УДК 517

А. І. Балінський, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Про дискретні моделі на одномірній решітці з заданою алгеброю Лі симетрій

З використанням найпростішого раціонального розв'язку класичного рівняння Янга — Бакстера, пуассонової реалізації алгебри Лі, відображення моменту і узагальнення L-операторів із конкретних прикладів побудовані пуассонові реалізації класичних $YBZF$-алгебр. Для конкретних зображень груп і алгебр Лі встановлені достатні умови, які забезпечують виконання додаткових обмежень на образ відображення моменту.

С использованием простейшего рационального решения классического уравнения Янга—Бакстера, пуассоновой реализации алгебры Ли, отображения момента и обобщения L-операторов из конкретных примеров построены пуассоновы реализации классических $YBZF$-алгебр. Для конкретных представлений групп и алгебр Ли установлены достаточные условия, обеспечивающие выполнение возникающих при этом ограничений на образ отображения момента.

r-Матричний метод, який виник у рамках методу оберненої задачі розсіювання, є найбільш сучасним і ефективним підходом до систем, які інтегруються [1]. Одержувані при цьому алгебраїчні структури (алгебри Янга—Бакстера—Замолодчикова—Фаддєєва, скорочено $YBZF$-алгебри) лежать в основі класичних чи квантових інтегровних систем. Ці алгебраїчні структури виявились у деякому розумінні всесущими. Вони з'являються і в квантовій теорії поля (теорія струн, конформні теорії поля, точно розв'язувані моделі статистичної фізики), і в теорії груп і алгебр Лі, і в топології (інваріанти вузлів і зчіплень, які одержуються за допомогою розв'язків рівнянь

Янга—Бакстера). На даний час розглянуто різні конкретні моделі як фізичні реалізації абстрактних $YBZF$-алгебр [2, 3]. Тому природньо розглянути і дослідити питання реалізації $YBZF$-алгебр функціями на симплектичному многовиді, на якому задається модель. У даній роботі це питання розв'язується для дискретних моделей на одномірній решітці з заданою алгеброю Лі симетрій.

1. r-Матричний метод і задача класифікації інтегровних дискретних систем. У застосуванні до одномірного дискретного випадку r-матричний метод полягає в наступному. Вводиться допоміжна лінійна задача, яка має вигляд різницевого матричного рівняння

$$\Phi_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)\,\Phi_n(\lambda).$$

Матриця $L\ (\lambda)$, яка відповідає n-й частинці ($n = N_-, \ldots, N_+$), діє в допоміжному векторному просторі V і є функціоналом динамічних змінних в n-му вузлі решітки і функцією спектрального параметра λ. Її називають дискретним L-оператором.

r-Матричний вигляд дужки Пуассона між матрицями $L_n(\lambda)$ означає, що існує матриця $r(\lambda)$,. яка діє в просторі $V \otimes V$, не залежить від динамічних змінних, є розв'язком класичного рівняння Янга—Бакстера і така, що

$$\{L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)\} = [r(\lambda - \mu), \quad L_n(\lambda) \otimes L_m(\mu)]\,\delta_{nm}.$$

Матриця монодромії допоміжної лінійної задачі є впорядкованим добутком L-операторів

$$T_N(\lambda) = L_N(\lambda) \ldots L_k(\lambda) \ldots L_{-N}(\lambda)$$

і також задовольняє вказане вище співвідношення дужки Пуассона. За допомогою інваріантів матриці $T_N(\lambda)$, наприклад $\mathrm{tr}\, T_N(\lambda)$, будується повний набір функціоналів на фазовому просторі системи, які інволютивні відносно заданої симплектичної структури.

