УДК 517.94

Л. В. Попова, асист. (Запоріз. ун-т)

Про тривіальне диференціальне рівняння у просторах L_p, $0 < p < 1$

Наведено опис множини X_p всіх розв'язків тривіальної задачі Коші в L_p, $0 < p < 1$. Основним результатом є теорема 2, в якій стверджується, що X_p є замкнений підпростір p-банахового простору H_p всіх кривих у L_p, що задовольняють умову Гельдера з показником p і виходять із нуля, відносно p-норми, що дорівнює мінімальній константі в умові Гельдера.

Приведено описание множества X_p всех решений тривиальной задачи Коши в L_p, $0 < p < 1$. Основным результатом является теорема 2, которая утверждает, что X является замкнутым подпространством p-банахова пространства H_p всех кривых в L_p, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем p и выходящих из нуля, относительно p-нормы, равной наименьшей константе в условии Гельдера.

Легко бачити, що якщо X — топологічний векторний простір з тотальним спряженим, то тривіальна задача Коші

$$x'(t) = 0, \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

де $t \in [0, 1]$, $x : [0, 1] \to X$ та $x'(t)$ — границя відносно топології простору,

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

має тільки нульовий розв'язок (див. [1, с. 198] для метризовного X). Зокрема, це має місце у локально опуклих просторах. Перший приклад ненульового розв'язку задачі (1) було наведено в [2]. Далі Ролевич [3, с. 116] висловив гіпотезу, що ненульовий розв'язок (1) існує в кожному F-просторі з нульовим спряженим. Твердження гіпотези довів Калтон [4].

Неважко переконатися в тому, що будь-яка крива $x(t)$ в L_p, що задовольняє умову Ліпшиця

$$\| x(t) - x(s) \| \leqslant M \, | t - s |$$

при $t, s \in [0, 1]$, має нульову похідну. В п. 1 доводиться, що простір $\mathcal{L}_p$ всіх кривих Ліпшиця в L_p, які нуль перетворюють в нуль, утворює p-банахів простір відносно p-норми $|||x|||$ —мінімальної константи в умові Ліпшиця; більш того, $\mathcal{L}_p$ ізомеричний просторові $\mathcal{L}(L_p)$ всіх лінійних неперервних операторів, що діють в L_p.

У п. 2 наведено опис множини X_p всіх розв'язків (1). Ми наділяємо X_p p-нормою, що перетворює X_p у p-банахів простір, ізометричний деякому підпросторові простору H_p всіх кривих у L_p, що перетворюють нуль в нуль та задовольняють умову Гельдера з показником p, з p-нормою, яка дорівнює мінімальній константі в умові Гельдера.

Нагадаємо, що L_p, $0 < p \leqslant 1$,— це F-простір усіх класів еквівалентності вимірних на $[0, 1]$ функцій x, для яких величина

$$\| x \| = \int_{[0,1]} | x |^p d\mu \tag{2}$$

скінченна, де μ — міра Лебега на $[0, 1]$.

Функція $\|\cdot\|$, що задана на векторному просторі E над полем дійсних або комплексних чисел та приймає значення на множині дійсних чисел, називається p-нормою, $0 < p \leqslant 1$, якщо для будь-яких $x, y \in E$ виконуються умови:

1) $\| x \| \geqslant 0$, причому $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $\| x \| = | \lambda |^p \| x \|$, де λ — довільний скаляр;
3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

p-Норма $\|\cdot\|$ на E визначає лінійну метрику, інваріантну відносно зсуву: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Якщо простір E повний відносно цієї метрики, то E називається p-банаховим простором (1-банахів простір називається банаховим простором). Наприклад, L_p є p-банахів простір відносно p-норми (2).

1. Криві, що задовольняють умову Ліпшиця. Найпростішим прикладом кривої, що задовольняє умову Ліпшиця та перетворює нуль в нуль, отже, прикладом ненульового розв'язку (1) є крива $x(t) = \chi([0, t))$, де $\chi(A)$ — характеристична функція множини A.

Наступна теорема характеризує криві Ліпшиця за допомогою простору $\mathcal{L}(L_p)$. Величина $\| T \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Tx \|$ визначає p-норму на $\mathcal{L}(L_p)$, яка перетворює $\mathcal{L}(L_p)$ в p-банахів простір.

Теорема 1. *Позначимо через $\mathcal{L}_p$ множину всіх кривих Ліпшиця $x(t) : [0, 1] \to L_p$, $0 < p \leqslant 1$, таких, що $x(0) = 0$. Величина*

$$\|x\| = \sup_{0\leqslant t<s\leqslant 1} \frac{\|x(s)-x(t)\|}{s-t} =$$

$$= \inf\{M : (\forall t, s\in[0, 1])\ \|x(s)-x(t)\|\leqslant M\,|s-t|\}$$

утворює p-норму на $\mathcal{L}_p$, відносно якої простір $\mathcal{L}_p$ повний. Більш того, $\mathcal{L}_p$ ізометричний просторові $\mathcal{L}(L_p)$.

