right). \tag{16}
\end{aligned}$$

З нерівностей (11) і $l(w) \geq 1$ встановлюємо, що

$$|\partial_{\mathbf{b}}^s \Phi(z)| \leq K l^{s/2}(\Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^s,$$

позаяк $s/2 \geq 1/(N_1(f, l) + 1)$ при $s \in \{1, 2, \dots, N_1(f, l) + 1\}$ і $N_1(f, l) \geq 1$. Застосовуючи отриману нерівність до (16), виводимо

$$\begin{aligned}
& \frac{|\nabla^k f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z))} \leq \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)|}{l^j(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^j} : 1 \leq j \leq k \right\} \\
& \quad \times \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=2(k-j)} |b_{j,k,m_1,\dots,m_k}| K^{m_1+m_2+\dots+m_k} \right. \\
& \quad \left. \times \frac{(l(\Phi(z), \dots, \Phi(z)))^{(m_1+2m_2+\dots+km_k)/2} |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{m_1+2m_2+\dots+km_k}}{l^{k-j}(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^{2(k-j)}} \right) \\
& \leq C_2 \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j \Phi(z)|}{l^j(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|^j} : 1 \leq j \leq k \right\},
\end{aligned}$$

де

$$C_2 = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{m_1+2m_2+\dots+km_k=2(k-j)} |b_{j,k,m_1,\dots,m_k}| K^{m_1+m_2+\dots+m_k}.$$

Тоді з нерівності (15) одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L_0^{p+1}(z)} &\leq C_1 \max_{0 \leq k \leq p} \left\{ \frac{|f^{(k)}(\Phi(z), \dots, \Phi(z))|}{l^k(\Phi(z), \dots, \Phi(z))} \right\} \\ &\leq C_1 C_2 \max_{0 \leq j \leq p} \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^j F(z)|}{L_0^j(z)} \right\}, \quad p = N_1(f, l). \end{aligned} \tag{17}$$

Останню нерівність доведено для всіх z таких, що $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$, та за умови $N_1(f, l) \geq 1$. Якщо $N_1(f, l) = 0$, то $p = 0$ і з (15) знаходимо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}F(z)|}{L_0(z)} \leq C_1 |f(\Phi(z), \dots, \Phi(z))| = C_1 |F(z)|.$$

Отже, нерівність (17) доведено для всіх можливих значень $N_1(f, l)$.

Нагадаємо, що $L(z) = l(\Phi(z), \dots, \Phi(z)) \max\{1, |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|\}$. Запишемо нерівність (17) у вигляді

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)} \frac{L^{p+1}(z)}{L_0^{p+1}(z)} \leq C_1 C_2 \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} \frac{L^k(z)}{L_0^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)} &\leq C_1 C_2 \frac{L_0^{p+1}(z)}{L^{p+1}(z)} \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} \frac{L^k(z)}{L_0^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &\leq C_1 C_2 \frac{L_0^{p+1}(z)}{L^{p+1}(z)} \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \max \left\{ \frac{L^k(z)}{L_0^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \\ &= C_1 C_2 \frac{(L_0(z)/L(z))^{p+1}}{\min_{0 \leq k \leq p} (L_0(z)/L(z))^k} \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Нехай $t_0 = t(z) = L_0(z)/L(z)$ і $k_0 \leq p$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, таке, що $(t_0)^{k_0} = \min_{0 \leq k \leq p} t_0^k$. Зауважимо, що $t_0 \in (0, 1]$ і $p + 1 - k_0 \geq 1$. Звідси $\frac{t_0^{p+1}}{t_0^{k_0}} = t_0^{p+1-k_0} \leq t_0 \leq 1$. Тому

$$\frac{(L_0(z)/L(z))^{p+1}}{\min_{0 \leq k \leq p} (L_0(z)/L(z))^k} = t_0^{p+1-k_0} \leq t_0 \leq 1.$$

З урахуванням нерівності (18) остаточно отримуємо

$$\frac{|\partial_{\mathbf{b}}^{p+1}F(z)|}{L^{p+1}(z)} \leq C_1 C_2 \max \left\{ \frac{|\partial_{\mathbf{b}}^k F(z)|}{L^k(z)} : 0 \leq k \leq p \right\} \tag{19}$$

для всіх z таких, що $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$.

