УДК 517.958

О. М. Боценюк, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Про розв'язність початково-крайової задачі для системи півлінійних рівнянь магнітопружності

Для системи півлінійних рівнянь магнітопружності одержана теорема існування. Встановлено асимптотичну поведінку розв'язків за часом.

Для системы полулинейных уравнений магнитоупругости получена теорема существования. Установлено асимптотическое поведение решений по времени.

Розглянемо електропровідне неферомагнітне однорідне ізотропне пружне тіло, що займає в початковий момент часу область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ і знаходиться під дією постійного за часом магнітного поля $B_0(x)$. Нехай вектори b і u в $\mathbb{R}^3$ позначають відповідно збурення магнітного поля і переміщення в Ω. Якщо не враховувати струмів зміщення, то взаємний вплив поля деформацій і магнітного поля описується системою рівнянь [1, с. 41]

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta b - \operatorname{rot}\left[\frac{\partial u}{\partial t} \times (B_0 + b)\right] = 0, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u - \frac{1}{\mu_0}[\operatorname{rot} b \times (B_0 + b)] = f, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} b = 0, \quad \operatorname{div} B_0 = 0, \quad \operatorname{rot} B_0 = 0. \tag{3}$$

Тут σ — провідність середовища, μ_0 — магнітна проникливість вакууму, ρ — густина середовища, λ і μ — сталі Ляме, f — задана зовнішня сила. Припустимо, що σ, ρ, λ, μ не залежать від x і t. Будемо вважати, що Ω — обмежена область з гладкою межою Γ і $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $Q = \Omega \times]0, T[$. Розглядається початково-крайова задача для системи рівнянь (1)—(3) в Q із початковими і крайовими умовами

$$b(x, 0) = b_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$n \cdot b = 0, \quad n \times \operatorname{rot} b = 0, \quad u = 0 \text{ на } \Sigma, \tag{5}$$

де n — одиничний вектор нормалі до межі Γ.

1. Означення. Позначимо через $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$ скалярний добуток і норму в $(L^2(\Omega))^3$, а через $((\cdot, \cdot))_s$, $\|\cdot\|_s$ скалярний добуток і норму в $(H^s(\Omega))^3$, $s \in \mathbb{R}$.

Нехай $\mathcal{W} = \{\varphi \mid \varphi \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^3, \operatorname{div}\varphi = 0, n\cdot\varphi = 0 \text{ на } \Gamma\}$. Покладемо $(s \geqslant 0)$ W_s=замикання $\mathcal{W}$ в $(H^s(\Omega))^3$. W_s є гільбертів простір із скалярним добутком $((\cdot, \cdot))_s$, індукованим із $(H^s(\Omega))^3$. Введемо допоміжний простір $E(\Omega) = \{u \mid u \in (L^2(\Omega))^3, \operatorname{div} u \in L^2(\Omega)\}$. Для функції $u \in E(\Omega)$ можна означити значення на Γ її нормальної компоненти [2]. Означимо простори

$$H = \{\varphi \mid \varphi \in (L^2(\Omega))^3, \quad \operatorname{div}\varphi = 0, \ n\cdot\varphi = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$W = \{\varphi \mid \varphi \in (H^1(\Omega))^3, \quad \operatorname{div}\varphi = 0, \quad n\cdot\varphi = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

Простір H наділяється скалярним добутком і нормою із $(L^2(\Omega))^3$. В просторі W вводиться скалярний добуток і норма $((\varphi, \psi)) = (\operatorname{rot}\varphi, \operatorname{rot}\psi)$, $|\varphi|^2 = ((\varphi, \varphi))$. Із теореми 6.1 в [3] (розділ 7) випливає існування константи $d > 0$ такої, що $|\operatorname{rot}\varphi| \geqslant d\|\varphi\|_1$, $\varphi \in W$. Це означає, що норми $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_1$ на W еквівалентні. Відзначимо ще, що $W_1 = W$, $W_0 = H$, і, ототожнюючи H і H' (штрих позначає спряжений простір) для $s > 1$, маємо $W_s \subset W \subset H \subset W' \subset W'_s$, де кожний простір неперервно і щільно вкладений в наступний.

