УДК 515.12;517.51

В. К. Маслюченко, канд. фіз.-мат. наук,
В. В. Михайлюк, асп., **О. В. Собчук**, викл.-стаж. (Чернів. ун-т)

Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень

Вивчається задача про побудову нарізно неперервної функції на добутку двох топологічних просторів, яка має задану множину точок розриву, і споріднені з нею, зокрема задача про побудову поточково збіжної послідовності неперервних функцій, яка має задані множину точок нерівномірної збіжності і множину точок розриву граничної функції. В метризовному випадку перша задача розв'язана для сепарабельних F_σ-множин, проекції яких на кожний співмножник є першої категорії. Друга ж — для пари вкладених F_σ-множин пер-

© В. К. МАСЛЮЧЕНКО, В. В. МИХАЙЛЮК, О. В. СОБЧУК, 1992

шої категорії в досконало нормальному просторі. Показано також, що для одноточкової множини в добутку тихоновських кубів, один з яких має незліченну вагу, перша задача має негативний розв'язок.

Изучается задача о построении раздельно непрерывной функции на произведении двух топологических пространств, имеющей заданное множество точек разрыва, и родственные ей, в частности задача о построении поточечно сходящейся последовательности непрерывных функций, имеющей заданные множества точек неравномерной сходимости и точек разрыва предельной функции. В метризуемом случае первая задача решена для сепарабельных F_σ-множеств, проекции которых на каждый сомножитель первой категории. Вторая же — для пары вложенных F_σ-множеств первой категории в совершенно нормальном пространстве. Показано также, что для одноточечного множества в произведении тихоновских кубов, один из которых имеет несчетный вес, первая задача имеет отрицательное решение.

1. У зв'язку з такими основоположними результатами загальної теорії функцій як теореми Осгуда про точки рівномірної збіжності поточково збіжних послідовностей неперервних функцій чи про точки локальної рівномірної обмеженості поточково обмежених сімей неперервних функцій, теорема Бера про множину точок неперервності функцій першого класу Бера, або ж теореми про сукупну неперервність нарізно неперервних відображень, що беруть свій початок також від Бера і продовжують з'являтися в працях багатьох математиків нашого століття, природно виникають і обернені задачі. Сюди ми відносимо, зокрема, наступні дві групи задач:

1. Нехай A і B — підмножини деякого топологічного простору X. Потрібно побудувати:

1а) функцію $f : X \to \mathbb{R}$ першого класу Бера, множина точок розриву P_f якої дорівнює A;

1б) поточково збіжну до неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, множина точок нерівномірної збіжності $N_{(f_n)}$ якої дорівнює B;

1в) поточково збіжну до функції $f : X \to \mathbb{R}$ послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, для якої $P_f = A$ і $N_{(f_n)} = B$;

1г) поточково обмежену послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, для якої A є в точності множиною тих точок, що в жодному їх околі послідовність (f_n) не є рівномірно обмежена.

2. Нехай X і Y — топологічні простори і $C(X|Y)$ — простір усіх нарізно неперервних функцій на добутку $X \times Y$, тобто таких відображень $f : X \times Y \leftarrow \mathbb{R}$, для яких при кожному фіксованому x з X функція $f^x(y) = f(x, y)$ неперервна на Y і при кожному фіксованому y з Y функція $f_y(x) = f(x, y)$ неперервна на X. Позначимо через p проекцію добутку $X \times Y$ на перший співмножник X, а через P_f, як і раніше, множину точок розриву f. Для підможини $C \subseteq X \times Y$, підмножини $A \subseteq X$ і точки $y_0 \in Y$ потрібно побудувати функцію f з $C(X|Y)$, для якої: 2а) $P_f = C$; 2б) $P_f = A \times \{y_0\}$; 2в) $p(P_f) = A$.

Нарешті можна розглянути ще загальнішу задачу. Для топологічного простору X і для підмножини Q топологічного простору Y позначимо через $C_Q(X|Y)$ простір усіх функцій $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, для яких $f^x : Y \to \mathbb{R}$ неперервні для кожного x з X, а $f_y : X \to \mathbb{R}$ — для кожного y з Q. Нехай для кожного $y \in Y \setminus Q$ задано деяку підмножину A_y простору X і, крім того, $C \subseteq X \times Y$ і $B \subseteq X$. Потрібно побудувати:

2г) функцію f з $C_Q(X|Y)$, для якої $P_f = C$, $P_{f_y} = A_y$, для кожного $y \in Y \setminus Q$ і $p(P_f) = B$.

Проблема 1б) є дискретним варіантом проблеми 2б), адже послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до неперервної функції $f_\infty : X \to \mathbb{R}$, породжує нарізно неперервне відображення $f : X \times \overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f(x, n) = f_n(x)$, де $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ — компактифікація Александрова натурального ряду $\mathbb{N}$ з дискретною топологією і при цьому $N_{(f_n)} \times \{\infty\} = P_f$. Так само проблема 2г) при $Y = \overline{\mathbb{N}}$, $Q = \mathbb{N}$, $A_\infty = A$, $C = B \times \{\infty\}$ переходить у проблему 1в). Крім того, оскільки $p(A \times \{y_0\}) = A$, то з позитивної відповіді на задачу 2б) одержується позитивна відповідь на 2в). Зрозуміло, що можна ставити питання, аналогічні групі задач 2 і для функцій більшого числа змінних.

Теореми Осгуда і Бера та різні теореми про масивність множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних відображень дають необхідні умови на задані множини в тих чи інших класах просторів, для того, щоб сформульовані задачі мали позитивне розв'язання. Одержанню необхідних умов, особливо у випадку нарізно неперервних відображень, присвячено велике число досліджень, які значно активізувалися останнім часом, після появи роботи Наміоки [1]. Разом з тим вивчення достатніх умов для позитивного розв'язання задач 1 і 2 весь час залишалося нібито в тіні, і більшість одержаних тут результатів, зокрема Юнгів [2], Кешнера [3], Фейока [4], Гранде [5], М. М. Мірзояна [6], М. Я. Цейтліна [7], стосувалися тільки функцій дійсних змінних. В монографії Гана [8, с. 230] розв'язано задачу 1б) для F_σ-множини першої категорії у метризовному просторі. Брекенрідж і Нішіура [9] узагальнили результат Кешнера [3] на компактні метричні простори [10, с. 251]. Про актуальність наукової розробки цього напрямку свідчить і сформульована в огляді Пьотровського [11], у зв'язку з теоремою Наміоки [1], задача: чи для кожної F_σ-множини C, яка міститься в добутку $A \times B$ множин першої категорії A і B відповідно в компактних просторах X і Y, існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, множина точок розриву якої збігається з множиною C?

Дана робота резюмує дослідження обернених задач 1 і 2, здійснені протягом останніх років учасниками наукового семінару з проблем загальної теорії функцій, що ведеться в Чернівецькому університеті під керівництвом першого з трьох її співавторів. При цьому виявилося, що важливу роль у цих задачах відіграє клас досконало нормальних просторів [12, с. 81]. Розглянуті результати охоплюють і значно розвивають усі попередні з цієї тематики. Зокрема, відмітимо негативне розв'язання проблеми Пьотровського, що було одержане в значній мірі зусиллями другого з співавторів. А саме, з'ясувалося, що на добутку двох тихоновських кубів, один з яких має незчисленну вагу, не існує нарізно неперервної функції з одноточковою множиною точок розриву. Деякі з результатів цієї роботи депоновані в [13, 14].