На цьому шляху виникає задача класифікації інтегровних дискретних систем. В роботах [2, 3] описується наступний підхід до її розв'язання. r-Матричну дужку Пуассона з фіксованою r-матрицею пропонується розглядати як пуассонову структуру на множині $\mathcal{M}$ матриць, які діють у просторі V і залежать від спектрального параметра λ. L-оператор дозволяє будувати пуассонове відображення із фазового простору в n-му вузлі решітки в множину $\mathcal{M}$, тобто пред'явити на цьому просторі набір функцій з пропонованою квадратичною від полів дужкою. Оскільки симплектичні листи в $\mathcal{M}$ будуть мінімальними пуассоновими підмноговидами, то виникає задача опису інтегрального многовиду конкретних L-операторів з фіксованою залежністю від спектрального параметра для визначеної на множині $\mathcal{M}$ дужки Пуассона. На даний час вказана задача повністю ще не розв'язана.

2. Про раціональні розв'язки класичних рівнянь Янга—Бакстера. Класичне рівняння Янга—Бакстера — це функціональне рівняння відносно матричнозначної мероморфної функції $r(\lambda) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$, яка залежить від змінної $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$[r_{12}(\lambda), r_{13}(\lambda + \mu)] + [r_{12}(\lambda), r_{23}(\mu)] + [r_{13}(\lambda + \mu), r_{23}(\mu)] = 0$$

для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Тут $r_{ij}(\lambda) \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$, $V_1 = V_2 = V_3 = V$, означає ендоморфізм, який діє як $r(\lambda)$ на просторі $V_i \otimes V_j$ і тотожно на третьому просторі. Через те, що вказане рівняння записується в термінах дужки Лі, воно має сенс для $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$-значної функції $r(\lambda)$ з абстрактною алгеброю Лі $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$-значні розв'язки називаються «універсальними», бо з кожним таким розв'язком можна пов'язати розв'язок $(\rho \otimes \rho) r(\lambda) \in \mathrm{End}(V \otimes V)$, де $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ — зображення алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Для скінченномірних комплексних простих алгебр Лі розв'язки класичних рівнянь Янга — Бакстера детально вивчені в роботі [4]. Вони класифіковані як раціональні, тригонометричні та еліптичні.

Розглянемо випадок напівпростих алгебр Лі і відповідні йому найпростіші «універсальні» розв'язки, які не мають полюсів на безмежності. Сформулюємо наступне твердження і опишемо основні моменти його доведення, які будуть потрібні надалі.

Т в е р д ж е н н я [4]. *Нехай* $\mathfrak{g}$ *— напівпроста алгебра Лі над* $\mathbb{C}$, $\{X_i\}_{i=1}^n$ *— її базис,* $\{Y_i\}_{i=1}^n$ *— двоїстий до нього базис відносно форми Кіллінга* K *на* $\mathfrak{g}$. *Тоді* $r(\lambda) = t/\lambda$, *де* $t = \sum_{i=1}^{n} X_i \otimes Y_i$ *є «універсальний» раціональний розв'язок класичного рівняння Янга — Бакстера.*

Д о в е д е н н я. Встановимо спочатку G-інваріантність елемента t (G — зв'язна група Лі, для якої $\mathfrak{g}$ є алгеброю Лі). Нехай $U(\mathfrak{g})$ — універсальна обгортуюча алгебра для алгебри Лі $\mathfrak{g}$ і

$$\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), \quad \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad X \in \mathfrak{g},$$

— діагональний гомоморфізм. Розглянемо універсальний елемент Казиміра $c = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \in U(\mathfrak{g})$ і зобразимо елемент t у вигляді $t = \frac{1}{2}(\Delta(c) - c \otimes 1 - 1 \otimes c)$. Враховуючи належність елемента c центрові алгебри $U(\mathfrak{g})$, неважко переконатись, що t задовольняє інфінітезимальну версію співвідношення G-інваріантності

$$[\Delta(X), t] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Підставляючи тепер вираз $r(\lambda) = t/\lambda$ у ліву частину класичного рівняння Янга—Бакстера, одержуємо

$$(\lambda [t_{12} + t_{13}, t_{23}] + \mu [t_{12}, t_{13} + t_{23}])/\lambda\mu(\lambda + \mu).$$

Вирази в квадратних дужках рівні нулеві внаслідок G-інваріантності елемента t.