Означимо форми

$$a_1(\varphi, \psi) = \frac{1}{\sigma\mu_0}\int_\Omega \operatorname{rot}\varphi \cdot \operatorname{rot}\psi dx, \quad \varphi, \psi \in (H^1(\Omega))^3,$$

$$a_2(\varphi, \psi) = \mu\int_\Omega \operatorname{rot}\varphi \cdot \operatorname{rot}\psi dx + (\lambda + 2\mu)\int_\Omega \operatorname{div}\varphi \cdot \operatorname{div}\psi dx, \quad \psi, \psi \in (H^1(\Omega))^3,$$

$$d(\varphi, \psi, \chi) = \int_\Omega (\varphi \times \psi)\operatorname{rot}\chi dx, \quad \varphi, \psi, \chi \in (C^1(\overline{\Omega}))^3.$$

Надалі замість X^n, $\partial f/\partial t$ будемо писати X, f', де X — функціональний простір, n — розмірність простору $\mathbb{R}^n$.

2. Слабке формулювання задачі. Припустимо, що $\{b, u\}$ — класичний розв'язок задачі (1)—(5), скажімо b, $u \in C^2(\overline{Q})$, і $B_0 \in C^1(\overline{\Omega})$. Тоді легко перевірити, що виконуються рівності

$$\frac{d}{dt}(b, \varphi) + a_1(b, \varphi) + d(B_0 + b, u', \varphi) = 0, \quad \forall\varphi \in W_{3/2}, \tag{6}$$

$$\rho\frac{d}{dt}(u', \psi) + a_2(u, \psi) - \frac{1}{\mu_0}d(B_0 + b, \psi, b) = (f, \psi) \quad \forall\psi \in H_0^1(\Omega). \tag{7}$$

Доведемо обернене твердження, якщо b, $u \in C^2(\overline{Q})$ задовольняють (6), (7), (3) і $n \cdot b = 0$, $u = 0$ на Σ, то b, u задовольняють рівняння (1), (2) і крайову умову $n \times \operatorname{rot} b = 0$ на Σ. Відзначимо, що рівність (6) справедлива і для $\varphi = \operatorname{grad} p + q$, $p \in H^2(\Omega)$, $q \in W$. Але будь-який елемент $\varphi \in H^1(\Omega)$ можна подати в такому вигляді (див. [2], теорема 1.5, розділ 1). Отже, рівність (6) справедлива для всіх $\varphi \in H^1(\Omega)$. Із (6) одержуємо

$$(g, \varphi) - \frac{1}{\sigma\mu_0}\int_\Gamma (n \times \operatorname{rot} b)\varphi d\gamma = 0 \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega),$$

де $g = b' + \dfrac{1}{\sigma\mu_0}\operatorname{rot}\operatorname{rot} b + \operatorname{rot}[(B_0 + b) \times u']$.

Звідси випливає, що $g = 0$ і $n \times \operatorname{rot} b = 0$ на Σ. Таким чином, наше твердження доведено.

За допомогою теореми вкладення Соболєва і нерівності Гельдера доводиться таке твердження.

Твердження 1. *Трилінійна форма d є неперервною на $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^{3/2}(\Omega)$, $H^{1/2}(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ і справедливі оцінки* $|d(\varphi, \psi, \chi)| \leqslant c\|\varphi\|_1 |\psi| \|\chi\|_{3/2}$, $|d(\varphi, \psi, \chi)| \leqslant c\|\varphi\|_{1/2}\|\psi\|_1\|\chi\|_1$.

Надалі через c будемо позначати різні додатні сталі.

Означимо лінійні оператори $A_1 : W \to W'$, $A_2 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ і білінійні оператори $D_1 : H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to W'_{3/2}$, $D_2 : H^{1/2}(\Omega) \times H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ через рівності

$$\langle A_1 u, v\rangle = a_1(u, v) \quad \forall v \in W, \ \langle A_2 u, v\rangle = a_2(u, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\langle D_1(u, v), w\rangle = d(u, v, w) \quad \forall w \in W_{3/2}, \quad \langle D_2(u, v), w\rangle = d(u, w, v) \ \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Дамо тепер слабке формулювання задачі (1) — (5).