2. У цьому пункті займемося дискретним випадком. Ми розв'яжемо задачу 1в) у тому разі, коли A і B — довільні F_σ-множини першої категорії в досконало нормальному просторі, такі, що $A \subseteq B$. Це розв'язання одержується простою комбінацією прикладів, що дають відповідь на проблеми 1а) і 1б). Метод розв'язання задачі 1а) має своїм далеким прооообразом побудову з книги Окстобі [15, с. 59]. Щоб розв'язати задачу 1б), узагальнимо побудову з [8, с. 230], пристосувавши її до досконало нормальних просторів. Незначна модифікація цієї побудови приводить до розв'язання проблеми 1г) для довільної замкненої ніде не щільної підмножини досконало нормального простору.

Почнемо з елементарної леми, яку ми часто будемо використовувати на завершальному кроці наших побудов.

Лема 1. *Нехай (A_k) — зростаюча послідовність підмножин топологічного простору X, (f_k) — послідовність функцій $f_k : X \to [0, 1]$, для яких $P_{f_k} = A_k \subseteq f_k^{-1}(0)$ для кожного k і (c_k) — послідовність додатніх чисел, для яких ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ збігається. Тоді функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$ визначена на всьому просторі X і її множина точок розриву P_f збігається з множиною $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.*

Доведення. Оскільки на X для кожного k виконується нерівність $0 \leqslant c_k f_k(x) \leqslant c_k$, то f визначена на X і поза множиною A неперервна. Візьмемо точку x_0 з A і покажемо, що f розривна в цій точці. Існує такий номер k_0, що $x_0 \in A_{k_0}$ і $x_0 \notin A_{k_0-1}$. Функція f_{k_0} розривна в точці x_0, отже, існує таке $\varepsilon > 0$, що в довільному околі U точки x_0 знайдеться точка x така, що $f_{k_0}(x) = |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Оскільки функція $g(x) = \sum_{k<k_0} c_k f_k(x)$ неперервна в точці x_0, то існує такий її окіл U_1, що $|g(x)-$

$-g(x_0)| \leqslant c_{k_0}\varepsilon/2$ для всіх $x \in U_1$. Візьмемо точку $x_1 \in U \cap U_1$, для якої $f_{k_0}(x_1) \geqslant \varepsilon$. Тоді

$$|f(x_1)-f(x_0)| \geqslant \sum_{k \geqslant k_0} c_k f_k(x_1) - |g(x_1)-g(x_0)| \geqslant c_{k_0} f_{k_0}(x_1) - c_{k_0}\varepsilon/2 \geqslant c_{k_0}\varepsilon/2,$$

адже $f_k(x_0)=0$ для всіх $k \geqslant k_0$. Тому $x_0 \in P_f$.

Для розв'язання підсиленого варіанту задачі 1а) потрібна наступна лема.

Лема 2. *Нехай (A_k) — зростаюча послідовність замкнених множин у досконало нормальному просторі X. Тоді існує спадна послідовність неперервних функцій $\varphi_k : X \to [0, 1]$, для яких $A_k = \varphi_k^{-1}(0)$.*

Доведення. Згідно з теоремою. Веденісова [12, с. 82) для кожного номера k існує така неперервна функція $\psi_k : X \to [0, 1]$, що $A_k = \psi_k^{-1}(0)$. Тоді, поклавши $\varphi_k(x) = \sum_{i \geqslant k} 2^{-i}\psi_i(x)$, одержимо шукану послідовність.

Теорема 1. *Нехай A — множина першої категорії і типу F_σ у досконало нормальному просторі X. Тоді існує зростаюча послідовність (h_n) неперервних функцій $h_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до функції $f : X \to \mathbb{R}$ і при цьому $P_f = N_{(h_n)} = A$.*

Доведення. Подамо множину A у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених ніде не щільних множин A_k. Для характеристичної функції χ_k множини $X \setminus A_k$ маємо $P_{\chi_k} = A_k$. Нехай (φ_k) — послідовність з леми 2. Візьмемо якийсь збіжний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ з додатніх чисел і покладемо $h_{nk}(x) = n\varphi_k(x)/(1+n\varphi_k(x))$, $h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_{nk}(x)$ і $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x)$. Маємо $\lim_{n\to\infty} h_{nk}(x) = \chi_k(x)$ і $0 \leqslant c_k h_{nk}(x) \leqslant c_k$ для довільних k, x і n, отже, ряд для визначення $h_n(x)$ збігається рівномірно на $X \times \mathbb{N}$. Тому функції h_n неперервні разом з функціями h_{nk} і $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$. На основі леми 1 одержуємо $P_f = A$. Покажемо, що і $N_{(h_n)} = A$. Оскільки $P_f \subseteq N_{(h_n)}$, то залишається довести включення $N_{(h_n)} \subseteq A$, тобто з'ясувати, що в точках поза множиною A послідовність (h_n) збігається рівномірно. Нехай $x_0 \in X \setminus A$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо такий номер k_0, що $\sum_{k > k_0} c_k < \varepsilon/2$. Зрозуміло, що $x_0 \notin A_{k_0}$, а тому $\varphi_{k_0}(x_0) > 0$. Покладемо $\delta = \varphi_{k_0}(x_0)/2$ і $U = \varphi_{k_0}^{-1}((\delta, \infty))$. Множина U є околом точки x_0 і $U \cap A_{k_0} = \varnothing$, отже $\chi_k(x) = 1$, якщо $x \in U$ і $k = 1, \ldots, k_0$. Оскільки $|h_{nk}(x) - \chi_k(x)| \leqslant 1$ і $\varphi_k(x) \geqslant \varphi_{k_0}(x)$ при $k = 1, \ldots, k_0$, то при $x \in U$ будемо мати

$$|h_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k \leqslant k_0} c_k(1 - h_{nk}(x)) + \sum_{k > k_0} c_k < \sum_{k \leqslant k_0} c_k/(1 + n\delta) + \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

якщо n досить велике, що і доводить рівномірну збіжність в x_0.

Розглянемо тепер задачу 1б).

