УДК 517.986.4+517.958

І. В. Микитюк, канд. фіз.-мат. наук,
А. К. Прикарпатський, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Редукція і геометричне квантування

Побудована конструкція, яка дозволяє за процедурою геометричного квантування, реалізованою для гамільтонової системи з симетріями, геометрично проквантувати редуковану гамільтонову систему (знайти дискретний спектр і відповідні власні функції, якщо такі знайдені для вихідної системи). Ця конструкція застосована для геометричного квантування системи, одержаної редукцією гамільтонової системи, яку визначає геодезичний потік на n-вимірній сфері.

Построена конструкция, которая позволяет по процедуре геометрического квантования, реализованной для гамильтоновой системы с симметриями, геометрически проквантовать редуцированную гамильтонову систему (найти дискретный спектр и соответственные собственные функции, если таковы найдены для исходной системы). Эта конструкция применена для геометрического квантования системы, полученной редукцией гамильтоновой системы, определяемой геодезическим потоком на n-мерной сфере.

Між гамільтоновими динамічними системами, які допускають симетрії, є багато важливих і цікавих. Серед них чільне місце займають геодезичні потоки і потоки гороциклів на поверхнях постійної кривини [1—4]. Такі потоки допускають редукцію, тобто еквівалентний перехід до потоку на просторі меншої розмірності. В даній роботі реалізована процедура геометричного квантування для гамільтонового потоку, який одержується редукцією геодезичного потоку на n-вимірній сфері. В п. 1 розроблена редукція процедури геометричного квантування для широкого класу інваріантних комплексних поляризацій. Такій редукції у випадку, коли поляризація є вертикальною поляризацією на кодотичному розшаруванні, присвячена робота [5]. В п. 2 одержані результати застосовані до геодезичного потоку на сфері, який геометрично проквантований в [6].

1. Геометричне квантування. 1. *Метод редукції.* Надалі нам будуть потрібні деякі відомості про гамільтонові дії груп [7, 8]. Нехай (M, Ω) — симплектичний многовид розмірності $2n$, G — зв'язна група Лі з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$, яка діє на M симплектичними дифеоморфізмами. Для кожного $\xi \in \mathfrak{g}$ через $\bar{\xi}$ позначимо векторне поле на M, породжене однопараметричною підгрупою $\exp t\xi \in G$. Відображення $\xi \mapsto \bar{\xi}$ є антигомоморфізмом алгебр Лі. Дія групи Лі G на M називається гамільтоновою, коли існує еквіваріантний гомоморфізм $\xi \mapsto J_{\xi}$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$ в алгебру $C^{\infty}(M)$ (відносно дужки Пуассона) такий, що $\bar{\xi}$ — гамільтонове векторне поле функції J_ξ. Еквіваріантність гомоморфізму означає, що $J_\xi(g^{-1}x) = J_{\mathrm{Ad}(g)\xi}(x)$ для всіх $\xi \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, $x \in M$. Гамільтонова дія G на M визначає відображення моменту $J: M \to \mathfrak{g}^*$, $J(x)(\xi) = J_\xi(x)$. Коли $\mu \in \mathfrak{g}^*$ — слабо регулярне значення відображення J, то прообраз $J^{-1}(\mu) \subset M$ є імерсованим підмноговидом в M і $T_x J^{-1}(\mu) = \mathrm{Ker}\, J_*(x)$, $x \in J^{-1}(\mu)$. Нехай G_μ — стаціонарна група елемента μ відносно коприєднаної дії G на $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}_\mu$ — алгебра Лі групи Лі G_μ. Через $\bar{\mathfrak{g}}_\mu(x)$ (відповідно $\bar{\mathfrak{g}}(x)$) позначимо підпростір в $T_x M$, породжений векторами $\bar{\xi}(x)$, де $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$ (відповідно $\xi \in \mathfrak{g}$). Тоді [7]

$$\bar{\mathfrak{g}}_\mu(x) = \bar{\mathfrak{g}}(x) \cap T_x J^{-1}(\mu), \quad T_x J^{-1}(\mu)^\perp = \bar{\mathfrak{g}}(x), \tag{1}$$

де «$\perp$» — Ω-ортогональне доповнення в $T_x M$. Із еквіваріантності відображення J випливає, що многовид $J^{-1}(\mu)$ інваріантний відносно дії G_μ і можна коректно визначити простір орбіт $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ з природною проекцією π_μ.

Теорема (Марсден, Вейнстейн [7]). *Нехай задана гамільтонова дія зв'язної групи Лі G на (M, Ω), $\mu \in \mathfrak{g}^*$ — слабо регулярне значення J і дія групи Лі $G_\mu \subset G$ на $J^{-1}(\mu)$ вільна і власна. Тоді існує єдина диференційовна структура на M_μ така, що $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \to M_\mu$ є субмерсією і існує єдина симплектична структура Ω_μ на M_μ така, що $\pi_\mu^* \Omega_\mu = i_\mu^* \Omega$, де $i_\mu : J^{-1}(\mu) \to M$ — вкладення.*

Якщо H — G-інваріантний гамільтоніан на (M, Ω) і X_H — його гамільтонове векторне поле, то $X_H^\mu = (\pi_\mu)_* X_H$ — коректно визначене гамільтонове векторне поле на M_μ з функцією Гамільтона $H_\mu : M_\mu \to \mathbb{R}$, $H \circ i_\mu = H_\mu \circ \pi_\mu$.

2. Предквантування. Квантове розшарування L над (M, Ω) — це комплексне лінійне розшарування $l: L \to M$ зі зв'язністю ∇ такою, що $\mathrm{curv}\, \nabla = -h^{-1} l^* \Omega$, де h — постійна Планка. Зв'язність ∇ на L задається формою зв'язності α на L^*, де L^* — асоційоване з розшаруванням L його головне $\mathbb{C}^*$-розшарування, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $d\alpha = \mathrm{curv}\, \nabla$.

Нехай $\Gamma(L)$ — простір всіх гладких перерізів $\sigma: M \to L$ розшарування L, тобто $(l \circ \sigma)(x) = x$ для всіх $x \in M$. Процедура предквантування ставить у відповідність векторному полю Z на M оператор $\nabla_Z : \Gamma(L) \to \Gamma(L)$, а функції f з гамільтоновим векторним полем X_f оператор $\tilde{f} = -i\hbar \nabla_{X_f} + f$ на $\Gamma(L)$, $\hbar = h/2\pi$ [9].