Якщо ж $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) = 0$, то для всіх $k \in \{1, \dots, N(f, l) + 1\}$ з нерівності (11) випливає, що $\partial_{\mathbf{b}}^k\Phi(z) = 0$. Проте з рівності (8) випливає, що $\partial_{\mathbf{b}}^k F(z) = 0$ для кожного $k \in \{1, \dots, N(f, l) + 1\}$. Отже, для тих точок z , в яких $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) = 0$, нерівність (19) також виконується. Тому за теоремою 3 ця нерівність означає, що функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Теорему 6 доведено.

5. Застосування логарифмічного критерію до композиції. У теорії функцій обмеженого індексу теорема Хеймана та логарифмічний критерій найчастіше застосовують до розв'язування інших задач. Зокрема, у багатьох працях наявні їхні застосування до вивчення властивостей аналітичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними та їхніх систем. Навіть більше, теорема Хеймана також допомагає виводити деякі умови обмеженості L -індексу за напрямком для композиції цілих та аналітичних в деякій обмеженій області функцій. Однак, як ми вже згадували, результати про композицію з використанням логарифмічного критерію відомі лише для цілих функцій, та й ті з'явилися зовсім недавно [10]. У цьому пункті вважатимемо, що $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$.

Твердження 1. Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $\Phi \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, а функція $f \in \tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbb{C}^m)$ така, що $f(w) \neq 0$ для всіх $w \in \mathbb{C}^m$.

1. Припустимо, що $l \in Q_1(\mathbb{C}^m)$, $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ та для всіх $z \in \mathbb{B}^n$

$$L(z) \geq |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)| l\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right).$$

Якщо функція f має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}$, то функція $F(z) = f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

2. Припустимо, що $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, $\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z) \neq 0$ та $l \in Q_1(\mathbb{C}^m)$ такі, що

$$l\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right) \geq \frac{L(z)}{|\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|}$$

для всіх $z \in \mathbb{B}^n$. Якщо функція $F(z) = f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right)$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} , то функція f має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що

$$\partial_{\mathbf{b}}F(z) = \partial_{\mathbf{1}}f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right) \cdot \partial_{\mathbf{b}}\Phi(z). \quad (20)$$

Оскільки $f(w) \neq 0$ при всіх $w \in \mathbb{C}^m$, складена функція $f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right)$ не перетворюється в нуль для всіх $z \in \mathbb{B}^n$, тобто $G_r^{\mathbf{b}}(F) = \emptyset$, а отже, нам потрібно перевірити лише умову 2 з теореми 2. Насправді достатньо довести нерівність (4) для всіх $z \in \mathbb{B}^n$. Справді, з огляду на (20) маємо

$$\left| \frac{\partial_{\mathbf{b}}F(z)}{F(z)} \right| = \left| \frac{\partial_{\mathbf{1}}f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right)}{f\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right)} \right| |\partial_{\mathbf{b}}\Phi(z)|. \quad (21)$$

Нехай f має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}$. Тоді за аналогом теореми 1 для класу $\tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbb{C}^m)$ (див. [4]) нерівність (4) виконується для функції f і всіх $w \in \mathbb{C}^m$:

$$\frac{|\partial_{\mathbf{1}} f(w)|}{|f(w)|} \leq Pl(w). \tag{22}$$

Підставляючи $w = \underbrace{(\Phi(z), \dots, \Phi(z))}_{m \text{ разів}}$ у нерівність (22) та застосовуючи отриману нерівність до (21), одержуємо

$$\left| \frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)} \right| = Pl\left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}}\right) |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)| \leq PL(z). \tag{23}$$

Нагадаємо, що функція F , як і функція f , також не перетворюється в нуль. Тому з нерівності (23) виводимо, що за теоремою 1 функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} . Першу частину твердження 1 доведено.

Доведення другої частини цього твердження повністю подібне до доведення першої частини.

Можна розглянути загальнішу композицію голоморфних на зрізках функцій, але у цьому випадку умови будуть жорсткішими.

