

УДК 517.9

А. К. Прикарпатський, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів),
Б. М. Філь, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т)

Категорія топологічних джет-многовидів та деякі застосування в теорії нелінійних нескінченновимірних динамічних систем

З метою дослідження точних скінченновимірних апроксимацій нелінійних динамічних систем на нескінченновимірних функціональних многовидах пропонується нова категорія топологічних джет-многовидів. Вивчаються диференціально-геометричні структу-

© А. К. ПРИКАРПАТСЬКИЙ, Б. М. ФІЛЬ, 1992

ри на них та їх застосування в теорії інтегровності в квадратурах нелінійних динамічних систем типу Лакса.

С целью исследования точных конечномерных аппроксимаций нелинейных динамических систем на бесконечномерных функциональных многообразиях предлагается новая категория топологических джет-многообразий. Изучаются дифференциально-геометрические структуры на них и их приложения в теории интегрируемости в квадратурах нелинейных динамических систем типа Лакса.

1. Нехай заданий деякий функціональний векторний простір $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ гладких функцій на осі \mathbb{R} . Як функціональний многовид він є нескінченновимірним, що являє собою значну трудність з точки зору його використання як фазового простору для нелінійних динамічних систем та вивчення їх інтегровності в квадратурах за Ліувіллем [1—4]. Становить також значну трудність використання [5] на нескінченновимірних многовидах диференціально-геометричних та теоретико-групових методів дослідження. Виходячи з цього пропонується нова диференціально-топологічна конструкція — категорія топологічних джет-многовидів, що є зручною саме при дослідженні інтегровності нелінійних динамічних систем на нескінченновимірних функціональних многовидах. Цю конструкцію ми також узагальнюємо на випадок нескінченновимірних супермноговидів, що широко використовуються у задачах сучасної квантової фізики та статистичної механіки.

2. Розглянемо скінченновимірний простір $\otimes \mathbb{R}^{k+1}$, $m, k \in \mathbb{Z}_+$, і в ньому довільну точку $[u^{(k)}] = (u = u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k)})$. Визначимо тепер у просторі $\otimes \mathbb{R}^{k+1}$ дію векторного поля $\frac{d}{dx} : \otimes \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \otimes T(\mathbb{R}^{k+1})$ за правилом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u^{(i)} &= u^{(i+1)}, \quad i = \overline{0, k-1}, \\ \frac{d}{dx} u^{(k)} &= g_k([u^{(k)}]), \quad [u^{(k)}]|_{x=x_0} = [u_0^{(k)}], \end{aligned} \quad (1)$$

де $g_k \in C^{(\infty)}(\otimes \mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$ — деяке гладке відображення. Якщо $\text{Or}(x_0; [u_0^{(k)}], g_k)$ — орбіта векторного поля (1) через точку $[u_0^{(k)}] \in \otimes \mathbb{R}^{k+1}$ при $x = x_0 \in \mathbb{R}$, то відображення $g_k \in C^{(\infty)}(\otimes \mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$ вибираємо, зокрема, таке, щоб орбіта $\text{Or}(x_0; [u_0^{(k)}], g_k)$ була компактною і за параметром $x \in \mathbb{R}$ глобальною. Означимо тепер топологічний k -джет $\tilde{J}_{\text{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}])$ за правилом

$$\tilde{J}_{\text{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}]) = \bigcup_{(g_k)} \overline{\text{Or}}(x_0; [u_0^{(k)}], g_k), \quad (2)$$

де топологічна сума береться по всіх відображеннях $g_k \in C^{(\infty)}(\otimes \mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$, що задовольняють наведену вище умову глобальності орбіт. Відповідно означимо тепер топологічний джет-многовид $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ як топологічну суму

$$J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) = \bigcup_{[u_0^{(k)}]} \tilde{J}_{\text{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}]). \quad (3)$$

За своєю побудовою многовид $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ гомеоморфний скінченновимірному функціональному підпростору $M^{(k+1)m} \hookrightarrow M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, інваріантним відносно векторного поля d/dx , $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо тепер узгоджений ланцюжок проєкцій інваріантних джет-многовидів

$$\mathbb{R} \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} J_{\text{top}}^{(0)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \xleftarrow{\pi} J_{\text{top}}^{(1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \xleftarrow{\pi} \dots \xleftarrow{\pi} J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \xleftarrow{\pi} \dots, \quad (4)$$