Задача 1. *Для заданих $f, B_0, b_0, u_0, u_1 : f \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, $B_0 \in H^1(\Omega)$, $b_0 \in H$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ знайти функції b і u, що задовольняють*

(6), (7) в $\mathscr{D}'(]0, T[)$ і умови

$$b \in L^2(0, T; W) \cap L^\infty(0, T; H), \tag{8}$$

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \tag{9}$$

$$b(0) = b_0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{10}$$

Відзначимо, що рівняння (6), (7) можна записати в операторній формі

$$b' + A_1 b + D_1(B_0 + b, u') = 0, \tag{11}$$

$$\rho u'' + A_2 u - \frac{1}{\mu_0} D_2(B_0 + b, b) = f. \tag{12}$$

Для функцій b і u, що задовольняють тільки (8), (9), умови (10) не означені. Покажемо, що вони мають зміст. Із твердження 1 і інтерполяційної нерівності $\|v\|_{1/2} \leqslant c\, \|v\|_1^{1/2} \|v\|^{1/2}$ випливає таке твердження.

Твердження 2. *Якщо b і u задовольняють* (8), (9), *то* $D_1(B_0 + b, u') \in L^2(0, T; W'_{3/2})$, $D_2(B_0 + b, b) \in L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Отже із (11), (12) одержуємо $b' \in L^2(0, T; W'_{3/2})$ і $u'' \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Звідси, наприклад, випливає, що $b \in C([0, T]; W'_{3/2})$, $u, u' \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$. Таким чином, умови (10) мають зміст.

3. Існування розв'язку. Теорема 1. *Існує принаймні один розв'язок задачі* 1.

Доведення. Застосуємо метод Фаедо — Гальоркіна. За «базис» у просторі $W_{3/2}$ візьмемо власні функції $w_j \in W_{3/2}$ спектральної задачі $((w_j, \varphi))_{3/2} = \lambda_j (w_j, \varphi)$ $\forall \varphi \in W_{3/2}$, $|w_j| = 1$. В просторі $H_0^1(\Omega)$ візьмемо будь-яку систему лінійно незалежних елементів, яка тотальна в $H_0^1(\Omega)$. Нехай $W^{(m)} = \mathscr{L}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$, $V^{(m)} = \mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $\mathscr{L}(E)$ — лінійна оболонка множини E.

Визначимо наближений розв'язок $\{b_m(t), u_m(t)\}$ наступним чином: $b_m(t) \in W^{(m)}$, $u_m(t) \in V^{(m)}$

$$(b'_m, \varphi_m) + a_1(b_m, \varphi_m) + d(B_0 + b_m, u'_m, \varphi_m) = 0 \quad \forall \varphi_m \in W^{(m)}, \tag{13}$$

$$\rho(u''_m, \psi_m) + a_2(u_m, \psi_m) - \frac{1}{\mu_0} d(B_0 + b_m, \psi_m, b_m) = (f, \psi_m) \quad \forall \psi_m \in V^{(m)}, \tag{14}$$

$$b_m(0) = b_{0m}, \quad b_{0m} \in W^{(m)}, \quad b_{0m} \to b_0 \text{ в } H, \tag{15}$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_{0m} \in V^{(m)}, \quad u_{0m} \to u_0 \text{ в } H_0^1(\Omega), \tag{16}$$

$$u'_m(0) = u_{1m}, \quad u_{1m} \in V^{(m)}, \quad u_{1m} \to u_1 \text{ в } L^2(\Omega). \tag{17}$$

Система диференціальних рівнянь (13), (14) із початковими умовами (15) — (17) дозволяє визначити $\{b_m(t), u_m(t)\}$ в інтервалі $[0, t_m)$. Покажемо, що можна взяти $t_m = T$.