Лема 3. *Існує така послідовність (γ_n) неперервних функцій $\gamma_n : [0, 1] \leftarrow [0, 1]$, що рівномірно збігається до нульової функції в усіх точках, крім точки 0, де $\gamma_n(0) = 0$, і така, що існує $\varepsilon_0 > 0$ і спадна послідовність точок $\xi_n \in (0, 1)$, для яких $\gamma_n(\xi) \geqslant \varepsilon_0$ при $\xi_{n+1} \leqslant \xi \leqslant \xi_n$ і $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.*

Доведення. Визначимо послідовність (γ_n), яку використаємо в наступному пункті для загальнішої мети. Виберемо будь-яку строго спадну послідовність чисел $\eta_n \in (0, 1]$, що прямує до нуля, і покладемо $\gamma_n(\xi) = 0$ при $\xi \in [0, \eta_{n+2}] \cup [\eta_n, 1]$, $\gamma_n(\xi) = (\xi - \eta_{n+2})/(\eta_{n+1} - \eta_{n+2})$ при $\eta_{n+2} \leqslant \xi \leqslant \eta_{n+1}$ і $\gamma_n(\xi) = (\eta_n - \xi)/(\eta_n - \eta_{n+1})$ при $\eta_{n+1} \leqslant \xi \leqslant \eta_n$. Послідовність $\xi_n = (\eta_n + \eta_{n+1})/2$, строго спадаючи, прямує до нуля і $\gamma_n(\xi) \geqslant 1/2$ при $\xi_{n+1} \leqslant$

$\leqslant \xi \leqslant \xi_n$. У кожній точці $\xi_0 \in (0, 1]$ послідовність (γ_n) рівномірно збігається до нуля, бо $\eta_{n_0} < \xi_0$ для деякого номера n_0, а тоді і $\gamma_n(\xi) = 0$ для всіх ξ з околу $(\eta_{n_0}, 1]$ точки ξ_0 і для кожного $n \geqslant n_0$.

Можна запропонувати й інші приклади, як-от $\gamma_n(\xi) = n\xi/(1 + n\xi)^2$ з [13], для якої $\gamma_n(\xi) \geqslant 1/6$ при $1/(n+1) \leqslant \xi \leqslant 1/n$, чи послідовність $\gamma_n(\xi) = 2^{n+2}\xi$ при $0 \leqslant \xi \leqslant 2^{-n-2}$, 1 при $2^{-n-2} \leqslant \xi \leqslant 2^{-n-1}$, $2 - 2^{n+1}\xi$ при $2^{-n-1} \leqslant \xi \leqslant 2^{-n}$ і 0 при $2^{-n} \leqslant \xi \leqslant 1$, що її використовує Ган [8, с. 230].

Лема 4. *Нехай B — замкнена ніде не щільна множина в досконало нормальному просторі X. Тоді існує така послідовність (g_n) неперервних функцій $g_n : X \to [0, 1]$, що $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ для кожного x з X і $N_{(g_n)} = B$.*

Доведення. Застосувавши знову теорему Веденісова, візьмемо таку неперервну функцію $\varphi : X \to [0, 1]$, що $B = \varphi^{-1}(0)$. Покладемо $g_n(x) = \gamma_n(\varphi(x))$, де (γ_n) послідовність леми 3.

Нехай $x_0 \notin B$ і $\varepsilon > 0$. Послідовність (γ_n) рівномірно збігається в точці $\xi_0 = \varphi(x_0) > 0$ до нульової функції, отже, існує $\delta > 0$ і такий номер n_0, що $\gamma_n(\xi) < \varepsilon$, якщо $n \geqslant n_0$ і $\xi_0 - \delta < \xi < \xi_0 + \delta$. Прообраз $U = \varphi^{-1}((\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta))$ є околом точки x_0, адже φ неперервна. Тоді і $g_n(x) < \varepsilon$ при $x \in U$ і $n \geqslant n_0$, отже, в точці x_0 послідовність (g_n) збігається рівномірно.

Нехай $x_0 \in B$. Візьмемо довільний окіл U точки x_0 і довільний номер n_0. Оскільки φ неперервна в точці x_0 і $\varphi(x_0) = 0$, то існує такий окіл V точки x_0, що $V \subseteq U$ і $\varphi(V) \subseteq [0, \xi_{n_0})$. Множина B ніде не щільна, тому існує точка $\tilde{x} \in V \setminus B$. Число $\tilde{\xi} = \varphi(\tilde{x}) > 0$, тому $\xi_{\tilde{n}+1} \leqslant \tilde{\xi} \leqslant \xi_{\tilde{n}}$ для деякого номера $\tilde{n}$. Ясно, що $\xi_{\tilde{n}} \leqslant \xi_{n_0}$, а тому $\tilde{n} \geqslant n_0$. Таким чином, $g_{\tilde{n}}(\tilde{x}) = \gamma_{\tilde{n}}(\tilde{\xi}) \geqslant \varepsilon_0$, отже, $x_0 \in N_{(g_n)}$.

Теорема 2. *Нехай B — множина першої категорії і типу F_σ у досконало нормальному просторі X. Тоді існує послідовність (g_n) неперервних функцій $g_n : X \to \mathbb{R}$ така, що $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ для кожного $x \in X$ і $N_{(g_n)} = B$.*

Доведення. Маємо $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, де B_k — замкнені ніде не щільні множини і $B_k \subseteq B_{k+1}$ для кожного k. Згідно з лемою 4 для кожної множини B_k можна визначити таку послідовність функцій $g_{nk} : X \to [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, що $\lim_{n \to \infty} g_{nk}(x) = 0$ для кожного $x \in X$ і $N_{(g_{nk})} = B_k$. Зафіксуємо якийсь збіжний додатній ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ і покладемо $g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_{nk}(x)$. Як і раніше, останній ряд рівномірно збігається на множині $X \times \overline{\mathbb{N}}$. Тому функції g_n неперервні і $\lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$ на X. Покладемо $\tilde{g}(x, n) = g_n(x)$ і $\tilde{g}(x, \infty) = 0$ і так само $\tilde{g}_k(x, n) = g_{nk}(x)$ і $\tilde{g}_k(x, \infty) = 0$. Для цих функцій маємо $P_{\tilde{g}_k} = B_k \times \{\infty\} \subseteq \tilde{g}_k^{-1}(0)$ і $\tilde{g}(x, n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \tilde{g}_k(x, n)$ на $X \times \overline{\mathbb{N}}$. Тому на основі леми 1 маємо $P_{\tilde{g}} = B \times \{\infty\}$. Але $P_{\tilde{g}} = N_{(g_n)} \times \{\infty\}$. Отже, $N_{(g_n)} = B$.

Теорема 3. *Нехай A і B — множини першої категорії і типу F_σ у досконало нормальному просторі X і $A \subseteq B$. Тоді існує така послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до деякої функції $f : X \to \mathbb{R}$ і при цьому $P_f = A$ і $N_{(f_n)} = B$.*

Доведення. Нехай (h_n) і (g_n) — послідовності з теорем 1 і 2. Покладемо $f_n(x) = h_n(x) + g_n(x)$ і $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} h_n(x)$. За побудовою $P_f = A$. Покажемо, що $N_{(f_n)} = B$. Нехай $x_0 \notin B$. Послідовності (h_n) і (g_n) збігаються в цій точці рівномірно, адже $N_{(h_n)} = A \subseteq B$, тому і їх сума (f_n) буде рівномірно збіжною. Нехай $x_0 \in B \setminus A$. Послідовність (h_n) збігається в цій точці рівномірно, а послідовність (g_n) ні, тому (f_n) збігається в цій точці нерівномірно. Якщо $x_0 \in A$, то гранична функція f послідовності (f_n) розривна в точці x_0, отже, збіжність в цій точці не може бути рівномірною.

