УДК 517.956

Я. О. Баранецький, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Подібні оператори, породжені нелокальними задачами для еліптичних рівнянь другого порядку

Вивчаються спектральні властивості та властивості L^2-розв'язків нелокальної задачі для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку недивергентного виду, яка є ізоспектральним збуренням задачі Діріхле.

Изучаются спектральные свойства и свойства L^2-решений нелокальной задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка недивергентного вида, которая является изоспектральным возмущением задачи Дирихле.

Нелокальні еліптичні задачі вивчались в [1—7]. При цьому в ході досліджень встановлювалося співвідношення між оператором нелокальної задачі (збуреної) та простішої за структурою рівняння, або крайових умов крайової (незбуреної) задачі. В [6] таким співвідношенням було відношення ізоспектральності. В [7] за допомогою методу подібних операторів вивчались нелокальні задачі для інтегро-диференціальних рівнянь. В даній роботі на основі варіанту методу подібних операторів, який грунтується на симетрійних властивостях області рівняння та крайових умов [8], вивчаються спектральні властивості та умови розв'язності розв'язків нелокальної задачі.

Нехай Q — обмежена область з $\mathbb{R}^{n-1}$ з межею $\Gamma \in C^\infty$, $\Omega=(0,1)\times Q\subset \subset R^n$, $\{\Gamma_p\}_{p=1}^q$ — набір многовидів з Ω дифеоморфних Q; $a_{i,j}(x)$, $a(x)\in \in C^\infty(\Omega)$, $a_{i,j}=a_{j,i}\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $i,j=\overline{1,n}$. Припустимо, що поверхня Γ_p задана рівнянням $x_1=\varphi_p(x')$, $x=(x_1,x')$, $x_1\in(0,1)$, $x'\in Q$ і задано

$$b_p(x)\in C^\infty(\overline{\Gamma}_p),\ b_p(x)=0,\quad x\in\partial\Omega\cap\Gamma_p,\quad p=\overline{1,q}.$$

Через $H^s(\Omega)$ позначимо простір Соболєва ($2s\in\mathbb{Z}_+$, $s\geqslant 0$). В $H^2(\Omega)$ задаємо норму, індуковану скалярним добутком

$$(u,v)_{H^2(\Omega)}=(u,v)_{L^2(\Omega)}+(\Delta u,\Delta v)_{L^2(\Omega)},\ \Delta\overset{\text{df}}{=}\sum_{i=1}^{n}\frac{d^2}{\partial x_1^2}.$$

Нехай $B: H^2(\Omega)\to H^{3/2}(Q)$ — оператор вигляду

$$Bu\overset{\text{df}}{=}\sum_{i=1}^{q}b_i(\gamma_i(x'),x')\,u(\gamma_i(x'),x'),\quad x'\in\overline{Q},\quad u\in H^2(\Omega),$$

$$W \overset{\text{df}}{=} L^2(\Omega) \oplus H^{3/2}(S) \oplus H^{3/2}(Q) \oplus H^{3/2}(Q)$$

— гільбертів простір з нормою

$$\|F\|_W^2 = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{H^{3/2}(S)} + \|\varphi_0\|^2_{H^{3/2}(Q)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{3/2}(Q)},$$

$$F = (f, \varphi, \varphi_0, \varphi_1) \in W, \quad S = (0, 1) \times \partial Q.$$

Розглянемо в області Ω нелокальну задачу

$$\mathcal{L}u \overset{\text{df}}{\equiv} -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + a(x) u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$lu \equiv u|_{x\in S} = \varphi, \tag{2}$$

$$l_B^i u = u|_{x_1=i} + Bu = \varphi_i, \quad x' \in \overline{Q}, \quad i = 0, 1, \tag{3}$$

$$Bu \overset{\text{df}}{=} \sum_{j=1}^{q} b_j(x) u(x)|_{x \in \Gamma_j}.$$

Розв'язком задачі (1) — (3) будемо називати функцію $u \in H^2(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (1) в розумінні рівності функцій в $L^2(\Omega)$, та умови (2), (3) в розумінні рівності функцій $H^{3/2}(S)$ та $H^{3/2}(Q)$ відповідно.

Через L_B позначимо оператор задачі (1) — (3), $L_B u \overset{\text{df}}{=} \mathcal{L}u$, $u \in D(L) = \{v \in H^2(R) : lu = 0,\ l_B^0 u = l_B^1 u = 0\}$.