Існує узагальнення редукції Марсдена — Вейнстейна на випадок квантових розшарувань [5]. Викладемо коротко його суть. Нехай $\mathcal{L}_\mu = L \,|\, J^{-1}(\mu)$ — лінійне комплексне розшарування (обмеження L на підмноговид $J^{-1}(\mu)$), $i_\mu^L : \mathcal{L}_\mu \to L$ — вкладення. Тоді $(i_\mu^L)^* \alpha$ — форма зв'язності на головному $\mathbb{C}^*$-розшаруванні $\mathcal{L}_\mu^*$, яку ми надалі позначатимемо $\bar{\alpha}$. У довільної точки $x \in J^{-1}(\mu)$ існує її окіл $U \in J^{-1}(\mu)$ такий, що $l^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}$, тобто одержуємо локальні координати, в яких $\bar{\alpha} = \alpha' + (2\pi i z)^{-1} dz$, де α' — диференціальна 1-форма на U.

Для довільного векторного поля Y на $J^{-1}(\mu)$ через Y_L позначимо його горизонтальний ліфт, тобто єдине векторне поле на $\mathcal{L}_\mu^*$ таке, що $\alpha(Y_L) = 0$ і $l_*(Y_L) = Y$. Відображення $\xi \to \bar{\xi}_L$, де $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$, є антигомоморфізмом в силу того що $\bar{\mathfrak{g}}_\mu(x) \in \mathrm{Ker}\, i_\mu^* \Omega$ [5]. Тому можемо задати дію алгебри Лі $\mathfrak{g}_\mu$ на $\mathcal{L}_\mu^*$ (горизонтальними векторними полями $\bar{\xi}_L$, $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$, які надалі позначатимемо ξ_L). Так як $\bar{\xi}$ — повне векторне поле на $J^{-1}(\mu)$, то з локального запису $\bar{\alpha}$ випливає, що і ξ_L — повне векторне поле на $\mathcal{L}_\mu^*$. Допустимо, що група Лі G_μ зв'язна і її дія на $J^{-1}(\mu)$ вільна і власна. Тоді дія алгебри Лі $\mathfrak{g}_\mu$ на $\mathcal{L}_\mu^*$ (горизонтальними векторними полями) продовжується до дії G_μ на $\mathcal{L}_\mu^*$ тоді і тільки тоді, коли група голономій головного разшарування $\mathcal{L}_\mu^*$ тривіальна. Група голономій $\mathcal{L}_\mu^*$ ізоморфна групі голономій головного $\mathbb{C}$-розшарування $L^* | G_\mu \cdot x$ над орбітою будь-якої точки $x \in J^{-1}(\mu)$ [5]. Оскільки дотичний простір до орбіти $G_\mu \cdot u$ де $u \in \mathscr{L}_\mu^*$, породжений горизонтальними векторними полями ξ_L, то з теореми єдиності для звичайних диференціальних рівнянь і $\mathbb{C}^*$-інваріантності форми $\bar{\alpha}$ випливає $z(G_\mu \cdot u) = G_\mu \cdot (zu)$, де $z \in \mathbb{C}^*$. Дія G_μ на $J^{-1}(\mu)$ вільна, тому така вона і на $\mathscr{L}_\mu^*$, тобто кожна з орбіт $G_\mu \cdot u$ перетинає простір $l^{-1}(l(u))$ рівно в одній точці. А значить, простір орбіт $L_\mu = \mathscr{L}_\mu / G_\mu$ має структуру комплексного лінійного розшарування. Нехай $\pi_\mu^L : \mathscr{L}_\mu \to L_\mu$ і $l_\mu : L_\mu \to M_\mu$ — відповідні проекції. Форма $\bar{\alpha}$ на $\mathscr{L}_\mu^*$ G_μ-інваріантна: $\mathscr{L}_{\xi_L} \bar{\alpha} = \xi_L \rfloor d\bar{\alpha} = -h^{-1} l^* (\bar{\xi} \rfloor \Omega) = 0$ і $\xi_L \rfloor \bar{\alpha} = 0$. Тому коректно визначена єдина форма α_μ на L_μ^* така, що $(\pi_\mu^L)^* \alpha_\mu = i_\mu^* \alpha$. Форма α_μ є формою зв'язності головного $\mathbb{C}^*$-розшарування L_μ^* і $d\alpha_\mu = -h^{-1} l_\mu^* \Omega_\mu$ [5], а значить, (L_μ, l_μ, M_μ) є квантовим розшаруванням.

Розглянемо на L_μ простір $\Gamma(L_\mu)$ всіх гладких перерізів $\sigma_\mu : M_\mu \to L_\mu$. Тоді $\Gamma(L_\mu)$ ізоморфно просторові $\bar{\Gamma}(L_\mu^*)$ функцій $\bar{\sigma}_\mu : L_\mu^* \to \mathbb{C}$ таких, що $\bar{\sigma}_\mu(zv) = z^{-1} \bar{\sigma}_\mu(v)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^*$, $v \in L_\mu^*$. Ізоморфізм задається відображенням $\bar{\sigma}_\mu \mapsto \sigma_\mu$, $\sigma_\mu(l_\mu(v)) = \bar{\sigma}_\mu(v) v$. Диференціювання вздовж горизонтальних векторних полів на L_μ зберігає простір функцій $\bar{\Gamma}(L_\mu^*)$, тому коректним є означення $\overline{\nabla_Y(\sigma_\mu)} = Y_L(\bar{\sigma}_\mu)$, де Y — векторне поле на M_μ.

Нехай $\bar{\Gamma}(\mathscr{L}_\mu^*, G_\mu) = (\pi_\mu^L)^* (\bar{\Gamma}(L_\mu^*))$, $\bar{\sigma} = \bar{\sigma} \circ \pi_\mu^L$. Оскільки $\pi_\mu^L(zu) = z\pi_\mu^L(u)$, де $u \in \mathscr{L}_\mu^*$, то $\bar{\sigma} \in \bar{\Gamma}(\mathscr{L}_\mu^*)$. Таким чином, функція $\bar{\sigma}$ визначає переріз $\sigma \in \Gamma(\mathscr{L}_\mu)$, $\sigma(l(u)) = \bar{\sigma}(u) u$, інваріантний відносно дії G_μ на $\mathscr{L}_\mu^*$. Множину всіх таких перерізів позначимо через $\Gamma(\mathscr{L}_\mu, G_\mu)$. В силу викладеного вище, існує ізоморфізм $\Phi : \Gamma(L_\mu) \to \Gamma(\mathscr{L}_\mu, G_\mu)$, причому для $f \in C^\infty(M_\mu)$, $\Phi(f\sigma_\mu) = (f \circ \pi_\mu)\sigma$.