де проєкція $\pi: J_{\text{top}}^{(k+1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \rightarrow J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, визначається таким чином. Якщо $\tilde{J}_{\text{top}}^{(k+1)}(x_0; [u_0^{(k+1)}]) \in J_{\text{top}}^{(k+1)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, то для кожної орбіти

Ор ($x_0; [u_0^{(k+1)}]$), $g_{k+1} \in J_{\text{top}}^{(k+1)}(x_0; [u_0^{(k+1)}])$, що визначається відповідною системою рівнянь

$$\frac{d}{dx} u^{(i)} = u^{(i+1)}, \quad i = \overline{0, k},$$

$$\frac{d}{dx} u^{(k+1)} = g_{k+1}([u^{(k+1)}]), \quad [u^{(k+1)}]|_{x=x_0} = [u_0^{(k+1)}], \quad (5)$$

визначена однозначно також орбіта Ор ($x_0; [u_0^{(k)}]$), $g_k \in J_{\text{top}}^{(k)}(x_0; [u_0^{(k)}])$, яка інваріантна відносно векторного поля (5). А саме, повинні виконуватися тотожно на орбіті Ор ($x_0; [u_0^{(k)}]$) рівність

$$\sum_{j=0}^{k-1} u^{(j+1)} \frac{\partial g_k([u^{(k)}])}{\partial u^{(j)}} + g_k \frac{\partial g_k([u^{(k)}])}{\partial u^{(k)}} = g_{k+1}([u^{(k)}], g_k). \quad (6)$$

Рівняння (6) еквівалентне набору рівнянь в характеристиках

$$u^{(j+1)} \frac{dg_k}{du^{(j)}} = g_{k+1}([u^{(k)}], g_k), \quad j = \overline{0, k-1}, \quad (7)$$

$$g_k \frac{dg_k}{du^{(k)}} = g_{k+1}([u^{(k)}], g_k),$$

для яких необхідне існування глобального розв'язку для відображення $g_k \in C^{(\infty)}(\otimes \mathbb{R}^{k+1}; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

З наведеної вище конструкції топологічних джет-многовидів $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ видно, що ланцюжок (4) утворює ланцюжок розшарувань із побудованими вище проєкціями $\pi: g_{k+1} \rightarrow g_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, що зберігають інваріантність проєкцій орбіт Ор ($x_0; [u_0^{(k+1)}]$), g_{k+1} , $k \in \mathbb{Z}_+$, відносно векторного поля d/dx , $x \in \mathbb{R}$. Таким чином, ланцюжок проєкцій (4) визначає топологічне джет-розширення векторного поля $d/dx: \otimes \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \otimes T(\mathbb{R}^{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

тобто інваріантний нескінченновимірний джет-многовид $J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) = \text{inv} \lim_{k \in \mathbb{Z}_+} J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ як зворотну границю скінченновимірних джет-много-

видів $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Внаслідок своєї побудови ланцюжок (4) реалізує зчислення інваріантне розбиття функціонального простору $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ на скінченновимірні функціональні джет-многовиди $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{Z}_+$. Є також очевидним узагальненням описаного вище методу побудови топологічного джет-многовиду на випадок функціонального простору $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ за допомогою джет-розширення набору комутуючих векторних полів $d/dx_j: \otimes \mathbb{R}^p \rightarrow \otimes T(\mathbb{R}^p)$, $j = \overline{1, n}$, $p = \sum_{s=0}^k C_{n+s-1}^s$,

причому рівняння

$$\frac{du^{(i)}}{dx_j} = u^{(i, j)}, \quad (i) = (i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p,$$

$$\frac{du^{(k)}}{dx_j} = g^{(k)}([u^{(k)}]) \quad (8)$$

де $i < k$, $k = \overline{1, n}$, $(i; j) = (i_1, \dots, i_{j+1}, \dots, i_p) \in (i+1)$, $[u^{(k)}]|_{\{x_j = x_{i_j}\}} = [u_0^{(k)}] \in \otimes \mathbb{R}^p$, задають орбіту

$$\text{Ор}(x_0; [u_0^{(k)}], g^{(k)}) \subset J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Визначаючи проєкції $\pi: J_{\text{top}}^{(k+1)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ як у ланцюжку розшарувань (4), одержуємо топологічний джет-многовид $J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \text{inv} \lim_{(k) \in \mathbb{Z}_+^n} J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Введена вище конструктивним шляхом категорія