Власним значенням L_B будемо називати таке число $\lambda \in \mathbb{C}$, при якому існує нетривіальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = \lambda u$ з $D(L_B)$, а сам розв'язок — власна функція.

Через $\sigma(L_B)$ позначимо множину власних значень занумерованих в порядку неспадання абсолютних значень $|\lambda_m|$, через $v(L_B)$ — систему власних функцій оператора L_B.

Легко бачити, що при $b_j \equiv 0$, $j = \overline{1, q}$, тобто $B = 0$, однорідні умови (2), (3) є умовою Діріхле

$$u|_{x \in \partial\Omega} = \tilde{\varphi}. \tag{4}$$

Оператор задачі Діріхле (1), (4) позначимо через L_0.

Система функцій $(h_m)_{m=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ називається базою Ріса цього простору, якщо знайдеться лінійний оператор $\Phi : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, неперервний разом з оператором Φ^{-1} такий, що $(\Phi h_m)_{m=1}^{\infty}$ є ортонормованою базою в $L_2(\Omega)$.

Наведемо припущення, при яких будуть сформульовані основні результати роботи:

А) рівняння (1) рівномірно еліптичне

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j\Big| \geqslant \text{const} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

В) $a_{i,j}(x_1, x') \equiv a_{i,j}(1 - x_1, x')$, $a(x_1, x') \equiv a(1 - x_1, x')$, $b_p(x_1, x') \equiv b_p(1 - x_1, x')$, $\gamma_p(x_1, x') \equiv 1 - \gamma_{q+1-p}(x_1, x')$, $i, j = \overline{1, n}$; $p = \overline{1, q}$, $a(x) > 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення* А, В. *Тоді для довільних* $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^{3/2}(S)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in H^{3/2}(Q)$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1) — (3) *і виконується нерівність*

$$c_{1,B} \|F\|_W \leqslant \|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_{2,B} \|F\|_W, \qquad F = (f, \varphi, \varphi_0, \varphi_1) \in W. \tag{5}$$

Теорема 2. *В умовах теореми 1 власні значення операторів* L_B *та* L_0 *співпадають*: $\sigma(L_B)=\sigma(L_0)$ *і система* $V(L_B)$ *оператора* L_B *утворює базу Ріса простору* $L^2(\Omega)$.

Доведемо теорему 1. З припущень на коефіцієнти рівняння $\mathscr{L}u=f$ випливає, що оператор L_0 $(b_p\equiv 0,\ p=\overline{1,q})$ самоспряжений і тому з результатів [9, 11] випливає така лема.

Лема 1. *Нехай* $b_p\equiv 0$, $p=\overline{1,q}$, *і виконуються умови* 2, A. *Тоді для задачі* (1) — (3) *справедливе твердження теореми* 1.

У цьому випадку позначимо відповідно через $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ константи в нерівності (5).

Нехай E — тотожний оператор, $Jv(x_1,x')\equiv v(1-x_1,x')$; $\pi_\pm v(x)=$ $=\frac{1}{2}(E\pm J)v(x)$ — ортопроектори в $L^2(\Omega)$, тобто $\pi_+\pi_-=\pi_-\pi_+=0$, π_++ $+\pi_-=E$. Ці ортопроектори індукують розклади

$$H^2(\Omega)=H^2_+(\Omega)\oplus H^2_-(\Omega),\quad L^2(\Omega)=L^2(\Omega)\oplus L^2_-(\Omega),\quad L^2(S)=L^2_-(S)\oplus L^2_-(\Omega),$$

де

$$H^2_\pm(\Omega)=\pi_\pm H^2(\Omega),\quad L^2_\pm(\Omega)=\pi_\pm L^2(\Omega),\quad L^2_\pm(S)=\pi_\pm L^2(S).$$

Зведемо умови (3) до еквівалентних

$$\tilde{l}^0_B u \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2}(l^0_B+l^1_B)u=\tilde{\varphi}^0_1\ \tilde{l}'_B u=\frac{1}{2}(l^0_B-l'_B)u=\tilde{\varphi}^1,$$

$$\tilde{l}^0_B u=\frac{1}{2}(u|_{x_1=0}+u|_{x_1=1})+Bu,\ \tilde{l}^1_B u=\frac{1}{2}(u|_{x_1=0}-u|_{x_1=1}). \tag{6}$$