Твердження 2. Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\Phi_j \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, а функція $f: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$ є цілою і такою, що $f(w) \neq 0$ для всіх $w \in \mathbb{C}^m$. Припустимо, що $l \in Q_{\mathbf{1}_j}^m$ для кожного $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $L \in Q_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ і

$$L(z) \geq \sum_{j=1}^m |\partial_{\mathbf{b}} \Phi_j(z)| l(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))$$

для всіх $z \in \mathbb{B}^n$. Якщо функція f має обмежений l -індекс за напрямком $\mathbf{1}_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$, то функція $F(z) = f(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))$ має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Доведення. Насамперед зауважимо, що

$$\partial_{\mathbf{b}} F(z) = \sum_{j=1}^m f'_{\Phi_j}(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z)) \partial_{\mathbf{b}} \Phi_j(z). \tag{24}$$

З того, що $f(w) \neq 0$ для всіх $w \in \mathbb{C}^m$, робимо висновок, що й складена функція $f(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))$ не перетворюється в нуль для всіх $z \in \mathbb{B}^n$, тобто $G_r^{\mathbf{b}}(F) = \emptyset$. Тому нам знову залишається перевірити лише умову 2 з теореми 2. Достатньо довести нерівність (4) для всіх $z \in \mathbb{B}^n$. З огляду на (24) маємо

$$\left| \frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)} \right| \leq \sum_{j=1}^m \left| \frac{f'_{\Phi_j}(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))}{f(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))} \right| |\partial_{\mathbf{b}} \Phi_j(z)|. \tag{25}$$

Нехай функція f має обмежений l -індекс за кожним напрямком $\mathbf{1}_j$. Тоді за аналогом теореми 1 для цього класу цілих функцій m комплексних змінних (див. [5]) нерівність (4) виконується для функції f і для всіх $w \in \mathbb{C}^m$:

$$\frac{|\partial_{\mathbf{1}_j} f(w)|}{|f(w)|} \leq Pl(w). \tag{26}$$

Підставляючи $w = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z))$ у (26) і застосовуючи отриману нерівність до (25), отримуємо

$$\left| \frac{\partial_{\mathbf{b}} F(z)}{F(z)} \right| = Pl(\Phi_1(z), \dots, \Phi_m(z)) \sum_{j=1}^m |\partial_{\mathbf{b}} \Phi_j(z)| \leq PL(z). \quad (27)$$

Залишилося нагадати, що F , як і функція f , має порожню нульову множину. Тому з нерівності (27) за теоремою 1 випливає, що функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Твердження 2 доведено.

Умову $f(w) \neq 0$ можна замінити на деяке припущення щодо функції Φ . Але спершу нагадаємо означення функції обмеженого L -розподілу значень за напрямком.

Функція $F \in \tilde{\mathcal{H}}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ називається [3] функцією обмеженого L -розподілу значень за напрямком \mathbf{b} , якщо для деякого $p \in \mathbb{N}$ і кожного $w \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{B}^n$ таких, що $F(z_0 + t\mathbf{b}) \neq w$, виконується нерівність $n\left(\frac{1}{L(z_0)}, z_0, \frac{1}{F-w}\right) \leq p$, тобто рівняння $F(z_0 + t\mathbf{b}) = w$ має щонайбільше p розв'язків у крузі $\left\{t: |t| \leq \frac{1}{L(z_0)}\right\}$. Іншими словами, функція $F(z_0 + t\mathbf{b})$ щонайбільше p -листа у крузі $\left\{t: |t| \leq \frac{1}{L(z_0)}\right\}$ для кожного фіксованого $z_0 \in \mathbb{B}^n$. Якщо $n = 1$, $\mathbf{b} = 1$ і $L \equiv 1$, то ми отримуємо означення функції обмеженого розподілу значень [14, 15, 21–23]. Інший підхід до многолистості у випадку цілих функцій двох змінних розглянуто в [20].

Твердження 3. Нехай $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\Phi \in \mathcal{H}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$, а $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ціла функція, $F(z) = f(\Phi(z))$. Припустимо, що $l \in \mathbb{Q}$, $L \in \mathcal{Q}_{\mathbf{b}}(\mathbb{B}^n)$ та $L(z) \geq |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)| l(\Phi(z))$ для всіх $z \in \mathbb{B}^n$. Якщо виконуються умови:

- 1) функція f має обмежений l -індекс;
- 2) функція Φ має обмежений L -розподіл значень за напрямком \mathbf{b} ;
- 3) для кожного $r_1 \in (0; \beta]$ існують $r_2 > 0$ та $r_3 > 0$ такі, що

$$G_{r_2}(f; l) \subset \Phi(G_{r_1}^{\mathbf{b}}(F; L)) \subset G_{r_3}(f; l),$$

то функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Доведення. З огляду на умову 3 нерівність (23) доводиться подібно до доведення твердження 1.