Теорема 4. *Нехай A — замкнена ніде не щільна множина у досконало нормальному просторі X. Тоді існує поточково обмежена послідовність (f_n) неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ така, що точки доповнення $X \setminus A$ і тільки вони є точками локальної рівномірної обмеженості послідовності (f_n).*

Доведення. Візьмемо неперервну функцію $\varphi : X \to [0, 1]$, для якої $A = \varphi^{-1}(0)$, і покладемо $f_n(x) = n\gamma_n(\varphi(x))$, де (γ_n) — послідовність з доведення леми 3. Легко перевірити, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для кожного x з X, отже, (f_n) поточково обмежена. Нехай $x_0 \notin A$. Тоді $\varphi(x_0) > 0$, отже, $\eta_n < \varphi(x_0)$ для всіх n більших (або рівних) деякого номера n_0. Множина $U_0 = \varphi^{-1}((\eta_{n_0}, \infty))$ є околом точки x_0 в X і $f_n(x) = 0$, якщо $x \in U_0$ і $n \geqslant n_0$. Оскільки кожна з функцій f_n обмежена, то послідовність (f_n) рівномірно обмежена в околі U_0. Нехай $x_0 \in A$, U — довільний окіл точки x_0 і m — довільний номер. Існує такий окіл V точки x_0, що $V \subseteq U$ і $\varphi(V) \subseteq [0, \xi_m)$. Візьмемо точку $\tilde{x} \in V \setminus A$. Якщо $\tilde{n}$ — такий номер, що $\xi_{\tilde{n}+1} \leqslant \varphi(\tilde{x}) \leqslant \xi_{\tilde{n}}$, то $\tilde{n} \geqslant m$. Маємо $f_{\tilde{n}}(\tilde{x}) \geqslant \tilde{n}/2 \geqslant m/2$. Таким чином, в жодному околі точки $x_0 \in A$ послідовність (f_n) не є рівномірно обмеженою.

3. Розглянемо тепер задачу 2б).

Лема 5. *Одноточкова множина $\{y_0\}$ у тихоновському просторі Y має тип G_δ тоді і тільки тоді, коли існує неперервна функція $\psi : Y \to [0, 1]$, для якої $\psi^{-1}(0) = \{y_0\}$.*

Доведення легко провести стандартним прийомом [12, с. 76].

Лема 6. *Якщо y_0 — неізольована точка в топологічному просторі Y, яка має зчисленний базис околів, і $\psi : Y \to [0, 1]$ — неперервна функція, для якої $\psi^{-1}(0) = \{y_0\}$, то існує така послідовність точок $y_n \in Y$, що $y_n \to y_0$ і числа $\eta_n = \psi(y_n)$, строго спадаючи, прямують до нуля.*

Доведення. Нехай (V_k) — спадна послідовність околів точки y_0 в Y, яка утворює базис околів цієї точки, а $\dot{V}_k = V_k \setminus \{y_0\}$ — проколоті околи. Оскільки точка y_0 неізольована, то існує точка $y_1 \in \dot{V}_1$ Число $\eta_1 = \psi(y_1) > 0$, тому існує такий окіл V_{k_1}, що $\psi(V_{k_1}) \subseteq [0, \eta_1)$. Виберемо точку $y_2 \in \dot{V}_2 \cap V_{k_1}$. Маємо $\eta_2 = \psi(y_2) \in (0, \eta_1)$. Тому існує такий окіл V_{k_2}, що $\psi(V_{k_2}) \subseteq [0, \eta_2)$. Візьмемо $y_3 \in \dot{V}_3 \cap V_{k_2}$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, одержуємо шукану послідовність точок.

Теорема 5. *Нехай A — множина першої категорії і типу F_σ у досконало нормальному просторі X, а y_0 — неізольована точка в тихоновському просторі Y, яка має зчисленний базис околів. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої $P_f = A \times \{y_0\}$.*

Доведення. Нехай спочатку A — замкнена ніде не щільна множина. Розглянемо таку неперервну функцію $\varphi : X \to [0, 1]$, що $A = \varphi^{-1}(0)$. Одноточкова множина $\{y_0\}$ має тип G_δ, тому згідно з лемою 5 існує неперервна функція $\psi : Y \to [0, 1]$, для якої $\psi^{-1}(0) = \{y_0\}$. На основі леми 6 визначимо послідовність точок $y_n \in Y$, яка збігається до y_0, а послідовність чрсел $\eta_n = \psi(y_n)$, строго спадаючи, прямує до нуля. Візьмемо тепер послідовність (γ_n) з доведення леми 3, яка побудована на основі цих чисел η_n і покладемо

$$g(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi)\,\gamma_n(\eta).$$

Очевидно, $g : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ — нарізно неперервна функція, причому $g(\xi, \eta) \geqslant 1/4$, якщо $(\xi, \eta) \in K_n = [\xi_{n+1}, \xi_n]^2$. Так само зрозуміло, що $g(0, 0) = 0$ і $P_g = \{(0, 0)\}$.

Покажемо, що для функції $f(x, y)=g(\varphi(x), \psi(y))$ маємо $P_f=A\times\{y_0\}$. Неперервність f поза множиною $A\times\{y_0\}$ випливає з теореми про неперервність композиції. Візьмемо $x_0\in A$ і покажемо, що $(x_0, y_0)\in P_f$. Нехай U — довільний окіл точки x_0 в X, а V — довільний окіл точки y_0 в Y. Існує такий номер n_0, що $y_n\in V$ для всіх $n\geqslant n_0$. Візьмемо такий окіл $\tilde U$ точки x_0, що $\tilde U\subseteq U$ і $\varphi(\tilde U)\subseteq[0, \xi_{n_0})$ і точку $\tilde x\in\tilde U\setminus A$. Число $\tilde\xi=\varphi(\tilde x)>0$, тому існує такий номер $\tilde n$, що $\xi_{\tilde n+1}\ \tilde\xi\leqslant\xi_{\tilde n}$. Ясно, що $\tilde n\geqslant n_0$. Тоді $\tilde y=y_{\tilde n+1}\in V$. Для точки $(\tilde x, \tilde y)\in U\times V$ маємо $|f(\tilde x, \tilde y)-f(x_0, y_0)|=f(\tilde x, \tilde y)=g(\tilde\xi, \eta_{\tilde n+1})\geqslant 1/4$, бо $(\tilde\xi, \eta_{\tilde n+1})\in K_{\tilde n}$. Таким чином, $(x_0, y_0)\in P_f$. Зрозуміло, що для побудованої функції f маємо $f(X\times Y)\subseteq[0, 1]$ і $A\times\{y_0\}\subseteq f^{-1}(0)$.

В загальному випадку ми подаємо множину A у вигляді об'єднання зростаючої послідовності замкнених ніде не щільних множин A_n, визначаємо для кожної множини A_n нарізно неперервну функцію $f_n: X\times Y\to[0, 1]$, для якої $P_{f_n}=A_n\times\{y_0\}\subseteq f_n^{-1}(0)$, беремо будь-який додатній збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ і покладаємо $f(x, y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x, y)$. На основі леми 1 одержуємо, що f — шукана функція.

4. Задачу 2а) вдалося поки що розв'язати для сепарабельних підмножин типу F_σ у добутках метризовних просторів, причому проекції цих підмножин мають першу категорію. Метод побудови має деякі риси схожості з методом Кешнера [3], який розв'язав цю задачу для підмножин квадрата $[0, 1]^2$ чи, загальніше, n-вимірного куба, $[0, 1]^n$, хоча був розроблений незалежно [3].