Нехай Z — G_μ-інваріантне векторне поле на M, обмеження $\bar{Z}$ якого на $J^{-1}(\mu)$ задовольняє умову $\bar{Z}(x) \in T_x J^{-1}(\mu)$ в кожній точці $x \in J^{-1}(\mu)$. Так як $\bar{\mathfrak{g}}_\mu(x)$ — ядро форми $i_\mu^* \Omega(x)$, то для $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$, $u \in \mathscr{L}_\mu^*$, $x = l(u)$:

$$\bar{\alpha}([\bar{Z}_L, \xi_L])(u) = -d\bar{\alpha}(\bar{Z}_L, \xi_L)(u) = h^{-1}(l^*\Omega)(\bar{Z}_L, \xi_L)(u) = h^{-1}\Omega(Z, \bar{\xi})(x) = 0,$$

а значить, $[\bar{Z}_L, \xi_L]$ — горизонтальне векторне поле. В силу того, що $[\bar{Z}, \bar{\xi}]\ (x) = 0$ маємо $[\bar{Z}_L, \xi_L]\ (u) = 0$, тобто $\bar{Z}_L$ — G_μ-інваріантне векторне поле. Тоді коректно визначена проекція $(\pi_\mu^L)_* \bar{Z}_L$, причому $\alpha_\mu((\pi_\mu^L)_* \bar{Z}_L) = ((\pi_\mu^L)^* \alpha_\mu)(\bar{Z}_\mu) = \alpha(\bar{Z}_L) = 0$. Іншими словами, $(\pi_\mu^L)_* \bar{Z}_L = ((\pi_\mu)_* \bar{Z})_L$. Тепер виходячи з означення коваріантної похідної, можемо записати ланцюжок рівнянь

$$\overline{\nabla_{(\pi_\mu)_* \bar{Z}} \sigma_\mu} = ((\pi_\mu)_* \bar{Z})_L \bar{\sigma}_\mu = ((\pi_\mu^L)_* \bar{Z}_L)(\bar{\sigma}_\mu) = \bar{Z}_L \bar{\sigma} = \overline{\Phi^{-1}(\nabla_{\bar{Z}} \sigma)}.$$

Твердження 1. *Нехай виконані умови теореми Марсдена—Вейнстейна для M, Ω, G, $\mu \in \mathfrak{g}^*$, група G_μ зв'язна, $l : L \to M$ — квантове розшарування над M з формою зв'язності α, група голономій головного $\mathbb{C}^*$-розшарування $\mathscr{L}_\mu^* = L^* | J^{-1}(\mu)$ тривіальна. Тоді* $\nabla_{\bar{Z}} = \Phi \nabla_{(\pi_\mu)_* \bar{Z}} \Phi^{-1}$ *і* $\tilde{H} = \Phi \tilde{H}_\mu \Phi^{-1}$ *на просторі* $\Gamma(\mathscr{L}_\mu, G_\mu) \simeq \Gamma(L_\mu)$. *Для* $\xi \in \mathfrak{g}_\mu\ \nabla_{\bar{\xi}}(\Gamma(\mathscr{L}_\mu, G_\mu)) = 0$.

3. Розшарування пів-P-форм. Нехай $P : x \mapsto P(x) \subset (T_x M)^{\mathbb{C}}$ — поляризація на (M, Ω), тобто P — гладкий інволютивний n-вимірний комплексний розподіл на M такий, що $\dim (P \cap \bar{P}) = k$, $\Omega(P, P) = 0$. Для будь-якого локально тривіального розшарування $\pi : E \to M$ над M зі стандартним шаром F і відкритого околу $U \subset M$ через $\Gamma(E, U)$ позначимо множину всіх гладких локальних перерізів $\delta : U \to E$, $(\pi \circ \delta)(x) = x$, $x \in U$. Коли E — векторне розшарування, то будемо говорити, що локальний переріз δ ненульовий, якщо $\delta(x) \neq 0$ для всіх $x \in U$. Векторне поле $Z \in \Gamma(TM)$ зберігає поляризацію P, якщо для довільного $X \in \Gamma(P)$ комутатор $[Z, X]$ належить $\Gamma(P)$.

Головне розшарування $\pi_P : B(M, P) \to M$ лінійних реперів в P — це головне $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-розшарування над M. Нехай $\{U^\alpha\}$ — відкрите зчисленне покриття M таке, що для кожного U^α існує локальний переріз $\delta^\alpha \in \Gamma(B(M, P), U^\alpha)$. Тоді це покриття разом з набором функцій переходу $g_{\alpha\beta} : U^\alpha \cap U^\beta \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, де $\delta^\alpha g_{\alpha\beta} = \delta^\beta$ на $U^\alpha \cap U^\beta$, повністю визначає розшарування $B(M, P)$. Нехай $\mathrm{ML}(n, \mathbb{C}) = \{\tilde{g} = (g, w) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \mid \det g = w^2\}$ — металінійна група з подвійно накриваючим відображенням $\gamma : \mathrm{ML}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\gamma(\tilde{g}) = g$ і голоморфним квадратним коренем $\chi : \mathrm{ML}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$, $\chi(\tilde{g}) = w$. Металінійне розшарування реперів $\tilde{\pi}_P : \tilde{B}(M, P) \to M$ для поляризації P — це головне $\mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$-розшарування над M з $2:1$ проекцією $\rho : \tilde{B}(M, P) \to B(M, P)$, для якої діаграма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}(M, P) \times \mathrm{ML}(n, \mathbb{C}) & \to & \tilde{B}(M, P) \\ \downarrow \rho \times \gamma & & \downarrow \rho \\ B(M, P) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) & \to & B(M, P) \end{array}$$

комутативна. Тоді існують перерізи $\tilde{\delta}^\alpha \in \Gamma(\tilde{B}(M, P), U^\alpha)$ з функціями переходу $\tilde{g}_{\alpha\beta} : \chi(\tilde{g}_{\alpha\beta})^2 = \det g_{\alpha\beta}$.

Нехай $L^P(x)$ позначає одновимірний комплексний векторний простір всіх комплекснозначних функцій f на $\tilde{\pi}_P^{-1}(x)$ таких, що $f(F\tilde{g}) = \chi(\tilde{g}^{-1}) \times f(F)$ для довільного $F \in \tilde{\pi}_P^{-1}(x)$ і $\tilde{g} \in \mathrm{ML}(n, \mathbb{C})$. Тоді $L^P = \bigcup L^P(x)$ називається комплексним розшаруванням пів-P-форм на M. Набір пів-P-форм $f^\alpha \in \Gamma(L^P, U^\alpha)$, для яких $f^\alpha \circ \tilde{\delta}^\alpha = 1$, і функцій переходу $f^{\alpha\beta} = \chi(\tilde{g}_{\alpha\beta})$ визначає розшарування L^P.

Для будь-якого розподілу A на M через $\Lambda^q(M, A)$ позначимо комплексне векторне розшарування q-ковекторів з $\Lambda^q(T^*M)^{\mathbb{C}}$, для яких виконується умова: $\forall \omega \in \Gamma(\Lambda^q(M, A))$ і $Z \in \Gamma(A)$ маємо $Z \rfloor \omega = 0$.