З припущення В випливає

$$\mathscr{L}H^2_\pm(\Omega)\subset L^2_\pm(\Omega),\quad lH^2_\pm\subset L^2_\pm(S),\quad BH^2_\pm(\Omega)=0.$$

Тому, підставляючи в (1), (2), (6) розклади $u=u_+\oplus u_-$, $f=f_+\oplus f_-$, $\varphi=\varphi_+\oplus\varphi_-$, отримуємо дві задачі вигляду

$$\mathscr{L}u_-=f_-,\quad lu_-=\varphi_-,\quad u_-|_{x_1=0}+u_-|_{x_1=1}=0,\quad u_-|_{x_1=0}-u_-|_{x_1=1}=\tilde{\varphi}', \tag{7_1}$$

$$\mathscr{L}u_+=f_+,\quad lu_+=\varphi_+,\quad u_+|_{x_1=0}+u_+|_{x_1=1}=\tilde{\varphi}^0-Bu_-,\ u_+|_{x_1=0}-u_+|_{x_1=1}=0. \tag{7_2}$$

В силу співвідношень (6) кожна з цих задач еквівалентна задачі Діріхле, тому з леми 1 випливає існування та єдиність розв'язків задач (7_1), (7_2), а отже і (1) — (3) та нерівності (5) при $c_{L,B}=c_{i,0}$, $u=u_\pm$, $F=F_\pm$, $F_-\overset{\mathrm{df}}{=}(f_-,\tilde{\varphi}_-,0,\tilde{\varphi}')$, $F_+(f_+,\tilde{\varphi}_+,\tilde{\varphi}^0-Bu_-,0)$,

$$c_{1,0}\|F_\pm\|_W\leqslant\|u_\pm\|_{H^2(\Omega)}\leqslant c_{2,0}\|F_\pm\|_W. \tag{8}$$

Враховуючи припущення A та B, можна показати, що

$$\|Bu\|_{H^{3/2}(Q)}\leqslant c(B)\|u\|_{H^2(\Omega)}. \tag{9}$$

Використовуючи нерівності (8), (9), одержуємо нерівність (5) при $c_{1,B}=$ $=c_{1,0}(1+c(B))$, $c_{2,B}=c_{2,0}(1+c_{2,0}c(B))$. Теорема доведена.

Для доведення теореми 2 розглянемо допоміжну нелокальну задачу

$$-\Delta v=g,\quad lv=\psi,\quad l^i_P v\equiv v|_{x_1=i}+Pv=\psi^i, \tag{10}$$

де $P=H^2(\Omega)\to L^2(Q)$.

Лема 2. *Нехай* $P:H^2(\Omega)\to H^{3/2}(Q)$ *— неперервний оператор і* $PH^2_+(\Omega)=0$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (10) *і справедлива апріорна оцінка при* $\Psi=(g,\psi,\psi^0,\psi')\in W$

$$c_{1,P}\|\Psi\|_W\leqslant\|v\|_{H^2(\Omega)}\leqslant c_{2,P}\|\Psi\|_W. \tag{11}$$

Доведення умови теореми 1 на коефіцієнти рівняння (10) виконується автоматично. В доведенні теореми 1 для задачі (1)—(3) умови 3 та В використовувались, щоб одержати ті властивості оператора B, які для оператора P ми припускаємо. Тому можна повторити для доведення леми 2 всі міркування теореми 1.

Нехай $A_P(A_0)$ — оператор задачі (10) (відповідно при $P=0$).

Теорема 3. *Нехай оператор P задовольняє умову леми 2. Тоді оператор A має такі ж власні значення, що й оператор A_0:*

$$\mu_{m,k} = \pi^2 m^2 + \xi_k, \quad m, k = \overline{1, \infty}, \tag{12}$$

де $\xi_k > 0$ — власні значення оператора $C: Ch = -\Delta h$, $h \in D(C) = \{h \in L^2(Q), h|_{\partial Q} = 0\}$. Система $V(A_P)$ власних функцій цього оператора утворює базу Ріса в просторі $L^2(\Omega)$.

Доведення. Неважко показати, що оператор A_0 має власні значення (12) та відповідні власні функції

$$v_{m,k}(A_0) = \sqrt{2}\sin \pi m x_1 \cdot g_k(x'), \quad m, k = \overline{1, \infty},$$

де $g_k(x')$ — власна функція, яка відповідає власному значенню ξ_k оператора задачі Діріхле

$$-\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g(x') = \lambda g(x'), \quad g|_{\partial G} = 0.$$

При цьому $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ пронумеровані в порядку неспадання.