Спочатку введемо деякі позначення. Нехай X і Y — метризовні топологічні простори і $Z=X\times Y$ — їх топологічний добуток. Зафіксуємо деякі метрики $|\cdot-\cdot|_X$ і $|\cdot-\cdot|_Y$ відповідно на просторах X і Y, які породжують їх топології. Для точок $z'=(x', y')$, $z''=(x'', y'')$ з простору Z введемо відстань

$$|z'-z''|_Z=\max\{|x'-x''|_X, |y'-y''|_Y\}.$$

Ця відстань породжує топологію добутку на Z. Позначимо через $I(x_0, r)$, $J(y_0, r)$ і $Q(z_0, r)$ відкриті кулі відповідно у просторах X, Y і Z відносно введених метрик з центрами у точках x_0, y_0 і z_0 відповідно і радіуса r. Через $I[x_0, r]$, $J[y_0, r]$ і $Q[z_0, r]$ позначимо відповідні замкнені кулі. Зрозуміло, що $Q(z_0, r)=I(x_0, r)\times J(y_0, r)$, де $z_0=(x_0, y_0)\in Z$, і аналогічно для замкнених куль. Кулі $Q(z_0, r)$ і $Q[z_0, r]$ називатимемо квадратами.

Лема 7. *Нехай X і Y — метризовні простори і $C\subseteq X\times Y$ — сепарабельна замкнена множина, яка міститься в добутку $A\times B$ множин $A\subseteq X$ і $B\subseteq Y$, замкнених і ніде не щільних у відповідних просторах. Тоді існує нарізно неперервна функція $f: X\times Y\to[0, 1]$, для якої $P_f=C\subseteq f^{-1}(0)$.*

Доведення. Нехай (d_n) — послідовність точок з C така, що множина $\{d_1, \ldots, d_n, \ldots\}$ щільна в C. Занумеруємо систему квадратів $Q(d_n, 1/m)$, де $(n, m)\in\mathbb{N}^2$ і $n\leqslant m$, у послідовність $W_0, W_1, \ldots, W_k, \ldots$ і позначимо через ρ_k радіус квадрата W_k. Легко переконатися в тому, що $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=0$. Нехай $W_k=U_k\times V_k$, де U_k — відкрита куля в просторі X, а V_k — відкрита куля в просторі Y. Покладемо $G_0=X\setminus A$ і $H_0=Y\setminus B$. Оскільки G_0 і H_0 відкриті і всюди щільні у відповідних просторах, то існують такі кулі $I_0=I[x_0, r_0]$ і $J_0=J[y_0, r_0]$, що $I_0\subseteq U_0\cap G_0$ і $J_0\subseteq V_0\cap H_0$. Тоді для квадрата $Q_0=I_0\times J_0$ маємо $Q_0\subseteq W_0\cap(G_0\times H_0)$. Множини $G_1=G_0\setminus I_0$ і $H_1=H_0\setminus J_0$ відкриті і щільні відповідно в $X\setminus I_0$ і $Y\setminus J_0$. Куля U_1 не міститься в I_0, бо I_0 не має спільних точок з A, а центр кулі U_1 належить A. Так само $V_1\not\subseteq J_0$. Отже, $U_1\setminus I_0$ і $V_1\setminus J_0$ — відкриті й непорожні частини відповідно $X\setminus I_0$ і $Y\setminus J_0$. Тому $U_1\cap G_1\neq\varnothing$ і $V_1\cap H_1\neq\varnothing$. Візьмемо такі кулі $I_1=I[x_1, r_1]$ і $J_1=J[y_1, r_1]$, що

$I_1 \subseteq U_1 \cap G_1$, а $J_1 \subseteq V_1 \cap H_1$. Тоді $Q_1 = I_1 \times J_1 \subseteq W_1 \cap (G_1 \times H_1)$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, одержуємо послідовності куль $I_k = I[x_k, r_k]$ і $J_k = J[y_k, r_k]$ і квадратів $Q_k = I_k \times J_k$, такі, що

$$Q_k \subseteq W_k \cap \left(\left(X \setminus \left(A \cup \bigcup_{s=0}^{k-1} I_s\right)\right) \times \left(Y \setminus \left(B \cup \bigcup_{s=0}^{k-1} J_s\right)\right)\right).$$

Позначимо $z_k = (x_k, y_n)$ і розглянемо неперервну функцію $g_k(z) = \max\{1 - r_k^{-1} |z - z_k|_Z, 0\}$ на просторі Z, носій якої міститься в квадраті Q_k. Ясно, що $0 \leqslant g_k(z) \leqslant 1$ на Z і $g_k(z_k) = 1$. Визначимо тепер для для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ функцію $f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x, y)$. Оскільки $C \subseteq A \times B$, а $Q_k \cap (A \times B) = \varnothing$ для кожного k, то $C \subseteq f^{-1}(0)$. Покажемо, що функція f нарізно неперервна. Зафіксуємо $x_0 \in X$. Пряма $\{x_0\} \times Y$ може перетинатися щонайбільше з одним квадратом Q_k. Якщо вона не перетинається з жодним квадратом Q_k, то $f(x_0, y) = 0$ на Y, якщо ж перетинається з квадратом Q_k, то $f(x_0, y) = g_k(x_0, y)$ на Y. Так чи інакше, функція f^{x_0} неперервна. Так само доводиться неперервність по першій змінній.

Залишилося довести, що $P_f = C$. Нехай $z^* \in C$. Розглянемо довільний квадрат $Q(z^*, \varepsilon)$. Існує така точка d_n, що $|z^* - d_n|_Z < \varepsilon/3$. Візьмемо $m \geqslant n$ так, щоб $1/m < \varepsilon/3$. Тоді для деякого номера k маємо $W_k = Q(d_n, 1/m) \subseteq Q(z^*, \varepsilon)$. Розглянемо центр w_k квадрата W_k і центр z_k квадрата $Q_k \subseteq W_k$. Оскільки $w_k = d_n \in C$, то $f(w_k) = 0$. З іншого боку, $f(z_k) = g_k(z_k) = 1$. Таким чином, коливання $\omega_f(Q(z^*, \varepsilon)) \geqslant 1$, отже $z^* \in P_f$. Навпаки, нехай $z^* \notin C$. Оскільки множина C замкнена, то відстань ρ від точки z^* до множини C більша від нуля. Покладемо $\delta = \rho/2$. Нагадаємо, що радіуси ρ_k квадратів W_k прямують до нуля. Тому існує такий номер k_0, що $\rho_k < \delta$ при $k \geqslant k_0$. Тоді і $W_k \cap Q(z^*, \delta) = \varnothing$ при $k \geqslant k_0$. Отже, звуження f на квадрат $Q(z^*, \delta)$ збігається із звуженням на цей квадрат скінченної суми $\sum_{k<k_0} g_k$ неперервних функцій. Таким чином f неперервна в кожній точці квадрата $Q(z^*, \delta)$, а отже, і в точці z^*.