Відображення $\varepsilon : L^P \otimes L^P \to \Lambda^n(M, P)$ таке, що $\varepsilon(f^\alpha \otimes f^\alpha) = (W_1 \rfloor \Omega) \wedge \ldots \wedge (W_n \rfloor \Omega)$, де $(W_1, \ldots, W_n) = \rho \circ \tilde{\delta}^\alpha \in \Gamma(B(M, P), U^\alpha)$ — гладкий репер в околі U^α, є ізоморфізмом. А значить, для довільного векторного поля $Z \in \Gamma(TM)$, що зберігає поляризацію P, і функції $f \in \Gamma(L^P)$ визначена похідна Лі $\mathscr{L}_Z^{1/2} f \in \Gamma(L^P)$ по формулі $2\varepsilon(\mathscr{L}_Z^{1/2} f^\alpha \otimes f^\alpha) = \mathscr{L}_Z \varepsilon(f^\alpha \otimes f^\alpha)$.

Нехай $\theta : G_\mu \to \mathbb{C}^*$ — характер групи Лі $G_\mu \subset G$. Будемо говорити, що розшарування L^P пів-P-форм над M є (G_μ, θ)-інваріантним, якщо поляризація P G_μ-інваріантна і існує покриття $\{V^\alpha\}$ многовиду M G_μ-інваріантними околами V^α, ненульові перерізи $h^\alpha \in \Gamma(L^P, U^\alpha)$ такі, що функції переходу $h^{\alpha\beta} : V^\alpha \cap V^\beta \to \mathbb{C}^*$ $(h^\alpha h^{\alpha\beta} = h^\beta$ на $V^\alpha \cap V^\beta)$ G_μ-інваріантні і $g^* \omega^\alpha = \theta(g)\,\omega^\alpha$, де $g \in G_\mu$, $\omega^\alpha = \varepsilon(h^\alpha \otimes h^\alpha) \in \Gamma(\Lambda^n(M, P), V^\alpha)$. Зауважимо, що в цьому означенні для покриття $\{V^\alpha\}$ необов'язкове існування перерізів $\delta^\alpha \in \Gamma(B(M, P), V^\alpha)$.

Теорема 1. *Нехай розшарування L^P пів-P-форм над M є (G_μ, θ)-інваріантним, де $\theta = (\det \circ \mathrm{Ad})$, $\mu \in \mathfrak{g}^*$, виконані всі умови теореми Марсдена — Вейнстейна і додатково $G_\mu = G$. Нехай $\mathscr{P}_\mu : x \mapsto P(x) \cap (T_x J^{-1}(\mu))^{\mathbb{C}}$ — розподіл на $J^{-1}(\mu)$ розмірності $(\dim M - \dim G - \dim G_\mu)/2$, трансверсальний в кожній точці $x \in J^{-1}(\mu)$ розподілу $\bar{\mathfrak{g}}_\mu : x \mapsto \bar{\mathfrak{g}}_\mu(x)$ і $\dim(\mathscr{P}_\mu \cap \bar{\mathscr{P}}_\mu) = k'$. Тоді на M_μ існує поляризація P_μ, $P_\mu = (\pi_\mu)_* \mathscr{P}_\mu$, і відповідне їй розшарування пів-P_μ-форм L^{P_μ}. Для покриття $\{V_\mu^\alpha = \pi_\mu(V^\alpha \cap J^{-1}(\mu))\}$ існують ненульові перерізи $h_\mu^\alpha \in \Gamma(L^{P_\mu}, V_\mu^\alpha)$, для яких функції переходу $h_\mu^{\alpha\beta}$ однозначно визначаються рівнянням $\pi_\mu^* h_\mu^{\alpha\beta} = i_\mu^* h^{\alpha\beta}$. Більше того, якщо Z — G-інваріантне векторне поле на M, яке зберігає поляризацію P, в* *точках з* $J^{-1}(\mu)$ *дотичне до* $J^{-1}(\mu)$, Z_μ — *векторне поле на* M_μ, *визначене рівнянням* $(\pi_\mu)_*(Z \mid J^{-1}(\mu)) = Z_\mu$, *то похідні Лі* $\mathcal{L}_Z^{1/2} h^\alpha = F h^\alpha$, $\mathcal{L}_{Z_\mu}^{1/2} h_\mu^\alpha = F_\mu h_\mu^\alpha$ *зв'язані таким чином:* $i_\mu^* F = \pi_\mu^* F_\mu$.

Доведення. Нагадаємо, що довільний гладкий розподіл $\mathring{A}$ розмірності d над многовидом Q, $\dim Q = q$ локально задається як спільне ядро $(q-d)$ незалежних диференціальних форм, і розподіл $\mathring{A}$ інволютивний тоді і тільки тоді, коли ідеал $\mathcal{J}(\mathring{A}) \subset \Lambda(T^*Q)^{\mathbb{C}}$, який анулює $\mathring{A}$, є диференціальним ідеалом (замкнутий відносно оператора зовнішнього диференціювання [10]). Так як $TJ^{-1}(\mu) = \operatorname{Ker} J_* \mid J^{-1}(\mu)$ і в деякому околі множини $J^{-1}(\mu)$ ранг відображення J постійний (максимальний), то розподіл $\mathcal{P}_\mu$ на $J^{-1}(\mu)$ гладкий і інволютивний.

Розглянемо в околі V^α диференціальну $(n-p)$-форму $\bar{\omega}^\alpha = \bar{\xi}_1 \lrcorner \ldots \lrcorner \bar{\xi}_p \lrcorner \omega^\alpha$, де $\xi_1, \ldots, \xi_p$ — фіксований базис в $\mathfrak{g}_\mu$. Оскільки за означенням для $g \in G_\mu$, $X \in \Gamma(TM)$, $\omega \in \Gamma(\Lambda^k(T^*M))$: $g^*(X \lrcorner \omega) = g_*^{-1} X \lrcorner g^*\omega$, а $g_* \bar{\xi} = \overline{\operatorname{Ad}(g^{-1})\xi}$, де $\xi \in \mathfrak{g}$, то $g^* \bar{\omega}^\alpha = \bar{\omega}^\alpha$.