3. П у а с с о н о в а р е а л і з а ц і я а б с т р а к т н о ї а л г е б р и Л і [5]. Нехай (M, Ω) — симплектичний многовид, а дія зв'язної групи Лі G на ньому пуассонівська. Така дія групи G задає гомоморфізм її алгебри Лі $\mathfrak{g}$ в алгебру Лі функцій Гамільтона на M. Вона також визначає відображення моменту $J : M \to \mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}^*$ — дуальний до векторного простору $\mathfrak{g}$), $\langle J(m), X \rangle = J_X(m)$, де J_X — функція Гамільтона фундаментального векторного поля, асоційованого з елементом $X \in \mathfrak{g}$.

Відображення J задовольняє таку умову еквіваріантності:

$$J(gm) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} J(m), \quad m \in M, \quad g \in G,$$

де Ad^* — коприєднана дія групи Лі G на $\mathfrak{g}^*$.

Нехай елементові X_i базису алгебри Лі $\mathfrak{g}$ відповідає функція Гамільтона J_{X_i}. Тоді довільному елементу $X = x^i X_i \in \mathfrak{g}$ відповідає функція Гамільтона $J_X = x^i J_{X_i}$. При цьому $J = J_{X_i} X^i$, де $\{X^i\}_{i=1}^n$ — базис векторного простору $\mathfrak{g}^*$, дуальний до базису $\{X_i\}_{i=1}^n$ (тут мається на увазі сумування по індексах, які повторюються).

4. «У н і в е р с а л ь н и й» і н т е г р а л ь н и й м н о г о в и д е л е м е н т а р н и х G-і н в а р і а н т н и х L-о п е р а т о р і в. Припустимо, що зв'язна група Лі G напівпроста і діє зліва пуассоново на зв'язному симплектичному многовиді (M, Ω), а $r(\lambda)$ — «універсальний» G-інваріантний раціональний розв'язок класичного рівняння Янга—Бакстера із п. 2.

Узагальнюючи L-оператори із конкретних прикладів [3], вибираємо елементарний L-оператор в «універсальному» вигляді

$$L(\lambda) = (\lambda I - S)/(\lambda - a),$$

де $a \in \mathbb{C}$,

$$S : M \to \mathfrak{g}, \quad S = K^{\#} J = J_{X_i} Y_i,$$

K — форма Кіллінга на $\mathfrak{g}$, $\{Y_i\}_{i=1}^n$ — базис в $\mathfrak{g}$, дуальний відносно форми Кіллінга до базису $\{X_i\}_{i=1}^n$. При цьому очевидно відображення S має властивість еквіваріантності $S(gm) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} S(m)$.

У запису L-операторів без індекса мається на увазі, що все відноситься до одного вузла решітки.

Визначимо тепер «універсальний» інтегральний многовид таких елементарних L-операторів для фіксованої розв'язком $r(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} X_i \otimes Y_i/\lambda$ класичного рівняння Янга — Бакстера дискретної фундаментальної дужки Пуассона із п. 1.

За означенням для лівої сторони співвідношення дужки Пуассона маємо

$$(\lambda - a)(\mu - a)\{L(\lambda) \otimes L(\mu)\} = \{S \otimes S\} = \sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ij}^k J_{X_k} Y_i \otimes Y_j,$$

де c_{ij}^k — структурні константи алгебри Лі $\mathfrak{g}$ відносно базису $\{X_i\}_{i=1}^n$.