Система $V(A_0)$ є об'єднанням $V_+(A_0)$ та $V_-(A_0)$, які є ортонормованими базами відповідно в $L_+^2(\Omega)$ та $L_-^2(\Omega)$

$$V_-(A_0) = \{v_{2l,k}(A_0) \in V(A_0), \quad l, k = \overline{1, \infty}\},$$

$$V_+(A_0) = \{v_{2l-1,k}(A_0) \in V(A_0), \quad l, k = \overline{1, \infty}\}.$$

З умов на оператор P випливає, що функції з $V_+(A_P)$ належать $D(A_0)$, тобто $V_+(A_P) = V_+(A_0)$. Функції з $V_-(A_P)$ шукаємо у вигляді

$$v_{2l,k}(A_P) = v_{2l,k}(A_0) + c_{l,k}(x')\sqrt{2}\cos 2\pi l x_1 g_k(x'),$$

де параметри $c_{l,k}(x')$ визначаються з умов $l_P^i v_{2l,k} = 0$. Після обчислень одержимо

$$c_{l,k}(x') = -\sqrt{2} B \sin 2\pi l x_1, \quad x' \in Q, \quad l, k = \overline{1, \infty}.$$

Отже,

$$v_{m,k}(A_P) = \begin{cases} v_{2l-1,k}(A_0), \quad m = 2l-1, \quad l, k = \overline{1, \infty}; \\ v_{2l,k}(A_0) - \sqrt{2}(B \sin 2\pi l x_1)\cos 2\pi l x_1 g_k(x'); \\ m = 2l, \quad l, k = \overline{1, \infty}. \end{cases} \tag{13}$$

Для закінчення доведення теореми 3 треба показати, що система $V(A_P)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$.

Лема 3. *Система $V(A_P)$ повна та мінімальна в $L^2(\Omega)$.*

Покажемо повноту (тотальність) $V(A_P)$, оскільки в гільбертовому просторі ці означення співпадають.

Нехай $h \in L^2(\Omega)$ задовольняє співвідношення

$$(h, v_{m,k}(A_P))_{L^2(\Omega)} = 0. \tag{14}$$

З повноти (тотальності) системи $V_+(A_0)$ в $L_+^2(\Omega)$ та зображень (13) маємо $h \in L_-^2(\Omega)$. Але тоді

$$(h, v_{2l,k}(A_P))_{L^2(\Omega)} = (h, v_{2l,k}(A_0))_{L^2(\Omega)}, \quad l, k = \overline{1, \infty}.$$

Тому, із співвідношення (14) та властивостей $V_{-}(\bar{A}_0)$ в $L^2_{-}(\Omega)$ маємо $h(x)\equiv 0$.

Для доведення мінімальності побудуємо систему $G(\bar{A}_p)$ функцій, біортогональну системі $V(\bar{A}_p)$, в розумінні

$$(g_{r,s}(A_P), v_{m,k}(A_P))_{L^2(\Omega)} = \delta_{r,m}\delta_{s,k}, \quad r, s, m, k = \overline{1, \infty}. \qquad (15)$$

Елементи цієї системи шукаємо у вигляді

$$g_{r,s}(A_P) = v_{r,s}(A_0) + \sum_{j,p=1}^{\infty} c^{j,p}_{r,s} \cos\pi(2j-1)x_1 g_p(x'), \qquad (16)$$

$$r, m, k, s = \overline{1, \infty}.$$

Підставляючи (16) в (15), одержуємо

$$c^{j,p}_{r,s} = \begin{cases} 0, & r = 2i; \\ \alpha_{l,r,j} \int\limits_Q \overline{c_l(x')}\, g_p(x')\, g_s(x')\, dx', & r = 2i-1, \end{cases}$$

$$\alpha_{l,r,j} = \frac{2r-1}{2l}\,\frac{4l^2-(2j-1)^2}{(2r-1)^2-4l^2}, \quad i, l, p, s = \overline{1, \infty}.$$

Лема 3 доведена.

Покажемо, що система $V(A_P)$ утворює базу Ріса.