Виберемо базис $W_1, \ldots, W_{n-p}$ в просторі $\mathcal{P}_\mu(x)$, $x \in V^\alpha \cap J^{-1}(\mu)$ і доповнимо його векторами $W_{n-p+1}, \ldots, W_n$ до базису в $P(x)$. Оскільки $\omega^\alpha \in \Gamma(\Lambda^n(M, P), V^\alpha)$ — ненульовий переріз то $\omega^\alpha(x) = C(x)(W_1 \lrcorner \Omega(x)) \wedge \ldots \wedge (W_n \lrcorner \Omega(x))$, де $C(x) \neq 0$. З (1) випливає, що вектори $\bar{\xi}_1(x), \ldots, \bar{\xi}_p(x)$ належать простору $(T_x J^{-1}(\mu))^\perp$. Тому $\bar{\omega}^\alpha(x) = C(x)(-1)^{(n-p)p}(dJ_{\xi_1}(x) \wedge \ldots \wedge dJ_{\xi_p}(x))(W_{n-p+1}, \ldots, W_n)(W_1 \lrcorner \Omega(x)) \wedge \ldots \wedge (W_{n-p} \lrcorner \Omega(x))$. Тепер, використовуючи трансверсальність просторів $\bar{\mathfrak{g}}_\mu(x)$ і $\mathcal{P}_\mu(x)$, незалежність $dJ_{\xi_k}(x)$, $k = \overline{1, p}$ на $P(x)/\mathcal{P}_\mu(x)$, одержуємо, що $(n-p)$-форма $i_\mu^* \bar{\omega}^\alpha$ на $J^{-1}(\mu)$ ненульова, а для довільного $\xi \in \mathfrak{g}_\mu : \bar{\xi} \lrcorner i_\mu^* \bar{\omega}^\alpha = 0$. Тому на M_μ в околі V_μ^α існує ніде не нульова диференціальна $(n-p)$-форма $\omega_\mu^\alpha \in \Gamma(\Lambda^{n-p}(M_\mu, P_\mu))$, яка однозначно визначається рівнянням $\pi_\mu^* \omega_\mu^\alpha = i_\mu^* \bar{\omega}^\alpha$. Неважко бачити, що в околі $V_\mu^\alpha \cap V_\mu^\beta : \omega_\mu^\alpha (h_\mu^{\alpha\beta})^2 = \omega_\mu^\beta$. Покриття $\{V_\mu^\alpha\}$ і функції переходу $h_\mu^{\alpha\beta} : V_\mu^\alpha \cap V_\mu^\beta \to \mathbb{C}^*$ визначають комплексний одновимірний розподіл L_k^P на M_μ. Оскільки на M_μ існує невироджена 2-форма $\Omega_\mu : \pi_\mu^* \Omega_\mu = i_\mu^* \Omega$ і зчисленне покриття $\{V_\mu^\alpha\}$, то існують головні розшарування $B(M_\mu, P_\mu)$ і $\tilde{B}(M_\mu, P_\mu)$, для яких $L_\mu^P = L^{P_\mu}$.

Доведемо останнє твердження теореми. Нехай $\mathcal{L}_Z \omega^\alpha = F \omega^\alpha$, де $F \in C^\infty(V^\alpha, \mathbb{C})$. Оскільки $g^*(\mathcal{L}_Z \omega^\alpha) = \mathcal{L}_{(g_*^{-1} Z)}(g^* \omega^\alpha) = \det(\operatorname{Ad} g)(\mathcal{L}_Z \omega^\alpha)$, то F — G_μ-інваріантна функція на V^α. З доведених вище властивостей форми $i_\mu^* \bar{\omega}^\alpha$ і формули $\mathcal{L}_{\bar{\xi}} \bar{\omega}^\alpha = d(\bar{\xi} \lrcorner \bar{\omega}^\alpha) + \bar{\xi} \lrcorner (d\bar{\omega}^\alpha)$ випливає, що $\bar{\xi} \lrcorner d\bar{\omega}^\alpha = 0$ на $J^{-1}(\mu)$, $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$. І навпаки, коли $W \in \Gamma(\bar{\mathfrak{g}}_\mu)$, то з цієї ж формули одержуємо $\mathcal{L}_W \bar{\omega}^\alpha = 0$ на $J^{-1}(\mu)$. Для векторного поля Y на V^α, яке дотикається $J^{-1}(\mu)$ в точках з $J^{-1}(\mu) \cap V^\alpha$, через $\bar{Y}$ позначимо векторне поле $Y \mid J^{-1}(\mu)$. Неважко бачити, що $i_\mu^*(\mathcal{L}_Y \omega) = \mathcal{L}_{\bar{Y}}(i_\mu^* \omega)$, де $\omega \in \Gamma(\Lambda(T^*M), V^\alpha)$ $(\mathcal{L}_Y = d \circ i_Y + i_Y \circ d)$. Значить,

$$i_\mu^* \mathcal{L}_Z \bar{\omega}^\alpha = \mathcal{L}_{\bar{Z}}(i_\mu^* \bar{\omega}^\alpha) = \mathcal{L}_{\bar{Z} + \bar{W}}(i_\mu^* \bar{\omega}^\alpha) = \pi_\mu^*(\mathcal{L}_{Z_\mu} \omega_\mu^\alpha).$$

Тепер з формули $\mathcal{L}_\mu(\bar{\xi} \lrcorner \omega) = \bar{\xi} \lrcorner (\mathcal{L}_Z \omega) + [Z, \bar{\xi}] \lrcorner \omega$ і G-інваріантності векторного поля Z ($[Z, \bar{\xi}] = 0$ для довільного $\xi \in \mathfrak{g}$) випливає $\mathcal{L}_Z \bar{\omega}^\alpha = F \bar{\omega}^\alpha$, тобто $i_\mu^* F = \pi_\mu^* F_\mu$.

Зауваження. Теорема сформульована і доведена так, що легко узагальнюється на випадок, коли $G_\mu \neq G$, G діє вільно на M і існує $\operatorname{Ad} G_\mu$-інваріантний комплексний підпростір $\mathfrak{a}_\mu \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ розмірності $l =$

$= (\dim G + \dim G_\mu)/2$ з базисом $\eta_1, \ldots, \eta_l$. Тоді в якості $\overline{\omega}^\alpha$ треба взяти форму $\overline{\eta}_1 \lrcorner \ldots \lrcorner \overline{\eta}_l \lrcorner \omega^\alpha$.

4. Геометричне квантування. Збережемо всі позначення, введені в попередніх пунктах. Розглянемо простір $L \otimes L^P$. Для кожного векторного поля $Z \in \Gamma(TM)$, яке зберігає поляризацію P, визначимо лінійний оператор δ_Z на $\Gamma(L) \otimes \Gamma(L^P): \delta_Z(\sigma \otimes f) = (\nabla_Z \sigma) \otimes f + \sigma \otimes (\mathcal{L}_Z^{1/2} f)$. Переріз $\gamma \in \Gamma(L) \otimes \Gamma(L^P)$ називається P-горизонтальним, якщо $\delta_Z(\gamma) = 0$ для всіх $Z \in \Gamma(P)$. На просторі $\mathcal{H}$ всіх P-горизонтальних перерізів для функції $H \in C^\infty(M)$ з гамільтоновим векторним полем X_H, яке зберігає поляризацію P, коректно визначений лінійний оператор (квантовий оператор) $\hat{H} = -i\hbar\delta_{X_H} + H$. Якщо на L існує ∇-інваріантна ермітова структура $\langle , \rangle$, тобто для довільних $\sigma, \sigma' \in \Gamma(L)$, $X \in \Gamma(TM): X\langle \sigma, \sigma' \rangle = \langle \nabla_X \sigma, \sigma' \rangle + \langle \sigma, \nabla_X \sigma' \rangle$, а простір M/D інтегральних многовидів дійсного розподілу D, де $D^{\mathbb{C}} = P \cap \overline{P}$, є фактор-многовидом, то на $\mathcal{H}$ існує скалярний добуток, відносно якого $\hat{H}$ є симетричним оператором.