Теорема 6. *Нехай X і Y — метризовні простори і $C \subseteq X \times Y$ — сепарабельна множина типу F_σ, яка міститься в добутку $A \times B$ множин $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$ першої категорії у відповідних просторах. Тоді існує нарізно неперервна функція $f: X \times Y \to \mathbb{R}$, для якої $P_f = C$.*

Доведення. Легко переконатися у тому, що існують зростаючі послідовності (C_n), (A_n), (B_n) замкнених множин у відповідних просторах такі, що $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, $C_n \subseteq A_n \times B_n$ і A_n і B_n ніде не щільні відповідно в X і Y. Згідно з лемою 7 визначимо нарізно неперервну функцію $f_n: X \times Y \to [0, 1]$, для якої $P_{f_n} = C_n \subseteq f_n^{-1}(0)$. Тоді на основі леми 1 для будь-якого збіжного додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ функція $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x, y)$ є шуканою.

Можна показати, що запропонована побудова без особливих труднощів переноситься на добутки довільного скінченного числа метризовних просторів. Таким чином, справедливий загальніший результат.

Теорема 7. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — метризовні простори і $C \subseteq X = X_1 \times \ldots \times X_n$ — сепарабельна множина типу F_σ, яка міститься в добутку $A_1 \times \ldots \times A_n$ множин A_i першої категорії в X_i. Тоді існує нарізно неперервна функція $f: X \to \mathbb{R}$, для якої $P_f = C$.*

5. Завершимо нашу працю розглядом деяких негативних результатів щодо задач 1а) і 2а) на тихоновських кубах незліченної ваги.

Нехай T — деяка множина і $X = [0, 1]^T$ — відповідний тихоновський куб, який ми розглядаємо з його звичайною тихоновською топологією. Позначимо через $\mathcal{F}(T)$ сукупність усіх скінченних підмножин множини T.

Для числа $\varepsilon > 0$, множини $\tau = \{t_1, \ldots, t_n\}$ з $\mathcal{F}(T)$ і точки $x_0 \in X$ окіл $U_{\tau,\delta}(x_0) = \{x \in X : \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x(t_k) - x_0(t_k)| < \varepsilon\}$ назвемо ε-проходом з абсцисами $t_1, \ldots, t_n$ і центром x_0. Система $\{U_{\tau,\varepsilon}(x_0) : \tau \in \mathcal{F}(T),\ \varepsilon > 0\}$ утворює базис відкритих околів точки x_0 в тихоновській топології на X.

Лема 8. *Околи $U_1 = U_{\tau_1,\varepsilon_1}(x_1)$ і $U_2 = U_{\tau_2,\varepsilon_2}(x_2)$ не перетинаються тоді і тільки тоді, коли існує така точка $t_0 \in \tau_1 \cap \tau_2$, що $|x_1(t_0) - x_2(t_0)| \geqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.*

Доведення. Припустимо, що для кожного $t \in \tau_1 \cap \tau_2 = \tau$ виконується нерівність $|x_1(t) = x_2(t)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Тоді для кожного $t \in \tau$ між числами $x_1(t)$ і $x_2(t)$ можна знайти таке число $x_3(t)$, що $|x_3(t) - x_1(t)| < \varepsilon_1$ і $|x_3(t) - x_2(t)| < \varepsilon_2$. Поклавши $x_3(t) = x_1(t)$ при $t \in \tau_1 \setminus \tau$, $x_3(t) = x_2(t)$ при $t \in \tau_2 \setminus \tau$ і визначивши $x_3(t)$ при $t \in T \setminus (\tau_1 \cup \tau_2)$ довільним чином, лише щоб $x_3(t) \in [0, 1]$, одержимо $x_3 \in U_1 \cap U_2$, отже, $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Навпаки, якщо деяка точка x_3 належить як U_1, так і U_2, то для кожного $t \in \tau_1 \cap \tau_2$ маємо $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant |x_1(t) - x_3(t)| + |x_3(t) - x_2(t)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

В наступній лемі і далі через $x|_{T_0}$ позначено звуження функції $x \in X$ на множину $T_0 \subseteq T$.

Лема 9. *Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ — функція першого класу Бера на тихоновському кубі $X = [0, 1]^T$ і $x_0 \in X$. Тоді існує така не більш ніж зчисленна підмножина T_0 множини T, що для довільної функції $x \in X$ з умови $x|_{T_0} = x_0|_{T_0}$ випливає $f(x) = f(x_0)$.*

Доведення. Нехай $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ для кожного $x \in X$ і $f_n : X \to \mathbb{R}$ — неперервні функції. Для кожного натурального числа k і кожного номера n існує такий $\delta_n^{(k)}$-прохід $U_n^{(k)} = U_{\tau_n^{(k)},\delta_n^{(k)}}(x_0)$, що $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant 1/k$ для всіх $x \in U_n^{(k)}$. Поклавши $T_0 = \bigcup\limits_{k,n} \tau_n^{(k)}$, одержимо деяку не більш ніж зчисленну множину. Нехай $x|_{T_0} = x_0|_{T_0}$. Тоді, очевидно, $x \in U_n^{(k)}$ для кожних k і n, отже, для всіх k і n маємо $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant 1/k$. Перейшовши в цій нерівності до границі спочатку при $n \to \infty$, а потім при $k \to \infty$, одержимо $f(x) = f(x_0)$.

Для доведення основних результатів цього пункту нам будуть потрібні ще деякі теоретико-множинні поняття, які введені нами у зв'язку з дослідженням задач 1а) і 2а) для тихоновських кубів, але мають і самостійний інтерес (див. також [12, с. 185]).

Нехай $\mathcal{A}$ — деяка система множин. Множину $M = \bigcup \{A : A \in \mathcal{A}\}$ назвемо тілом системи $\mathcal{A}$. Для будь-якої множини B систему множин $\mathcal{A}$ називатимемо віялом з ядром B або, коротше, B-віялом, якщо для довільних A_1 і A_2 з $\mathcal{A}$ з умови $A_1 \neq A_2$ випливає $A_1 \cap A_2 \subseteq B$. Якщо B-віяло $\mathcal{A}_1$ є частиною системи $\mathcal{A}$, то будемо говорити, що $\mathcal{A}_1$ є B-віялом в $\mathcal{A}$. Ми говоримо, що B-віяло $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}$ можна продовжити, якщо існує така множина $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_1$, що система $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \{A\}$ також є B-віялом.