Зауважимо, що елементи $v_{2l,k}(\bar{A}_0)$ та $c_l(x')\cos\pi 2jx_1 g_r(x')$ ортогональні. Більше того, оператор $U_P: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$, визначений співвідношенням

$$U_P v_{m,k}(A_0) = v_{m,k}(A_P), \quad m, k = \overline{1, \infty},$$

є сумою оператора тотожного перетворення E в $L^2(\Omega)$ та оператора F_P, $U_P = E + F_P$, де $F_P: L^2_{+}(\Omega)\to 0$, $F_P L^2_{-}(\Omega)\to L^2_{+}(\Omega)$, тобто $FF = 0$, $U_P = E - F_P$.

Тому для доведення факту, що $V(A_P)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$, в силу теореми Н. К. Барі [11] досить показати, що $U^* = E + F^*$ — обмежений оператор в $L^2(\Omega)$. Отже,

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} |(U_P^* f, v_{l,k}(A_0))_{L^2(\Omega)}|^2 = \sum_{l,k=1}^{\infty} |(f, v_{l,k}(A_P))_{L^2(\Omega)}|^2 \leqslant \|f\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{l,k=1}^{\infty} \Big|\int\limits_Q f_l(x')\,\overline{c_l(x')}\,\overline{g_k(x')}\,dx'\Big|^2 \leqslant \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \max_l \|c_l(x')\|^2_{L^2(\Omega)} \times$$

$$\times \sum_{l,k=1}^{\infty} \int\limits_Q |f_l(x')\,g_k(x')|^2\,dx' \leqslant (1+\max_l \|c_l(x')\|^2_{L^2(\Omega)}) \sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\|^2_{L^2(Q)} \overset{\mathrm{df}}{=} c(P)\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Тут $f_l(x') = \int\limits_0^1 f(x)\sqrt{2}\cos 2\pi l x_1 dx_1 \in L^2(Q)$, $l = \overline{1, \infty}$. Теорема 3 доведена повністю. Будемо говорити, що оператори L_0 та L_B подібні, якщо існує неперервний разом з оберненим оператор $U_B: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$, $U_B D(L_0) = D(L_B) \subset H^2(\Omega)$ такий, що $L_B = U_B L_0 U_B^{-1}$.

Лема 4. *Твердження теореми 2 справедливе тоді і лише тоді, коли оператори L_B та L_0 подібні.*

Доведення. Необхідність. Покладемо

$$U_B v_{m,k}(L_0) \overset{\mathrm{df}}{=} v_{m,k}(L_B), \quad m, k = \overline{1, \infty}.$$

Тоді в силу теореми Н. К. Барі [11] U_B, U_B^{-1} — неперервні перетворення простору $L^2(\Omega)$ і $U_B: D(L_0)\to D(L_B)$.

В просторі $H^2(\Omega)$ за допомогою операції $\mathscr{L}$ можна вибрати скалярний добуток $\langle u, v\rangle_{H^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\mathscr{L}u, \mathscr{L}v)_{L^2(\Omega)}$, еквівалентний вихідному $(u, v)_{H^2(\Omega)}$. При цьому системи $V(L_0), V(L_B)$ стануть безумовними базами в $D(L_0)$ та $D(L_B)$ і в силу теореми Лорча [11] одночасним стиском (множенням функцій $v_{m,k}(L_0)$ та $v_{m,k}(L_B)$ відповідно на $\lambda_{m,k}^{-1}$) можна перейти до баз Ріса $\hat{V}(L_0)$ в $D(L_0)$ та $\hat{V}(L_B)$ в $D(L_B)$; $U_B: \tilde{V}(L_0) = V(L_B)$. Отже, U_B — перетворення подібності операторів L_0 та L_B.

Достатність випливає з означення подібності, визначення оператора $U_B: V(L_0) \to V(L_B)$, самоспряженості L_0 та теореми Н. К. Барі [11].

Як наслідок з цієї леми та теореми 3 випливає така лема.

Лема 5. *Твердження теореми 3 справедливе тоді і лише тоді, коли A_P та A_0 подібні.*

Знайдемо зв'язок між операторами A_0 та L_0. Оскільки $D(A_0) = D(L_0) \subset H^2(\Omega)$, системи $V(A_0)$, $V(L_0)$ є ортонормованими базами в $L^2(\Omega)$, безумовними базами в $D(L_0) \subset H^2(\Omega)$, $0 < \text{const} < \lambda_{m,k}/\mu_{m,k} < \text{const} < \infty$, то оператор $Z: Zv_{m,k}(L_0) = v_{m,k}(A_0)$ є неперервним в нормі просторів $L^2(\Omega)$ та $H^2(\Omega)$, $m, k = \overline{1, \infty}$.