2. Геометричне квантування гамільтонових систем на T^*S^m. 1. Позначення. Нехай $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ — кодотичне розшарування над $\mathbb{R}^{n+1}$, з координатами $(x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1})$, $\langle , \rangle$ — позначає канонічний скалярний добуток в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тоді кодотичне розшарування до n-вимірної сфери $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — це підмноговид $T^*S^n = \{(x, y) \in T^*\mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1, \langle x, y \rangle = 0\}$. Невироджена замкнена 2-форма Ω, яка задає симплектичну структуру на T^*S^n — це точна форма $\Omega = \Sigma dy_j \wedge dx_j$, $\Omega = d\lambda$, де $\lambda = \Sigma y_j dx_j$. Геодезичний потік на T^*S^n задається функцією Гамільтона $H(x, y) = \langle y, y \rangle / 2$. Її гамільтонове векторне поле X_H визначається рівнянням $dH = -X_H \lrcorner \Omega$ і дорівнює $X_H = yX - \langle y, y \rangle xY$, де $X_j = \partial/\partial x_j$, $Y_j = \partial/\partial y_j$, $X = (X_1, \ldots, X_{n+1})$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ і $uX = \Sigma u_j X_j$ для $u = (u_1, \ldots, u_{n+1})$, аналогічно визначається uY.

Розглянемо групу Лі $G = T_1 \times \ldots \times T_p$, ізоморфну p-вимірному тору T^p, з 2π-періодичними координатами $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$. Задамо дію $\theta_k: T_k \times T^*S^n \to T^*S^n$ тора T_k, $k = \overline{1, p}$, таким чином. Нехай $\theta_k(\varphi_k, x, y) = (x^{(k)}, y^{(k)})$, де у векторів $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ всі координати, крім $(2k-1)$- і $2k$-ї, такі як у векторів x, y, а $x_{2k-1}^{(k)} + ix_{2k}^{(k)} = e^{i\varphi_k}(x_{2k-1} + ix_{2k})$, $y_{2k-1}^{(k)} + iy_{2k}^{(k)} = e^{i\varphi_k}(y_{2k-1} + iy_{2k})$. Ця дія G на T^*S^n залишає інваріантною канонічну 1-форму λ, а значить, і 2-форму Ω. Більше того, ця дія є гамільтоновою. Векторним полям $\xi_k(x, y) = x_{2k-1}X_{2k} - x_{2k}X_{2k-1} + y_{2k-1}Y_{2k} - y_{2k}Y_{2k-1}$, $k = \overline{1, p}$, породженим однопараметричними підгрупами $\theta_k(\varphi_k)$ відповідають функції Гамільтона $\Phi_k(x, y) = x_{2k-1}y_{2k} - x_{2k}y_{2k-1}$. Група Лі G комутативна, залишає Гамільтоніан H інваріантним, тому векторні поля ξ_k, $k = \overline{1, p}$, X_H комутують на T^*S^n, а функції Φ_k, $k = \overline{1, p}$, G-інваріантні.

2. Редукція. Розглянемо в T^*S^n підмножини $Q_k = \{(x, y) \in T^*S^n \mid x_{2k-1} = x_{2k} = y_{2k-1} = y_{2k} = 0\}$, $k = \overline{1, p}$; $D = \{(x, y) \in T^*S^n \mid x_{2k-1}y_{2k-1} + x_{2k}y_{2k} = 0, (x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2)\langle y, y \rangle = y_{2k-1}^2 + y_{2k}^2, k = \overline{1, p}; x_{2p+1} = \ldots = x_{n+1} = y_{2p+1} = \ldots = y_{n+1} = 0\}$. Нехай $S^n = \{(x, y) \in T^*S^n \mid \langle y, y \rangle = 0\}$. Неважко перевірити, що відкритий підмноговид $M \subset T^*S^n$, $M = T^*S^n \setminus \{Q_1 \cup \ldots \cup Q_p \cup D \cup S^n\}$ інваріантний відносно потоку X_H і дії групи Лі G. Більше того, дія G на M вільна і власна.

Розглянемо підмноговид $J^{-1}(\mu) = \{(x, y) \in M \mid \Phi_k(x, y) = \mu_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, p}\}$. По теоремі Марсдена — Вейнстейна $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G$ — гладкий симплектичний многовид з 2-формою Ω_μ. Нехай всі μ_k, $k = \overline{1, p}$, відмінні від нуля. Тоді, вводячи локальні координати $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, x_1', \ldots, x_{m+1}', y_1', \ldots, y_{m+1}', \mu_1, \ldots, \mu_p)$, $m = n - p$, в околі точки $(x, y) \in J^{-1}(\mu): x_{2k-1} + ix_{2k} = e^{i\varphi_k}x_k'$, $y_{2k-1} + iy_{2k} = e^{i\varphi_k}(y_k' + i\mu_k/x_k')$, $k = \overline{1, p}$; $x_{2p+j} = x_{p+j}'$,

$y_{2p+j} = y'_{p+j}$, $j = \overline{1, m+1-p}$, одержуємо, що M_μ — відкрита підмножина $\{(x, y) \in T^*S^m \mid x_k > 0,\ k = \overline{1, p},\ H_\mu(x, y) \neq 0;\ y \neq 0$ або $\mu_j^2 \neq 2H_\mu x_j^4$ для деякого $1 \leqslant j \leqslant m+1\}$, а Ω_μ — стандартна симплектична структура на $M_\mu \subset T^*S^m$. В цій області редукований гамільтоніан H_μ має вигляд $H_\mu(x, y) = \Sigma (y_j^2 + \mu_j^2/x_j^2)/2$, а його гамільтонове векторне поле

$$X_H^\mu(x, y) = \sum (y_j X_j - \langle y, y\rangle x_j Y_j + (\mu_j^2/x_j^3) Y_j) - \left(\sum \mu_j^2/x_j^2\right) xY,$$

де сумування проводиться по всіх $j = \overline{1, m+1}$ і покладаємо $\mu_{p+1} = \ldots$ $\ldots = \mu_{m+1} = 0$.

3. Квантове розшарування. Оскільки форма Ω на M точна, то існує тривіальне квантове розшарування L на M з проекцією l: $L = M \times \mathbb{C} \to M$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ і формою зв'язності α на $L^* = M \times \mathbb{C}^*$: $: \alpha = -h^{-1} l^* \lambda + (2\pi i z)^{-1} dz$. Тоді простір $\Gamma(L)$ можемо ототожнити з простором $C^\infty(M)$. При цьому коваріантна похідна ∇_X, де $X \in \Gamma(TM)$, визначається формулою $\nabla_X f = Xf - i\hbar^{-1}\lambda(X) f$, $f \in C^\infty(M)$. На M_μ форма Ω_μ також точна, тому існує аналогічне квантове розшарування $l_\mu : L_\mu = M_\mu \times$ $\times \mathbb{C} \to M_\mu$ над M_μ.