Лема 10. *Нехай $\mathcal{A}$ — деяка система скінченних множин, кожна з яких має не більше ніж l елементів, і тіло M цієї системи нескінченне. Тоді існує така скінченна множина $B \subseteq M$ і така нескінченна система $\tilde{\mathcal{A}}$, яка є B-віялом в $\mathcal{A}$.*

Доведення. Покажемо спочатку, що існує така скінченна множина $B \subseteq M$, що кожне скінченне B-віяло в $\mathcal{A}$ можна продовжити. Нехай це не так. Тоді для кожної скінченної підмножини B існує скінченне B-віяло в $\mathcal{A}$, яке не можна продовжити. Почнемо з порожньої системи $\mathcal{A}_0 = \varnothing$ та її тіла $B_0 = \varnothing$. Нехай $\mathcal{A}_1$ — скінченне B_0-віяло в $\mathcal{A}$, яке не можна продовжити, а B_1 — його тіло, яке, зрозуміло, є скінченною множиною. Розглянемо скінченне B_1-віяло $\mathcal{A}_2$ в $\mathcal{A}$, яке не можна продовжити, і його тіло B_2. Здійснивши $l + 1$ таких переходів, одержимо послідовність систем $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{l+1}$ в $\mathcal{A}$ і послідовність скінченних множин $B_0, B_1, \ldots, B_{l+1}$ такі, що B_k є тілом системи $\mathcal{A}_k$, яка є скінченне B_{k-1}-віяло в $\mathcal{A}$, що його не можна продовжити. Покажемо, що тоді $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}_{l+1}$ і $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_{l+1}$. Зафіксуємо якесь $k = 1, \ldots$

..., $l+1$. Оскільки B_{k-1}-віяло $\mathcal{A}_k$ не можна продовжити, то для будь-якого $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_k$ знайдеться таке $A_k \in \mathcal{A}_k$, що $A \cap A_k \not\subseteq B_{k-1}$, і тим більше $A \cap B_k \not\subseteq B_{k-1}$, бо $A_k \subseteq B_k$. Але для будь-якого A з $\mathcal{A}_{k-1}$ маємо $A \cap B_k \subseteq A \subseteq B_{k-1}$, отже, $\mathcal{A}_{k-1} \subseteq \mathcal{A}_k$, а значить, $B_{k-1} \subseteq B_k$. Множина B_{l+1} скінченна, а M нескінченна, тому існує $\widetilde{A} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{l+1}$. Тоді $\widetilde{A} \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_k$ для кожного $k = 1, \ldots, l+1$, отже, $\widetilde{A} \cap B_k \not\subseteq B_{k-1}$ або інакше $\widetilde{A} \cap (B_k \setminus B_{k-1}) \neq \varnothing$ для кожного номера $k = 1, \ldots, l+1$. Звідси випливає, що множина $\widetilde{A} \in \mathcal{A}$ має більше ніж l елементів, що не можливо за умовою.

Доведемо тепер твердження леми. Візьмемо таку скінченну множину $B \subseteq M$, що кожне скінченне B-віяло в $\mathcal{A}$ можна продовжити. Порожня система $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ є скінченним B-віялом в $\mathcal{A}$. Її можна продовжити до одноелементного B-віяла $\widetilde{\mathcal{A}}_1$, а його в свою чергу до двохелементного B-віяла $\widetilde{\mathcal{A}}_2$ і т. д. Система $\widetilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mathcal{A}}_n$ буде нескінченним B-віялом в $\mathcal{A}$.

Центральне місце в доведенні основних результатів цього пункту займає наступне твердження.

Лема 11. *Нехай $X = [0, 1]^T$ — тихоновський куб, $x_0 \in X$, $f: X \to \mathbb{R}$ і R — незчисленна підмножина T така, що для будь-якого $x \in X$ з умови $x|_{T \setminus R} = x_0|_{T \setminus R}$ випливає $f(x) = f(x_0)$. Тоді $P_f \neq \{x_0\}$.*

Доведення. Припустимо, що $P_f = \{x_0\}$. Ми можемо вважати, що $0 \notin R$. Для кожного $r \in R$ виберемо число $\lambda_r \neq 0$ так, що $0 \leqslant x_0(r) + \lambda_r \leqslant 1$, і покладемо $x_r = x_0 + \lambda_r e_r$, де $e_r(t) = 0$ при $t \neq r$ і $e_r(r) = 1$. Маємо $x_r \neq x_0$, але $x_r|_{T \setminus \{r\}} = x_0|_{T \setminus \{r\}}$, отже, тим більше $x_r|_{T \setminus R} = x_0|_{T \setminus R}$, тому $f(x_r) = f(x_0)$. Оскільки $P_f = \{x_0\}$, то коливання $\omega_f(x_0) = \eta > 0$ і $\omega_f(x_r) = 0$ для кожного $r \in R$. Візьмемо такий окіл $U_r = U_{\tau_r, \delta_r}(x_r)$, що коливання $\omega_f(U_r) < \eta/6$. Зауважимо, що обов'язково $r \in \tau_r$, адже якби $r \notin \tau_r$, то точка x_0 належала б U_r, і тоді б $\omega_f(x_0) \leqslant \omega_f(U_r)$, оскільки U_r — відкрита множина, а отже, $\omega_f(x_0)$ було б меншим від η, що неможливо. Позначимо через $|\tau|$ кількість елементів множини $\tau \in \mathcal{F}(T)$ і введемо для натуральних m і n множини

$$R_{m,n} = \{r \in R : \delta_r \geqslant 1/m \text{ і } |\tau_r| \leqslant n\}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup_{m,n} R_{m,n} = R$, тому існують такі m_0 і n_0, що множина $R_0 = R_{m_0,n_0}$ незчисленна. Розглянемо тепер систему $\mathcal{A} = \{\tau_r : r \in R_0\}$. Оскільки $r \in \tau_r$ для кожного $r \in R_0$, то $\bigcup_{r \in R_0} \tau_r \supseteq R_0$, отже, тіло системи $\mathcal{A}$ нескінченне. Крім того, $|\tau_r| \leqslant n_0$ для кожного $r \in R_0$. Тому до системи $\mathcal{A}$ можна застосувати лему 10. Отже, існує така множина $\tau_0 \in \mathcal{F}(T)$ і така послідовність $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ точок з R_0, що $\tau_{r_{k'}} \neq \tau_{r_{k''}}$ при $k' \neq k''$ і система $\{\tau_{r_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є τ_0-віялом. Ми можемо вважати, що $r_k \notin \tau_0$ для кожного k, адже тими r_k в послідовності, які входять в τ_0 (їх скінченне число), можна нехтувати. Покладемо тепер $\delta_0 = 1/m_0$ і $U_0 = U_{\tau_0, \delta_0}(x_0)$. Існує така точка $\widetilde{x} \in U_0$, що $|f(\widetilde{x}) - f(x_0)| \geqslant \eta/3$, адже в іншому випадку коливання $\omega_f(x_0) \leqslant \omega_f(U_0) \leqslant 2\eta/3 < \eta$, що суперечить вибору η. Розглянемо тепер окіл $\widetilde{U} = U_{\widetilde{\tau}, \widetilde{\delta}}(\widetilde{x})$, для якого $\omega_f(\widetilde{U}) < \eta/6$. Якщо $x \in \widetilde{U}$, то $|f(x) - f(x_0)| \geqslant |f(\widetilde{x}) - f(x_0)| - |f(\widetilde{x}) - f(x)| > \eta/3 - \eta/6 = \eta/6$. Якщо ж $x \in U_r$, то $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f(x_r)| < \eta/6$. Отже, для кожного $r \in R$ маємо $\widetilde{U} \cap U_r = \varnothing$, зокрема для кожного x $\widetilde{U} \cap U_{r_k} = \varnothing$. Згідно з лемою 9 для кожного k існує точка $t_k \in \widetilde{\tau} \cap \tau_{r_k}$ така, що $|\widetilde{x}(t_k) - x_{r_k}(t_k)| \geqslant \widetilde{\delta} + \delta_{r_k}$. Покажемо, що $t_k \notin \tau_0$. Якщо $t_k \in \tau_0$, то $t_k \neq r_k$, а значить, $x_{r_k}(t_k) = x_0(t_k)$. Тоді $|\widetilde{x}(t_k) - x_0(t_k)| = |\widetilde{x}(t_k) - x_{r_k}(t_k)| \geqslant \widetilde{\delta} + \delta_{r_k} >$

$> \delta_{r_k} \geqslant \delta_0$, а це суперечить тому, що $\widetilde{x} \in U_0$. Оскільки система $\{\tau_{r_k} : k \in \mathbb{N}\}$ є τ_0-віялом і точки $t_k \in \tau_{r_k} \setminus \tau_0$, то всі точки t_k різні. Разом з тим, за побудовою, $\{t_1, \ldots, t_k, \ldots\} \subseteq \widetilde{\tau}$. А це суперечить тому, що множина $\widetilde{\tau}$ скінченна. Ця суперечність і доводить лему.