Продовжимо Z з $D(L_0)$ на $H^2(\Omega)$ враховуючи, що на довільній $h \in H^2(\Omega)$ задано як на функції з $L^2(\Omega)$. Визначимо також оператор $R: D(A_p) \to D(A_0)$; $L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Rv_{m,k}(A_0) = \lambda_{m,k}\mu_{m,k}^{-1}v_{m,k}(A_0).$$

Тоді

$$L_0v_{m,k}(L_0) = \lambda_{m,k}v_{m,k}(L_0) = Z^{-1}\lambda_{m,k}v_{m,k}(A_0) = Z^{-1}R\mu_{m,k}v_{m,k}(A_0) =$$
$$= Z^{-1}RA_0v_{m,k}(A_0) = Z^{-1}RA_0Zv_{m,k}(A_0).$$

Отже,

$$L_0 = Z^{-1}RA_0Z. \qquad (16')$$

Зауважимо, що в силу умови B підпростори $H^2_\pm(\Omega)$ є інваріантними для кожного з операторів Z, R, L_0, A_0.

Лема 6. *Оператор Z відображає множину* $\operatorname{Ker}(\mathscr{L} - \lambda_{m,k})$ *в* $\operatorname{Ker}(-\Delta - \mu_{m,k}) \subset H^2$, $m, k = \overline{1, \infty}$.

Доведення. Нехай $h \in \operatorname{Ker}(\mathscr{L} - \lambda_{m,k})$. Зобразимо $h = h_1 + h_2 + h_3$, де $h_3 \in \operatorname{Ker}\mathscr{L}$, $h_1 \in S^L_{m,k}$ — власний простір, який відповідає $\lambda_{m,k}$, $h_2 \in D(L_0) \ominus \operatorname{Ker}\mathscr{L} \ominus S^L_{m,k}$. За означенням оператора Z $\forall f \in \operatorname{Ker} L\ \exists w(f) \in \operatorname{Ker}(-\Delta)$, що $Zf = w(f)$, $ZS^L_{m,k} = S^A_{m,k}$, $m, k = \overline{1, \infty}$.

Нехай $h_2 = \sum_{p,r=1}^{\infty}{}' h_{p,r}v_{p,r}(L_0)$, де штрих означає сумування по p, r, при яких $\lambda_{p,r} \neq \lambda_{m,n}$. Тоді

$$(\mathscr{L} - \lambda_{m,k})h_2 = (L_0 - \lambda_{m,k})h_2 = \sum_{p,r=1}^{\infty}{}'(\lambda_{p,r} - \lambda_{m,k})h_{p,r}v_{p,r}(L_0) = (A_0 - \mu_{m,k})Z^{-1}f,$$

$$f = \sum_{p,r=1}^{\infty}{}'(\lambda_{p,r} - \lambda_{m,n})(\mu_{p,r} - \mu_{m,n})^{-1}h_{p,r}v_{p,r}(A_0).$$

Побудуємо систему власних функцій $V(L_B) = \{v_{m,k}(L_B)\}_{m,k=1}^{\infty} \subset H^2(\Omega)$ оператора L_B, де

$$v_{m,k}(L_B) = v_{m,k}(L_0) + \hat{v}_{m,k}(L_B), \quad m, k = 1, 2, \dots \qquad (17)$$

При $m = 2j - 1$ функції $v_{m,k}(L_0)$ задовольняють однорідні умови (2), (3), тому покладемо

$$\lambda_{m,k}(L_B) \overset{\text{df}}{=} \lambda_{m,k}(L_0),$$

$$v_{m,k}(L_B) \overset{\text{df}}{=} v_{m,k}(L_0), \quad m = 2j - 1, \quad j, k = \overline{1, \infty}.$$

Нехай $w_{m,k,r}(x_1) = (\exp\gamma^r_{m,k}x_1 + \exp\gamma^r_{m,k}(1 - x_1))\,g_k(x')$, де $\gamma^r_{m,k}$ — корінь рівняння $-\gamma^2+\xi_k=\lambda_{m,k}$ з півплощинами

$$\operatorname{Re}\gamma\leqslant 0,\quad h_{m,k,r}(x)\overset{\mathrm{df}}{=}Z^{-1}w_{m,k,r}(x),\quad m,k,r=\overline{1,\infty}.$$