Нерівність (5) виконується для функції F , тому що рівняння $F(z^0 + t\mathbf{b}) = 0$ рівносильне рівнянню $\Phi(z^0 + t\mathbf{b}) = c_k$, де c_k — нулі функції f , $k \in \mathbb{N}$. З умови 2 випливає, що рівняння $\Phi(z^0 + t\mathbf{b}) = c_k$ має щонайбільше $p(r_1)$ розв'язків для фіксованого k у крузі $\left\{t: |t| \leq \frac{r_1}{L(z^0)}\right\}$ при кожному фіксованому $r_1 \in (0; \beta)$. З умови 3 випливає, що множина $\left\{\Phi(z^0 + t\mathbf{b}): |t| \leq \frac{r_1}{L(z^0)}\right\}$ може містити не більше ніж $n(r_3)$ нулів функції f . Тому множина $\left\{z^0 + t\mathbf{b}: |t| \leq \frac{r_1}{L(z^0)}\right\}$ містить не більше ніж $p(r_1) \cdot n(r_3)$ нулів функції F . Звідси отримуємо нерівність (5). Тоді за теоремою 2 функція F має обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} .

Зауваження 1. Твердження 1 і 3 містять нові результати також в інтерпретації для одно-вимірною випадку, тобто для $n = 1$ та $m = 1$. При цьому обмеження на внутрішню функцію композиції у твердженні 1 істотно слабші, ніж в теоремах 5 і 6, оскільки ми не припускаємо,

що умови (7) та (11) виконуються. Але це послаблення умов досягається через додаткове припущення, що зовнішня функція композиції має порожню нульову множину (твердження 1). Натомість у твердженні 3 нерівності (7) та (11) для внутрішньої функції замінено на умову, що внутрішня функція композиції має обмежений L -розподіл значень за напрямком \mathbf{b} , а виняткова множина з нулів кінцевої функції сама міститься у відповідній винятковій множині з нулів зовнішньої функції для деяких радіусів, і навпаки.

Зазначимо, що твердження 1 і 3 нові, навіть якщо $n = 1$, $m = 1$, $\mathbf{b} = 1$ та $l \equiv 1$, тобто для цілих функцій обмеженого індексу. Наведемо відповідні наслідки для композиції цілої функції та аналітичної в одиничному крузі функції.

Наслідок 1. Нехай $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналітична функція, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — ціла функція.

1. Припустимо, що $l \in Q(\mathbb{D})$ і $l(z) \geq |\Phi'(z)|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Якщо функція f має обмежений індекс, то функція $F(z) = f(\Phi(z))$ має обмежений l -індекс.

2. Припустимо, що $l \in Q(\mathbb{D})$, $\Phi'(z) \neq 0$ такі, що $l(z) \leq |\Phi'(z)|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Якщо функція $F(z) = f(\Phi(z))$ має обмежений l -індекс, то функція f має обмежений індекс.

Наслідок 2. Нехай $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналітична функція, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ціла функція та $F(z) = f(\Phi(z))$. Припустимо, що $l \in Q(\mathbb{D})$ і $l(z) \geq |\Phi'(z)|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Якщо виконуються умови:

- 1) функція f має обмежений індекс;
- 2) функція Φ має обмежений l -розподіл значень;
- 3) для кожного $r_1 \in (0; \beta]$ існують такі $r_2 > 0$ і $r_3 > 0$, що

$$G_{r_2}(f) \subset \Phi(G_{r_1}(F; l)) \subset G_{r_3}(f),$$

то функція F має обмежений l -індекс.

Зауважимо, що теореми 5, 6 і твердження 1, 3 відрізняються лише умовами на зовнішню та внутрішню функцію композиції. Однак усі вони стверджують, що складена функція матиме обмежений L -індекс за напрямком \mathbf{b} по суті, з тією самою функцією L :

$$L(z) = |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)| l \left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}} \right) \quad \text{або} \quad L(z) = \max \{1, |\partial_{\mathbf{b}} \Phi(z)|\} l \left(\underbrace{\Phi(z), \dots, \Phi(z)}_{m \text{ разів}} \right).$$