Визначимо при яких значеннях $\mu \in \mathbb{R}^p$ можлива редукція по групі G розшарування $\mathcal{L}_\mu = L \mid J^{-1}(\mu)$. Неважко переконатися, що в локальних координатах, введених вище, обмеження 1-форми λ на $J^{-1}(\mu)$ набуде вигляду $\beta'_\mu = \sum_{k=1}^{p} \mu_k d\varphi_k + \sum_{j=1}^{m+1} y'_j dx'_j$, а форма зв'язності β_μ на $\mathcal{L}_\mu^* = J^{-1}(\mu) \times \mathbb{C}^*$ запишеться у вигляді $\beta_\mu = -h^{-1}\beta'_\mu + (2\pi i z)^{-1} dz$. Звідси видно, що група голономій $\mathcal{L}_\mu^*$ тривіальна тоді і тільки тоді, коли $\hbar^{-1}\mu_k \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, p}$ $((\partial/\partial\varphi_k)_L = \partial/\partial\varphi_k + h^{-1}\mu_k i z \partial/\partial z)$. Лінійний простір $\Gamma(\mathcal{L}_\mu, G)$ G-інваріантних перерізів складається з функцій виду $[\exp(i\hbar^{-1}(\mu_1\varphi_1 + \ldots + \mu_p\varphi_p))] \times$ $\times f(x', y')$.

4. Поляризації. В даному пункті будемо використовувати позначення, введені в. п. 1, і поляризацію P на T^*S^n, яка побудована в [6] для квантування геодезичного потоку на T^*S^n. Опишемо її. Нехай F_j, $j = \overline{1, n+1}$, — векторні поля на $T^*\mathbb{R}^{n+1}$, визначені формулами $F_j(x, y) =$ $= X_j + i\psi Y_j$, де $\psi = -\langle y, y\rangle^{1/2}$. Для $(x, y) \in M$ і $v = (v_1, \ldots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ такого, що $\langle v, x\rangle = \langle v, y\rangle = 0$, векторне поле $vF = \Sigma v_j F_j$ дотикається до M. Нехай P — розподіл, породжений гамільтоновим векторним полем X_H і полями vF, де вектор-функція $v(x, y)$ задовольняє умову $\langle v, x\rangle = \langle v, y\rangle = 0$. Ідеал $\mathcal{J}(P) \subset \Lambda(T^*M)$ породжується 1-формами $d\psi$, $\Sigma v_j (dy_j - i\psi dx_j)$, тому є диференціальним ідеалом, $P \cap \overline{P}$ — одномірний розподіл, породжений полем X_H, $\Omega(P, P) = 0$. Значить, P — поляризація на M. Можна перевірити, що P інваріантна відносно дії групи Лі G і при довільних $\mu \in \mathbb{R}^p$ задовольняє умови теореми 1 (саме так вибиралась множина M). Тоді поляризація P_μ з теореми 1 на $M_\mu \subset T^*S^m$ породжується гамільтоновим векторним полем X_H^μ і полями $V_\mu(x, y) = \Sigma v_j (X_j + (i\psi_\mu + \mu_j^2/$ $/(x_j^3 (y_j - i\psi_\mu x_j))) Y_j)$, де вектор-функція $v(x, y)$ задовольняє умови $\langle v, x\rangle = 0$ і $\Sigma v_j (y_j + \mu_j^2/(x_j^2 (y_j - i\psi_\mu x_j))) = 0$ (сумування проводиться по всіх $1 \leqslant j \leqslant$ $\leqslant m+1$), $\psi_\mu = -(2H_\mu)^{1/2}$.

5. Розшарування пів-P_μ-форм. Виберемо в околі U^α точки $(x, y) \in M$ вектор-функції $v_\alpha^a : U^\alpha \to \mathbb{R}^{n+1}$, $a = \overline{1, n-1}$, так, щоб вектори $(x, -\psi^{-1}y, v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^{n-1})$ складали матрицю з $SO(n+1)$. Тоді ненульова форма $(X_H \lrcorner \Omega) \wedge (v_\alpha^1 F \lrcorner \Omega) \wedge \ldots \wedge (v_\alpha^{n-1} F \lrcorner \Omega) = \omega^\alpha$ належить $\Gamma(\Lambda^n(M,$ $P), U^\alpha)$. А оскільки матриці переходу від базису $\{v_\alpha^a\}$ до базису $\{v_\beta^a\}$ мають визначник рівний одиниці, то n-форми ω^α задають одну глобальну не-

нульову n-форму $\omega \in \Gamma(\Lambda^n(M, P))$. За теоремою 1 існує (також тривіальне) розшарування L^{P_μ} пів-P_μ-форм над M_μ з ненульовим перерізом ν_μ. Оскільки $\mathcal{L}_{X_H}\omega = -i(n-1)\psi\omega$ і $\mathcal{L}_{vF}\omega = 0$, де $\langle v, x\rangle = \langle v, y\rangle = 0$ [6], то за цією ж теоремою $\mathcal{L}^{1/2}_{X^\mu_H}\nu_\mu = (-i(n-1)\psi_\mu/2)\nu_\mu$ і $\mathcal{L}^{1/2}_{V_\mu}\nu_\mu = 0$, $\psi_\mu = -(2H_\mu)^{1/2}$.

6. Квантування. Нехай $D'(M_\mu)$ — простір узагальнених функцій (густин) на M_μ. Розглянемо простір $\Gamma_\mu = \Gamma(L_\mu) \otimes D'(M_\mu) \otimes \Gamma(L^{P_\mu})$. Згідно з доведеним $D'(M_\mu)$ можна ототожнити з $\Gamma_\mu : T \mapsto 1 \otimes T \otimes \nu_\mu$. Тоді переріз $1 \otimes T \otimes \nu_\mu$ буде P_μ-горизонтальним тоді і тільки тоді, коли

$$X^\mu_H(T) - i\hbar^{-1}\langle y, y\rangle T - i2^{-1}(m+p-1)\psi_\mu T = 0,$$

$$V_\mu(T) + i\hbar^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{p} v_k\mu_k^2/(x_k^2(y_k - i\psi_\mu x_k))\Big)T = 0,$$

де для векторного поля $Z \in \Gamma(TM)$ похідна Лі ZT визначається так: $(ZT)(A) = -T(\mathcal{L}_Z A)$, A — довільна гладка $2m$-форма на M_μ з компактним носієм.