Доведення. Побудуємо відображення $U:\mathcal{L}(L_p)\to\mathcal{L}_p$, поклавши для кожного $T\in\mathcal{L}(L_p)$

$$(UT)(t) = T\chi([0, t)).$$

Відзначимо, що $(UT)(0) = 0$. Крива $(UT)(t)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $\|T\|$. Дійсно, якщо $0\leqslant t<s\leqslant 1$, то

$$\|(UT)(s)-(UT)(t)\| = \|T\chi([t, s))\|\leqslant\|T\|\,\|\chi([t, s))\| = \|T\|(s-t).$$

Далі нам потрібна лема, твердження якої при $p=1$ нам сповістив Л. Н. Гурвіц.

Лема. *Нехай $T\in\mathcal{L}(L_p)$, $0<p\leqslant 1$. Для кожного $\varepsilon>0$ існує інтервал $[t, s)$, $t<s$, для якого*

$$\|T\chi([t, s))\|\geqslant(\|T\|-\varepsilon)(s-t).$$

Доведення. Для довільного натурального n позначимо через G_n лінійну оболонку функцій

$$\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right);\qquad k=1, 2, \ldots, n.$$

Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ щільне в L_p, то для довільного фіксованого $\varepsilon>0$ можна вибрати n так, щоб $\|T_n\|\geqslant(\|T\|-\varepsilon)$, де T_n — звуження T на G_n. Для кожного

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\in G_n$$

маємо

$$\|Tx\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\left\|T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\max_k\left\|T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\| n\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{\max_k\left\|T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\|}{\left\|\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\|}\|x\|.$$

Отже,

$$\frac{\max_k\left\|T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\|}{\left\|\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\|} = \|T_n\|.$$

Далі виберемо k так, щоб

$$\left\|T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)\right)\right\| n = \|T_n\|.$$

Остаточно для $[t, s) = [(k-1)/n, k/n)$ маємо

$$\|T\chi([t, s))\| = \|T_n\|(s-t)\geqslant(\|T\|-\varepsilon)(s-t).$$

Таким чином, лема доведена. Продовжимо доведення теореми. З леми випливає, що $\|T\|$ — мінімальна константа в умові Ліпшиця для кривої $(UT)(t)$. Отже, $\|\| UT \|\| = \| T \|$. Залишилось довести, що U відображає сюр'єктивно простір $\mathscr{L}(L_p)$ на $\mathscr{L}_p$. Нехай $x \in \mathscr{L}_p$. Для функцій $y \in L_p$ вигляду

$$y = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi([t_{k-1}, t_k)), \qquad (3)$$

де $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, покладаємо

$$\hat{T}_y = \sum_{k=1}^{m} a_k (x(t_k) - x(t_{k-1})).$$

Легко бачити, що $\hat{T}$ — лінійний оператор, означений на лінійному підпросторі $E \in L_p$, що складається з усіх функцій вигляду (3), причому

$$\| \hat{T} y \| \leqslant \sum_{k=1}^{m} | a_k |^p \| x(t_k) - x(t_{k-1}) \| \leqslant \|\| x \|\| \sum_{k=1}^{m} | a_k |^p (t_k - t_{k-1}) = \|\| x \|\| \, \| y \| .$$

Оскільки E щільний в L_p, $\hat{T}$ може бути розповсюджений за лінійністю та неперервністю до деякого оператора $T \in \mathscr{L}(L_p)$. Отже, оскільки для кожного $t \in [0,1]$ $x(t) = T\chi([0, \ t))$, одержуємо $(UT)(t) = x(t)$.

Зауваження. Оператор T, який було побудовано за допомогою кривої $x(t)$ при доведенні теореми 1, можна позначати таким чином:

$$Ty = \int_0^1 y(t)\, dx(t),$$

оскільки конструкція T співпадає з інтегралом Рімана — Стільтьєса. Виявляється можливим визначити інтеграл Рімана —Стільтьєса відносно будь-якої кривої $x(t)$ в L_p, яка має скінченну варіацію, однак не для довільної функції $y \in L_p$, а тільки для $y \in L_\infty$.