Проте існують функції, які одночасно не задовольняють умови всіх перерахованих вище тверджень. Розглянемо випадок $n = 1$, $m = 1$, $\mathbf{b} = 1$. Для спрощення припустимо, що зовнішня і внутрішня функції композиції є відповідно цілими та аналітичними в одиничному крузі функціями. Наприклад, візьмемо $f(z) = e^z$, $\Phi(z) = \frac{z}{1-z}$. Тоді функція Φ не задовольняє умови теореми 5, тому що вона дорівнює нулю в точці $z = 0$. Але ці функції задовольняють умови теореми 6. Справді, функція f має обмежений індекс з $l \equiv 1$, і її індекс дорівнює нулю $N(f, 1) = 0$, позаяк $f' \equiv f$. Тому нерівність (11) виконується для $k = 1$. Вона зводиться до очевидної нерівності $|\Phi'(z)| \leq K|\Phi'(z)|$. Тоді за теоремою 6 функція $f(\Phi(z)) = e^{z/(1-z)}$ має обмежений L -індекс з $L(z) = \max \left\{ 1, \frac{1}{|1-z|^2} \right\}$.

Але якщо тепер взяти функції $f(z) = e^{2z}$ і $\Phi(z) = \frac{z^2+z}{1-z}$, то функція Φ теж не задовольняє умови теореми 5, бо дорівнює нулю в точці $z = 0$. До того ж для цих функцій не виконуються умови теореми 6. Справді, функція f має обмежений індекс з $l \equiv 1$, а її індекс дорівнює 1, бо $\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!} = 2^p |e^{2z}| / p! \leq 2 |e^{2z}| = \frac{|f'(z)|}{1!}$ для всіх $p \in \mathbb{N}$. Звідси для всіх $k \in \{1, 2\}$ і

всіх z повинна виконуватися нерівність $|\Phi^{(k)}(z)| \leq K|\Phi'(z)|^k$. Але для $k = 2$ маємо $\Phi'(z) = -\frac{z^2 - 2z - 1}{(z - 1)^2}$, $\Phi''(z) = \frac{-4}{(z - 1)^3}$. Тоді $|\Phi''(1 \pm \sqrt{2})| = \sqrt{2}$, $\Phi'(1 \pm \sqrt{2}) = 0$. Це означає, що нерівність (11) хибна для цих функцій, тобто теорему 6 не можна застосувати. У цьому випадку можемо застосувати твердження 1, за яким функція $f(\Phi(z)) = e^{2(z^2+z)/(1-z)}$ матиме обмежений L -індекс з $L(z) = \frac{|z^2 - 2z - 1|}{|z - 1|^2} + 1$.

Конфлікт інтересів. Автори заявляють, що вони не мають потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

Фінансування. Дослідження Андрія Бандури підтримано грантами Міністерства освіти і науки України (проекти 0123U101858, 0124U000654).

Авторські внески. Усі автори внесли рівний внесок у роботу.