Для правої сторони з використанням G-інваріантності елемента t маємо

$$(\lambda - a)(\mu - a)[r(\lambda - \mu), L(\lambda) \otimes L(\mu)] = -[t, 1 \otimes S] + \frac{1}{\lambda - \mu}[t, S \otimes S].$$

Неважко показати, що

$$-[t, 1 \otimes S] = \sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ij}^k J_{X_k} Y_i \otimes Y_j.$$

Отже, для виконання тотожності дужки Пуассона необхідно вимагати виконання додаткової умови

$$[t, S \otimes S] = 0. \qquad (*)$$

Таким чином, шуканий «універсальний» інтегральний многовид одержується із елементарних L-операторів вигляду $L(\lambda) = (\lambda I - S)/(\lambda - a)$, які задовольняють умову (*).

Перехід від розглядуваних «універсальних» об'єктів до конкретних здійснюється шляхом вибору конкретних алгебр Лі та їх зображень. Нехай, наприклад, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ — незвідне зображення деякої алгебри Лі $\mathfrak{g}$, однозначно продовжене до зображення її обгортуючої алгебри $U(\mathfrak{g})$. Застосування тензорного добутку зображень $\rho \otimes \rho$ до «універсальних» функцій $r(\lambda)$ і $L(\lambda)$ приводить при виконанні умови (*) до матричнозначних функцій, які задовольняють r-матричну фундаментальну дужку Пуассона для дискретних систем, і до конкретного інтегрального многовиду дужки.

Умова (*) для конкретного зображення ρ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ накладає певні обмеження на образ відображення моменту J, тобто виділяє множину коприєднаних орбіт в $\mathfrak{g}^*$, із яких повинен складатися цей допустимий образ. Повний аналіз одержуваного на цьому шляху допустимого образу відображення J являє собою нетривіальну задачу. Однак для конкретних прикладів [3] ефективним є наступне твердження.

Т е о р е м а. *Нехай ρ — зображення напівпростої зв'язної групи Лі G і її алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Якщо існують константи c_1 і c_2 (свої для кожної G-орбіти в M) такі, що*

$$\rho(S(m)) = c_1 I + c_2 \rho(g(m)),$$

де $g(m)$ — деякий елемент групи G, що залежить від точки $m \in M$, то в зображенні ρ виконується умова (*).

Д о в е д е н н я. Із інфінітезимальної версії G-інваріантності елемента t (див. доведення твердження в п. 2) випливає $[t, \exp(X \otimes 1 + 1 \otimes X)] = 0$ $\forall X \in \mathfrak{g}$. Оскільки $\exp(X \otimes 1 + 1 \otimes X) = \exp(X) \otimes \exp(X)$, то елемент t комутує з елементом $g \otimes g$ для кожного $g \in G$. Отже, $[\rho(t), \rho(g) \otimes \rho(g)] = 0$. Виражаючи $\rho(g) = (\rho(S) - c_1 I)/c_2$ і підставляючи в останню рівність, після очевидних перетворень з використанням властивості G-інваріантності елемента t, одержуємо $[\rho(t), \rho(S) \otimes \rho(S)] = 0$.

Н а с л і д о к. *Якщо на кожній орбіті в M виконується тотожність*

$$a_0(\rho(S))^2 + a_1 \rho(S) + a_2 I = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ — свої для кожної орбіти, то в зображенні ρ виконується умова (*).

Д о в е д е н н я. Розклавши в ряд вираз exp $(\rho(S))$ і з використанням даної тотожності виразивши всі члени вище першого степеня у вигляді лінійної комбінації матриць I та $\rho(S)$, можна застосувати теорему.

1. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.— М. : Наука, 1986.— 528 с.
2. *Решетихин Н. Ю., Фаддеев Л. Д.* Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля // Теорет. и мат. физика.— 1983.— **56**, № 3.— С. 323—343.
3. *Решетихин Н. Ю.* Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля. II. Модели с $O(n)$- и $Sp(2k)$-симметрией на одномерной решетке // Там же.— 1985.— 63, № 2.— С. 197—203.
4. *Белавин А. А., Дринфельд В. Г.* О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— **16**, № 3.— С. 1—29.
5. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1989.— 472 с.

Одержано 28.01.92