Тепер перейдемо до основних результатів.

Теорема 8. *Нехай $X = [0, 1]^T$ — тихоновський куб, для якого множина T незчисленна і x_0 — довільна точка з X. Тоді не існує функції першого класу Бера на X, для якої $P_f = \{x_0\}$.*

Доведення. Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ — функція першого класу Бера. Згідно з лемою 9 виберемо не більш ніж зчисленну множину $T_0 \subseteq T$ таку, що для кожного $x \in X$, для якого $x|_{T_0} = x_0|_{T_0}$, маємо $f(x) = f(x_0)$. Множина $R = T \setminus T_0$ незчисленна. Застосувавши лему 11, одержимо $P_f \neq \{x_0\}$.

Зауважимо, що кожна одноточкова множина є замкненою і ніде не щільною в тихоновському кубі $X = [0, 1]^T$, але, коли T незліченна, не є G_δ-множиною в X. Таким чином, теорема 8 показує, що умова досконалої нормальності в теоремі 1 істотна і не може бути замінена компактністю.

Наступна теорема дає негативну відповідь на одну проблему Пьотровського [11].

Теорема 9. *Нехай $X = [0, 1]^T$ і $Y = [0, 1]^S$ — тихоновські куби, причому множина T незчисленна, і $z_0 = (x_0, y_0)$ — довільна точка з добутку $Z = X \times Y$. Тоді не існує такої функції $f : Z \to \mathbb{R}$, для якої функція $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ неперервна і $P_f = \{z_0\}$.*

Доведення. Припустимо, що така функція f існує. Ми можемо вважати, що $T \cap S = \varnothing$. Розглянемо тихоновський куб $\widetilde{Z} = [0, 1]^{T \cup S}$. Відображення $j : \widetilde{Z} \to Z$, $j(\widetilde{z}) = (\widetilde{z}|_T, \widetilde{z}|_S)$ є гомеоморфізмом. Покладемо $\widetilde{f} = f \circ j$ і $\widetilde{z}_0 = j^{-1}(z_0)$. Зрозуміло, що $P_{\widetilde{f}} = \{\widetilde{z}_0\}$. Застосувавши до функції $f_{y_0} : X \to \mathbb{R}$ лему 9, виберемо таку не більш ніж зчисленну множину $T_0 \subseteq T$, що для будь-якого $x \in X$ з умови $x|_{T_0} = x_0|_{T_0}$ випливає $f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$. Покладемо $R = T \setminus T_0$. Тоді $(T \cup S) \setminus R = T_0 \cup S$. Якщо $\widetilde{z} \in \widetilde{Z}$ і $\widetilde{z}|_{T_0 \cup S} = \widetilde{z}_0|_{T_0 \cup S}$, то, поклавши $j(\widetilde{z}) = (x, y)$, одержимо $x|_{T_0} = x_0|_{T_0}$ і $y = y_0$, отже $\widetilde{f}(\widetilde{z}) = f(x, y) = f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$. Оскільки R — незчисленна, то на основі леми 11, застосованої до функції $\widetilde{f}$, будемо мати $P_{\widetilde{f}} \neq \{\widetilde{z}_0\}$, що приводить до суперечності.

Зауваження. Як зазначив С. П. Гулько, теорему 8 можна було б довести інакше, використавши замість лем 9 і 11 інший результат [12, с. 187], з допомогою якого легко одержати, що для функції першого класу Бера $f : [0, 1]^T \to \mathbb{R}$ існує зчисленна множина $T_0 \subseteq T$ і функція $g : [0, 1]^{T_0} \to \mathbb{R}$ такі, що $f = g \circ p_{T_0}$, де $p_{T_0} : [0, 1]^T \to [0, 1]^{T_0}$ — звичайна проекція. Оскільки p_{T_0} — відкрите неперервне відображення, то f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли g неперервна в точці $p_{T_0}(x_0)$. Звідси зразу випливає, що коли функція f розривна в точці x_0, то вона буде розривною в усіх точках з прообразу $p_{T_0}^{-1}(p_{T_0}(x_0))$.

1. *Namioka J.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math.— 1974.— **51**, N 2.— P. 515—531.
2. *Young G., Young W.* Discontinuous functions continuous with respect to every straigt line // Quart. J. Pure Appl. Math.— 1909.— **41**.— P. 87—93.
3. *Kershner R.* The continuity of function on many variables // Trans. Amer. Math. Soc.— 1943.— 53.— P. 83—100.
4. *Feiock R. E.* Cluster sets and joint continuity // J. London Math. Soc.— 1973.— **7**.— P. 397—406.
5. *Grande Z.* Une caracterisation des ensembles des points de discontinuite des function linearement-continues // Proc. Amer. Math. Soc.— 1975.— **52**.— P. 257—262.
6. *Мирзоян М. М.* О предельных множествах отображений топологических пространств // Докл. АН СССР.— 1978.— **243**, № 1.— С. 37—40.

7. *Цейтлин М. Я.* О множестве точек разрыва раздельно непрерывных функций // Мера и интеграл.— Куйбышев, 1988.— С. 147—151.
8. *Hahn H.* Reelle Funktionen. 1. Teil. Punktfunktionen.— Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1932.— 415 S.
9. *Breckenridge J. C., Nishiuzu T.* Partial continuity, quasicontinuity and Baire spaces // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica.— 1976.— 4, N 2.— P. 191—203.
10. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity, II // Real Anal. Exch.— 1989.— 1990.— 15, N 1.— P. 248—258.
11. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Ibid.— 1985.—86.— 11, N 2.— P. 293—322.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М. : Мир, 1986.— 751 с.
13. *Грушка Я. І., Маслюченко В. К., Собчук О. В.* До теорем Бера і Осгуда.— Чернівці, 1990.— 12 с.— Деп. в УкрНДІНТІ, № 903-Ук90.
14. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Нарізно неперервні функції з сепарабельною множиною точок розриву.— Чернівці, 1990.—11 с.— Деп. в УкрНДІНТІ, № 902-Ук90.
15. *Окстоби Дж.* Мера и категория.— М. : Мир, 1974.— 158 с.

Одержано 06.03.92