Апріорна оцінка I. Покладемо в (13), (14) $\varphi_m = b_m(t)$, $\psi_m = \mu_0 u'_m(t)$ і ці рівняння додамо. Одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|b_m(t)|^2 + a_1(b_m(t), b_m(t)) + \frac{\rho\mu_0}{2}\frac{d}{dt}|u'_m(t)|^2 + \\ + \frac{\mu_0}{2}\frac{d}{dt} a_2(u_m(t), u_m(t)) = \mu_0(f(t), u'_m(t)),$$

звідки, інтегруючи по $[0, t]$, маємо

$$|b_m(t)|^2 + \int_0^t \|b_m\|^2 ds + |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leqslant c\Big(|b_{0m}|^2 + \\ + \|u_{0m}\|^2 + |u_{1m}|^2 + \int_0^t |f|\,|u'_m|\, ds\Big). \tag{18}$$

Застосувавши нерівність Біхарі до (18), одержуємо оцінки

$$|b_m(t)|^2 + \int_0^t \|b_m\|^2 ds + |u'_m(t)|^2 + \|u_m(t)\|^2 \leqslant \left(c + c\int_0^t |f|\,ds\right)^2. \qquad (19)$$

Отже, маємо $t_m = T$ і послідовності $\{b_m\}$, $\{u_m\}$, $\{u'_m\}$ обмежені в просторах $L^2(0, T; W) \cap L^\infty(0, T; H)$, $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ відповідно.

Апріорна оцінка II. Покажемо, що послідовність $\{b'_m\}$ обмежена в $L^2(0, T; W'_{3/2})$. Нехай $P_m: H \to W^{(m)}$ — проектор, так що $P_m h = \sum_{i=1}^m (h, w_i) w_i$. Із (13) маємо

$$(b'_m, \varphi_m) = \langle g_m, \varphi_m\rangle \quad \forall \varphi_m \in W^{(m)}, \qquad (20)$$

де $g_m = -A_1 b_m - D_1(B_0 + b_m, u'_m)$ і згідно з твердженням 2 послідовність $\{g_m\}$ обмежена в $L^2(0, T; W'_{3/2})$. Нехай $\varphi \in W_{3/2}$ і $\varphi = P_m\varphi + Q_m\varphi$, де $Q_m = I - P_m$. Тоді із (20) випливає

$$(b'_m, \varphi) = \langle g_m, P_m\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in W_{3/2}. \qquad (21)$$

Оскільки $\|P_m\|_{\mathscr{L}(W_{3/2}; W_{3/2})} \leqslant 1$ (завдяки нашому вибору w_j), то із (21) виводимо обмеженість $\{b'_m\}$ в $L^2(0, T; W'_{3/2})$.

Виконаємо граничний перехід в (13), (14). Використовуючи теорему про компактність (див. [4], теорема 5.1, розділ 1), виділимо із послідовностей $\{b_m\}$, $\{u_m\}$ такі підпослідовності $\{b_\mu\}$, $\{u_\mu\}$, що $b_\mu \to b$ слабко в $L^2(0, T; W)$, $b_\mu \to b$ * слабко в $L^\infty(0, T; H)$, $b_\mu \to b$ сильно в $L^2(0, T; H)$, $b'_\mu \to b'$ слабко в $L^2(0, T; W'_{3/2})$, $u_\mu \to u$ * слабко в $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, $u'_\mu \to u'$ * слабко в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Звідси випливає, що $b_\mu(0) \to b(0)$ в $W_{3/2}$ слабко, $u_\mu(0) \to u(0)$ в $L^2(\Omega)$ слабко і $b(0) = b_0$, $u(0) = u_0$.