З леми 6 випливає $h_{m,k,r}\in\operatorname{Ker}(\mathscr{L}-\lambda_{m,k})$. Тому функцію $\hat{v}_{m,k}(L_B)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\hat{v}_{m,k}(L_B)=\sum_{r=1}^{\infty}c^r_{m,k}h_{m,k,r}(x),\quad m=2j,\quad j,k=\overline{1,\infty}.\tag{18}$$

Підставляючи (17), (18) в однорідні умови (3), знаходимо

$$c^r_{m,k}=(1+\exp\gamma^r_{m,k})^{-1}(Bv_{m,k}(L_0),Z^{-1}g_r(x'))_{L^2(Q)}.\tag{19}$$

Використовуючи асимптотику $\gamma^r_{m,k}$ при $r\to\infty$, можна показати, що $\hat{v}_{m,k}(L_B)$ належить $H^2(\Omega)$, отже $v_{m,k}(L_B)$ є власною функцією цього оператора і $\sigma(L_B)=\sigma(L_0)$.

Аналогічно доведенню теореми 3 доводиться, що система $V(L_B)$ повна та мінімальна в $L^2(\Omega)$. Запишемо зображення (18), (19) в іншому вигляді. Можна переконатися, що функція $v_{m,k}(L_B)$ вигляду (17) при

$$v_{m,k}(L_0)=c^B_{m,k}(x')\,h_{m,k,k}(x'),\quad m=2j,\tag{20}$$

де $c^B_{m,k}=-h^{-1}_{m,k,k}(0,x')\,Bv_{m,k}(L_0)$ належить $D(L_B)\cap\operatorname{Ker}(\mathscr{L}-\lambda_{m,k})$, тобто є власною функцією оператора L_B.

Для повного доведення теореми 2 залишилось показати, що $V(L_B)$— база Ріса в $L^2(\Omega)$.

Покладемо в (10) $P=BZ^{-1}$ і по аналогії з (16′) побудуємо зображення $L_B=\tilde{Z}^{-1}\tilde{R}A_P\tilde{Z}$, де $L_B=U_BL_0U_B^{-1}$, $A_P=U_PA_0U_P^{-1}$.

Поклавши $\tilde{Z}=Z$, одержуємо $\tilde{R}_B=U_PR_PU_P^{-1}$,

$$U_B=Z^{-1}U_PZ.\tag{21}$$

Цей оператор в силу властивостей операторів Z та U_P є неперервним разом з U_B^{-1} в $L^2(\Omega)$. Тому, застосовуючи теорему Н. К. Барі [11], маємо $V(L_B)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$. Теорема 2 доведена.

Зауваження. Аналогічно при певних обмеженнях на коефіцієнти вивчаються властивості оператора M_B, породженого в $H^1(\Omega)$ рівнянням

$$\mathcal{M}u=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}u+\sum_{j=1}^{n}a_j\frac{\partial}{\partial x_j}u+a_0u=f$$

та умовами (3).

1. *Антоневич А. Б., Добрушкин В. А.* Общая краевая задача для эллиптических систем с отклоняющимся аргументом // Докл. АН БССР.— 1973.— **17**, № 6.— С. 491—493.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.— 1969.— **185**, № 4.— С. 739—740.
3. *Кордзадзе Р. А.* Общая краевая задача со сдвигом для эллиптического уравнения второго порядка // Там же.— 1964.— **155**, № 4.— С. 739—742.
4. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrals etse applications // Verh. Intern. Math. Kongr.— Zurich, 1932.— P. 135—151.
5. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Мат. сб.— 1982.— **117**, № 1.— С. 548—558.
6. *Баранецкий Я. Е.* Краевая задача для дифференциально-операторных уравнений четного порядка // Методы исслед. дифференц. и интегр. операторов.— Киев, 1989.— С. 13—18.
7. *Баскаков А. Г., Кацаран Г. К.* Спектральный анализ интегродифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения.— 1988.— **24**, № 8.— С. 1424—1433.
8. *Бассоти Л.* Линейные операторы, T-инвариантные относительно некоторой группы гомеоморфизмов // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, № 1.— С. 57—85.
9. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 372 с.

10. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
11. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1965.— 448 с.
12. *Brouder R. F.* Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math.— 1964.— **86**, N 4.— P. 735—758.

Одержано 17.06.92