Нехай $M^c_\mu = \{(x, y) \in M_\mu \mid \psi_\mu(x, y) = c\}$. Довільна гладка $2m$-форма на M_μ має вигляд $f\Omega^m_\mu$, де $f \in C^\infty(M_\mu)$. Нехай f^c позначає обмеження функції f на підмноговид M^c_μ, ω^c_μ — обмеження $(2m-1)$-форми $\eta \lrcorner \Omega^m_\mu$, де $\eta(x, y) = (yX - xX)/2 \in \Gamma(TM_\mu)$, на M^c_μ. Якщо $T_c \in D'(M^c_\mu)$, то визначимо $\overline{T}_c \in D'(M_\mu)$ формулою $\overline{T}_c(f\Omega^m_\mu) = T_c(f^c\omega^c_\mu)$. Оскільки $\eta \lrcorner d\psi^2_\mu = \psi^2_\mu$, то для $c \neq 0$ форма ω^c_μ ніде не дорівнює нулю на M^c_μ і для довільного векторного поля Z такого, що $d\psi_\mu(Z) = 0$, маємо $\overline{(ZT_c)} = Z\overline{T}_c$.

Лема. *Лінійний простір $\mathcal{H}_\mu$ всіх P_μ-горизонтальних перерізів з Γ_μ має вигляд $\mathcal{H}_\mu = \oplus \mathcal{H}^c_\mu$, де $\mathcal{H}^c_\mu$ — простір P_μ-горизонтальних перерізів з Γ_μ виду $1 \otimes \overline{T}_c \otimes \nu_\mu$, $T_c \in D'(M^c_\mu)$. Простір $\mathcal{H}^c_\mu$ нетривіальний тоді і тільки тоді, коли $n_k = |\hbar^{-1}\mu_k| \in \mathbb{Z}$ і $c = -\hbar(N + n_1 + \ldots + n_p + (m + p - 1)/2)$, де $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 0$. В цьому випадку $\mathcal{H}^c_\mu = \Big\{1 \otimes \overline{T}_c \otimes \nu_\mu \mid T_c = \sum_{|K|_p = N} a_K R_\mu Z^K\Big\}$, де $a_k \in \mathbb{C}$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_{m+1})$, $Z_j = (x_j + ic^{-1}y_j)^2 - c^{-2}\mu_j^2/x_j^2$, $j = \overline{1, p}$, і $Z_j = x_j + ic^{-1}y_j$, коли $j = \overline{p+1, m+1}$; $R_\mu = \prod_{k=1}^{p}(x_k + ic^{-1}y_k - c^{-1}|\mu_k|/x_k)^{n_k}$, $K = (k_1, \ldots, k_{m+1})$, $|K|_p = 2k_1 + \ldots + 2k_p + k_{p+1} + \ldots + k_{m+1}$.*

Коли формально покласти $p = 0$, сформульована лема співпаде з лемою 3 із роботи [6]. Тоді, порівнюючи простір всіх P-горизонтальних перерізів в $\Gamma(L) \otimes D'(M) \otimes \Gamma(L^P)$ з одержаним вище простором $\Gamma(\mathcal{L}_\mu, G)$ (див. твердження 1), знайдемо кандидати в P_μ-горизонтальні перерізи в $\Gamma(L_\mu) \otimes D'(M_\mu) \otimes \Gamma(L^{P_\mu})$ при $|\hbar^{-1}\mu_k| \in \mathbb{Z}$. Залишається довести, що інших перерізів в цьому випадку немає. При $|\hbar^{-1}\mu_k| \notin \mathbb{Z}$ виписані функції будуть локальними P_μ-горизонтальними перерізами.

Ясно, що розмірність $\dim \mathcal{H}^c_\mu = A(N, m+1, p)$ не рівна числу розкладів N в суму $2k_1 + \ldots + 2k_p + k_{p+1} + \ldots + k_{m+1}$ невід'ємних цілих чисел $(Z_1 + \ldots + Z_p + Z^2_{p+1} + \ldots + Z^2_{m+1} = 0)$. За процедурою, яку ми описали в п. 1 (п. 4) маємо $\widehat{H}_\mu = -i\hbar\delta_{X^\mu_H} + H_\mu$. Оскільки $2H_\mu = \psi^2_\mu$, то оператор $\widehat{H}_\mu$, обмежений на підпростір $\mathcal{H}^c_\mu$ — це оператор множення на $c^2/2$. Як в роботі [6] в лінійному просторі $\mathcal{H}_\mu$ можна ввести скалярний добуток, відносно якого $\mathcal{H}^{c_1}_\mu$ і $\mathcal{H}^{c_2}_\mu$ ортогональні при $c_1 \neq c_2$, а $\widehat{H}_\mu$ — симетричний.

Теорема 2. *Гамільтонова система на T^*S^m, $m \geqslant 2$, з гамільто-*

ніаном $H_\mu = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m+1}(y_j^2 + \mu_j^2/x_j^2)$ *геометрично квантується за допомогою поляризації* P_μ. *Відповідний квантовий гамільтоніан* $\widehat{H}_\mu$ *має* $\hbar^2(N + |\hbar^{-1}\mu_1| + \ldots + |\hbar^{-1}\mu_{m+1}| + (m + p - 1)/2)^2/2$, *де* p — *число ненульових координат вектора* $(\mu_1, \ldots, \mu_{m+1})$, $|\hbar^{-1}\mu_k| \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, p}$, *своїм* N-*м* $(N \geqslant 0)$ *власним значенням кратності* $A(N, m + 1, p)$.

Зауваження. Коли ми проквантуємо систему на T^*S^m з гамільтоніаном H_μ за Діраком, тобто обмежимо квантовий оператор $\widehat{H}$ на підпростір власних векторів операторів $\widehat{\Phi}_k$, $k = \overline{1, p}$, з відповідними власними значеннями μ_k, то одержимо той же результат, що і в теоремі 2 (власні значення операторів $\widehat{\Phi}_k$ описані в [6] і належать $\hbar\mathbb{Z}$). Але оскільки власні функції в обох випадках не є гладкими, то прямого переходу (без обчислення власних функцій) можливо немає.

1. *Парасюк О. С.* Потоки гороциклов на поверхностях постоянной кривизны // Успехи мат. наук.— 1953.— 8, № 3.— С. 125—126.
2. *Манаков С. В.* Замечание об интегрируемости уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела // Функцион. анализ.— 1976.— **10**, № 4.— С. 93—94.
3. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, № 5.— С. 109—151.
4. *Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.* Цепочка Тоды как редуцированная система // Теорет. и мат. физика.— 1980.— **45**, № 1.— С. 3—18.
5. *Gotay M. J.* Constraints, reduction, and quantization // J. Math. Phys.— 1986.— **27**, N 8.— P. 2051—2066.
6. *Ii K.* Geometric quantization for the mechanics on spheres // Tohoku Math. J.— 1981.— **33**.— P. 289—295.
7. *Marsden J., Weinstein A.* Reduction of symplectic manifolds with symmetry // Repts Math. Phys.— 1974.— **5**, N 1.— P. 121—130.
8. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев : Наук. думка, 1991.— 286 с.
9. *Sniatycki J.* Geometric quantization and quantum mechanics.— New York : Springer, 1980.— 230 p.
10. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.— М. : Мир, 1970.— 412 с.

Одержано 10,06,91