2. Криві Гельдера в L_p, $0 < p \leqslant 1$, з показником p. Для кривої x в L_p з початковою умовою $x(0) = 0$, яка задовольняє умову Гельдера з показником p

$$\| x(s) - x(t) \| \leqslant M \, | s - t |^p, \qquad (4)$$

визначимо величину

$$\| x \|_{H_p} = \sup_{0 \leqslant t < s \leqslant 1} \frac{\| x(s) - x(t) \|}{(s-t)^p} .$$

Неважко переконатися в тому, що $\| x \|_{H_p}$ дорівнює мінімальній константі M в (4). Доведемо, що $\| \cdot \|_{H_p}$ визначає p-норму на лінійному просторі H_p всіх кривих Гельдера в L_p з нульовою початковою умовою. Перші дві аксіоми p-норми очевидні. Для доведення третьої достатньо помітити, що для довільних $x, y \in H_p$ та $0 \leqslant t < s \leqslant 1$ маємо

$$\frac{\| (x+y)(s) - (x+y)(t) \|}{(s-t)^p} \leqslant \frac{\| x(s) - x(t) \| + \| y(s) - y(t) \|}{(s-p)^p} \leqslant$$
$$\leqslant \| x \|_{H_p} + \| y \|_{H_p} .$$

Повнота H_p відносно p-норми $\|\cdot\|$ може бути доведена за стандартною схемою. Отже, H_p — p-банахів простір.

Позначимо через X_p лінійний простір усіх розв'язків (1).

Теорема 2. *X_p є замкненим підпростором H_p.*

Доведення. Доведемо спочатку, що $X_p \subset H_p$. Нехай $x \in X_p$; припустимо, від супротивного, що для кожного n існують числа $s_n > t_n \in$ $\in [0, 1]$ такі, що

$$\| x(s_n) - x(t_n) \| > n (s_n - t_n)^p.$$

Виберемо збіжну підпослідовність $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ з $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ та збіжну підпослідовність $\{t_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ з $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді $t_0 = \lim_j t_{m_j} < \lim_j s_{m_j} = s_0$ (рівність $t_0 = s_0$ неможлива, бо $x'(t_0) = 0$). З умови $x'(t) = 0$ випливає неперервність $x(t)$ в кожній точці $t \in [0, 1]$. Отже, з неперервності p-норми одержуємо

$$\| x(s_0) - x(t_0) \| = \lim_j \| x(s_{m_j}) - x(t_{m_j}) \|.$$

Існує номер j_0 такий, що для кожного $j \geqslant j_0$

$$\| x(s_0) - x(t_0) \| \geqslant \frac{1}{2} \| x(s_{m_j}) - x(t_{m_j}) \| \geqslant \frac{m_j}{2} (s_{m_j} - t_{m_j})^p,$$

що неможливо, оскільки права частина нерівності прямує до нескінченності при $j \to \infty$. Залишилось довести, що X_p є замкнений підпростір H_p. Нехай $x_n \in X_p$ та $\lim_n x_n = x \in H_p$. Зафіксуємо $t \in [0, 1]$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо n так, щоб $\| x - x_n \| < \varepsilon/2$. Далі виберемо $\delta > 0$ так, щоб при $0 < |\Delta t| < \delta$ та $t + \Delta t \in [0, 1]$ виконувалось

$$\frac{\| x_n(t + \Delta t) - x_n(t) \|}{(\Delta t)^p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі для фіксованого Δt маємо

$$\frac{\| x(t + \Delta t) - x(t) \|}{(\Delta t)^p} = \frac{1}{(\Delta t)^p} \| x(t + \Delta t) - x_n(t + \Delta t) +$$

$$+ x_n(t + \Delta t) - x_n(t) + x_n(t) - x(t) \| \leqslant \frac{1}{(\Delta t)^p} (\| (x - x_n)(t + \Delta t) -$$

$$- (x - x_n)(t) \| + \| x_n(t + \Delta t) - x_n(t) \|) \leqslant \| x - x_n \| +$$

$$+ \frac{\| x_n(t + \Delta t) - x_n(t) \|}{(\Delta t)^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, $x \in X_p$.

Зауваження. Оскільки $\mathcal{L}_p \subset X_p \subset H_p$, то на $\mathcal{L}_p$ визначені дві p-норми:

$$\| x \|_{H_p} \leqslant ||| x |||.$$

1. *Rolewicz S.* Metric linear spaces.— Warszawa: PWN, 1985.— 458 p.
2. *Rolewicz S.* O funkjach o pochodnej zero // Wiad. mat.— 1959.— 3.— P. 127—128.
3. *Rolewicz S.* Metric linear spaces.— Warszawa: PWN, 1972.— 287 p.
4. *Kalton N. J.* Curves with zero derivatives in *F*-spaces // Glasgow Math. J.— 1981.— 22.— P. 19—29.

Одержано 06.03.92