Література

1. A. Bandura, M. Martsinkiv, O. Skaskiv, *Slice holomorphic functions in the unit ball having a bounded L -index in direction*, *Axioms*, **10**, № 1, Article 4 (2021); <https://doi.org/10.3390/axioms10010004>.
2. A. Bandura, L. Shegda, O. Skaskiv, L. Smolovyk, *Some criteria of boundedness of L -index in a direction for slice holomorphic functions in the unit ball*, *Int. J. Appl. Math.*, **34**, № 4, 775–793 (2021); <https://doi.org/10.12732/ijam.v34i4.13>.
3. A. Bandura, T. Salo, O. Skaskiv, *Slice holomorphic functions in the unit ball: boundedness of L -index in a direction and related properties*, *Mat. Stud.*, **57**, № 1, 68–78 (2022); <https://doi.org/10.30970/ms.57.1.68-78>.
4. A. Bandura, O. Skaskiv, *Some criteria of boundedness of the L -index in direction for slice holomorphic functions of several complex variables*, *J. Math. Sci.*, **244**, № 1, 1–21 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04600-7>.
5. A. I. Bandura, *Some improvements of criteria of L -index boundedness in direction*, *Mat. Stud.*, **47**, № 1, 27–32 (2017); <https://doi.org/10.15330/ms.47.1.27-32>.
6. A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, I. R. Tymkiv, *Composition of entire and analytic functions in the unit ball*, *Carpathian Math. Publ.*, **14**, № 1, 95–104 (2022); <https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.95-104>.
7. A. I. Bandura, *Composition, product and sum of analytic functions of bounded L -index in direction in the unit ball*, *Mat. Stud.*, **50**, № 2, 115–134 (2018); <https://doi.org/10.15330/ms.50.2.115-134>.
8. A. I. Bandura, M. M. Sheremeta, *Bounded l -index and $l - M$ -index and compositions of analytic functions*, *Mat. Stud.*, **48**, № 2, 180–188 (2017); <https://doi.org/10.15330/ms.48.2.180-188>.
9. A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, V. L. Tsvigun, *The functions of bounded L -index in the collection of variables analytic in $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$* , *J. Math. Sci.*, **246**, № 2, 256–263 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04735-y>.
10. V. P. Baksa, A. I. Bandura, T. M. Salo, O. B. Skaskiv, *Note on boundedness of the L -index in the direction of the composition of slice entire functions*, *Mat. Stud.*, **58**, № 1, 58–68 (2022); <https://doi.org/10.30970/ms.58.1.58-68>.
11. M. T. Bordulyak, M. M. Sheremeta, *On the existence of entire functions of bounded l -index and l -regular growth*, *Ukr. Math. J.*, **48**, № 9, 1322–1340 (1996); <https://doi.org/10.1007/BF02595355>.
12. G. H. Fricke, *Functions of bounded index and their logarithmic derivatives*, *Math. Ann.*, **206**, № 3, 215–223 (1973); <https://doi.org/10.1007/BF01429209>.
13. G. H. Fricke, *Entire functions of locally slow growth*, *J. Anal. Math.*, **28**, № 1, 101–122 (1975); <https://doi.org/10.1007/BF02786809>.
14. G. H. Fricke, *A note on bounded index and bounded value distribution*, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **11**, № 4, 428–432 (1980).
15. G. H. Fricke, S. M. Shah, *On bounded value distribution and bounded index*, *Nonlinear Anal.*, **2**, № 4, 423–435 (1978); [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(78\)90049-4](https://doi.org/10.1016/0362-546X(78)90049-4).
16. W. K. Hayman, *Differential inequalities and local valency*, *Pacific J. Math.*, **44**, № 1, 117–137 (1973); <https://doi.org/10.2140/pjm.1973.44.117>.
17. I. M. Hural, *About some problem for entire functions of unbounded index in any direction*, *Mat. Stud.*, **51**, № 1, 107–110 (2019); <https://doi.org/10.15330/ms.51.1.107-110>.

18. B. Lepson, *Differential equations of infinite order; hyper-Dirichlet series and entire functions of bounded index*, Entire Functions and Related Parts of Analysis, Proc. Symp. Pure Math., vol. 11 (J. Korevaar, ed.), Amer. Math. Soc., Providence (1968), p. 298–307.
19. J. J. Macdonnell, *Some convergence theorems for Dirichlet-type series whose coefficients are entire functions of bounded index*, Ph. D. Thesis, Catholic University of America, Washington (1957).
20. F. Nuray, R. F. Patterson, *Multivalence of bivariate functions of bounded index*, *Matematiche*, **70**, № 2, 225–233 (2015); <https://doi.org/10.4418/2015.70.2.14>.
21. R. Roy, S. M. Shah, *The product of two functions of bounded value distribution*, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **17**, № 5, 690–693 (1986).
22. R. Roy, S. M. Shah, *Functions of bounded index, bounded value distribution and v -bounded index*, *Nonlinear Anal.*, **11**, 1383–1390 (1987); [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(87\)90090-3](https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90090-3).
23. S. Shah, *Entire functions of bounded value distribution and gap power series*, *Studies in Pure Mathematics to the Memory of Paul Turán* (P. Erdős, L. Alpár, G. Halász, A. Sárközy, eds.), Birkhäuser, Basel (1983), p. 629–634; https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5438-2_54.
24. M. M. Sheremeta, *On the l -index boundedness of some composition of functions*, *Mat. Stud.*, **47**, № 2, 207–210 (2017); <https://doi.org/10.15330/ms.47.2.207-210>.
25. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publ., Lviv (1999).
26. M. M. Sheremeta, *Generalization of the Fricke theorem on entire functions of finite index*, *Ukr. Math. J.*, **48**, № 3, 460–466 (1996); <https://doi.org/10.1007/BF02378535>.
27. M. M. Sheremeta, M. T. Bordulyak, *Boundedness of the l -index of Laguerre–Polya entire functions*, *Ukr. Math. J.*, **55**, № 1, 112–125 (2003); <https://doi.org/10.1023/A:1025076720052>.

Одержано 16.02.24