Зафіксуємо в рівняннях (13), (14) елементи φ_m, ψ_m, тобто покладемо $\varphi_m = \varphi_{m_0} \in W^{(m_0)}$, $\psi_m = \psi_{m_0} \in V^{(m_0)}$. Покажемо, що $d(b_\mu, u'_\mu, \varphi_{m_0}) \to d(b, u', \varphi_{m_0})$, слабко в $L^2(0, T)$. Із (19) і твердження 2 випливає, що послідовність $z_\mu = D_1(b_\mu, u'_\mu)$ обмежена в $L^2(0, T; W'_{3/2})$. Отже, можна вважати, що $z_\mu \to z$ слабко в $L^2(0, T; W'_{3/2})$. Покажемо, що $z_\mu \to D_1(b, u')$ слабко в $L^2(0, T; W'_\gamma)$ $(\gamma > 5/2)$, звідки буде випливати, що $z = D_1(b, u')$. Дійсно, для $\varphi \in L^2(0, T; W_\gamma)$ маємо

$$\int_0^T \langle z_\mu, \varphi\rangle\, dt = \int_0^T \langle D_1(b_\mu, u'_\mu), \varphi\rangle\, dt = \int_0^T d(b_\mu, u'_\mu, \varphi)\, dt = \int_Q u'_\mu (\operatorname{rot}\varphi \times b_\mu) dx dt \to$$

$$\to \int_Q u'(\operatorname{rot}\varphi \times b)\, dx dt,$$

оскільки $u'_\mu \to u'$ * слабко в $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, а $\operatorname{rot}\varphi \times b_\mu \to \operatorname{rot}\varphi \times b$ сильно в $L^1(0, T; L^2(\Omega))$, через те що $\operatorname{rot}\varphi \in L^2(0, T; L^\infty(\Omega))$ (вкладення $W_{\gamma-1} \subset L^\infty(\Omega)$). Оскільки доведено, що $D_1(b_\mu, u'_\mu) \to D_1(b, u')$ слабко в $L^2(0, T; W'_{3/2})$, то з цього випливає $d(b_\mu, u_\mu, \varphi_{m_0}) \to d(b, u', \varphi_{m_0})$ слабко в $L^2(0, T)$. Таким чином, після граничного переходу в рівнянні (13) одержимо рівність

$$\frac{d}{dt}(b, \varphi_{m_0}) + a_1(b, \varphi_{m_0}) + d(B_0 + b, u', \varphi_{m_0}) = 0 \text{ в } \mathscr{D}'(]0, T[),$$

яка справедлива для всіх m_0. Звідси випливає справедливість (6) для всіх $\varphi \in W_{3/2}$.

Покажемо, що $d(b_\mu, \psi_{m_0}, b_\mu) \to d(b, \psi_{m_0}, b)$ слабко в $L^{4/3}(0, T)$. Із (19) і твердження 2 випливає, що послідовність $z_\mu = D_2(b_\mu, b_\mu)$ обмежена в $L^{4/3}(0, T; H^{-1}(\Omega))$, так що можна вважати, що $z_\mu \to z$ слабко в $L^{4/3}(0, T;$

$H^{-1}(\Omega))$. Нехай $\mathcal{D}'(]0, T[; X)$ — простір розподілів на $]0, T[$ із значеннями в X, означений як [5] $\mathcal{D}'(]0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X_w)$, де X — банахів простір, X_w є простір X, що розглядається із слабкою топологією. Установимо, що $z_\mu \to D_2(b, b)$ в $\mathcal{D}'(]0, T[; H^{-\gamma}(\Omega))$ $(\gamma > 3/2)$, звідки одержимо $z = D_2(b, b)$. Для $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, $v \in H_0^\gamma(\Omega)$ маємо

$$\int_0^T \langle z_\mu, v\rangle \varphi dt = \int_0^T \langle D_2(b_\mu, b_\mu), v\rangle \varphi dt = \int_0^T d(b_\mu, v, b_\mu)\varphi dt =$$

$$= \int_Q \varphi(b_\mu \times v)\,\mathrm{rot}\, b_\mu dxdt \to \int_Q \varphi(b \times v)\,\mathrm{rot}\, b dxdt = \int_0^T \langle D_2(b, b), v\rangle \varphi dt,$$

оскільки $\mathrm{rot}\, b_\mu \to \mathrm{rot}\, b$ слабко в $L^2(Q)$, а $\varphi(b_\mu \times v) \to \varphi(b \times v)$ сильно в $L^2(Q)$, через те що $v \in H_0^\gamma(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ при $\gamma > 3/2$. Отже, доведено, що $d(b_\mu, \psi_{m_0}, b_\mu) \to d(b, \psi_{m_0}, b)$ слабко в $L^{4/3}(0, T)$.

Нехай $g \in C^1([0, T])$, $g(T) = 0$. Домножимо (14) (при $m = \mu$, $\psi_m = \psi_{m_0}$) на $g(t)$, проінтегруємо частинами і перейдемо до границі. Одержимо

$$\rho(u_1, \psi_{m_0}) g(0) - \rho \int_0^T (u', \psi_{m_0}) g' dt + \int_0^T a_2(u, \psi_{m_0}) g dt -$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \int_0^T d(B_0 + b, \psi_{m_0}, b) g dt = \int_0^T (f, \psi_{m_0}) g dt. \tag{22}$$

Записуючи, зокрема, (22) для $g \in \mathcal{D}(]0, T[)$, бачимо, що u, b задовольняють рівняння (7) в сенсі теорії розподілів.

Відзначимо, що функції u, u' слабко неперервні як функції із $[0, T]$ в $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ відповідно. Це випливає із леми 8.1, в [6] (розділ 3).

Домножимо (7) (при $m = \mu$, $\psi_m = \psi_{m_0}$) на $g(t)$ і проінтегруємо по $[0, T]$. Одержимо

$$\rho(u'(0), \psi_{m_0}) g(0) - \rho \int_0^T (u', \psi_{m_0}) g' dt + \int_0^T a_2(u, \psi_{m_0}) g dt -$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \int_0^T d(B_0 + b, \psi_{m_0}, b) g dt = \int_0^T (f, \psi_{m_0}) g dt. \tag{23}$$

Із (22), (23) випливає рівність $(u_1 - u'(0), \psi_{m_0}) = 0$. Отже, $u'(0) = u_1$ і, таким чином, теорема 1 доведена.

4. Асимптотика розв'язку. Твердження 3. *Припустимо, що виконуються умови теореми 1 для $T = +\infty$ і $B_0 = 0$. Нехай $\{b, u\}$ — розв'язок задачі 1. Тоді $b(t) \to 0$ в $W'_{1/4}$ при $t \to +\infty$, існує функція $v(t)$, що задовольняє рівняння $\rho v'' + A_2 v = 0$, включення $v \in C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$, $v' \in C([0, \infty); L^2(\Omega))$ і $u(t) - v(t) \to 0$ в $L^2(\Omega)$, $u'(t) - v'(t) \to 0$ в $H^{-1}(\Omega)$ при $t \to +\infty$.*

Доведення. Оскільки $b \in L^2(0, \infty; W)$, $b' \in L^2(0, \infty; W'_{3/2})$, то із теореми про сліди [6] випливає оцінка

$$\| b(t) \|_{-1/4} \leqslant c(\| b \|_{L^2(0, \infty; W)} + \| b' \|_{L^2(0, \infty; W'_{3/2})}).$$

Із цієї оцінки неважко вивести, що $b(t) \to 0$ в $W'_{1/4}$ при $t \to +\infty$. Запишемо $\rho u'' + A_2 u = g$, де $g = f + 1/\mu_0 D_2(b, b)$. Оскільки згідно з твердженням 1 маємо $g \in L^1(0, \infty; H^{-1}(\Omega))$, то із результатів роботи [7] випливає твердження 3 щодо поведінки функцій $u(t)$, $u'(t)$ при $t \to +\infty$.

1. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1982.— 290 с.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса.— М. : Мир, 1981.— 408 с.

3. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике.— М. : Наука, 1980.— 383 с.
4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
6. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
7. *Arosio A.* Linear second order differential equations in Hilbert spaces. The Cauchy problem and asymptotic behaviour for large time // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1984.— **86**, N 2.— P. 147—180.

Одержано 06.03.92