топологічних джет-многовидів є, очевидно, зручним об'єктом для вивчення диференціальних структур на нескінченновимірних гладких функціональних многовидах $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ з огляду їх локальної дифеоморфності. При певній же спеціалізації нескінченновимірного гладкого функціонального многовиду $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ конструкція топологічного джет-многовиду $J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ дає також можливість побудови їх глобального дифеоморфізму, що особливо важливо для аналізу властивостей динамічних систем на них.

З уваження 1. Класичний підхід [5, 6] до побудови диференціального джет-розшарування $J_{\text{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, множини гладких відображень $f, g \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ визначається класом еквівалентності вказаних відображень, при якій $f \sim g$, якщо $d^{(i)}(f-g)/dx_j^{(i)}|_{x_j=x_{j_0}} = 0$, $j = \overline{1, n}$, $|i| \leq k$. Локально многовид $J_{\text{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ — це простір многочленів Тейлора k -го порядку відображень $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси випливає, що диференціальний джет-многовид $J_{\text{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, не є інваріантним відносно векторних полів d/dx_j , $j = \overline{1, n}$, причому зовсім не визначена його глобальна топологічна структура як скінченновимірного многовиду за умови, що елемент $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ належить певному функціональному підпростору $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Також внаслідок наведеної вище побудови легко побачити, що $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \subset J_{\text{diff}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$.

З уваження 2. Досить очевидним є узагальнення описаної вище категорії топологічних джет-многовидів на випадок, коли вихідний функціональний простір $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(Q; G)$, де Q і G — відповідно n -і m -вимірний гладкі многовиди. Для цього досить розглянути описаний нами метод побудови топологічних джет-многовидів $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ як побудову локальних карт топологічних джет-многовидів $J_{\text{top}}^{(k)}(Q; G)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, визначаючи $J_{\text{top}}^{(\infty)}(Q; G) = \text{inv} \lim_{k \in \mathbb{Z}_+} J_{\text{top}}^{(k)}(Q; G)$, одержуємо

топологічний джет-многовид, що є локально-гомеоморфний вихідному функціональному підпростору $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(Q; G)$.

3. Побудувавши топологічні джет-многовиди $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, можна задати стандартним чином [7] дотичні і кодотичні простори над $J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, а саме,

$$T(J_{\text{top}}^{(\infty)}) = \text{inv} \lim_{(k) \in \mathbb{Z}_+^n} T(J_{\text{top}}^{(k)}), \quad T^*(J_{\text{top}}^{(\infty)}) = \text{inv} \lim_{(k) \in \mathbb{Z}_+^n} T^*(J_{\text{top}}^{(k)}), \quad (9)$$

а також модуль векторних полів $\mathcal{T}(J_{\text{top}}^{(\infty)})$ і алгебру Грасмана $\Lambda(J_{\text{top}}^{(\infty)})$ диференціальних форм. На многовиді $J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ визначені канонічні векторні поля $\frac{d}{dx_j} \in \mathcal{T}(J_{\text{top}}^{(\infty)})$, $j = \overline{1, n}$, причому в локальних координатах їх форма така:

$$\frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,k} u_i^{(k;j)} \frac{\partial}{\partial u_i^{(k)}}, \quad (10)$$

де частинна похідна $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$, включена в (10) для випадку розширеного топологічного джет-многовиду $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n \times J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, який природно враховує можливу явну неоднорідність за параметрами $x_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, певних диференціально-геометричних структур на вихід-

ному функціональному просторі $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. При цьому $\{x_j; u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(k)}, \dots\}$ — локальні координати на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, де за побудовою

$$\frac{d}{dx_j} u_i^{(k)} = u_i^{(k+1;j)} \in \{u_i^{(k+1)}\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Алгебра Грасмана $\Lambda(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^i(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$, де $\Lambda^i(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$ — \mathbb{R} -модуль диференціальних i -форм, $i \in \mathbb{Z}_+$, на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, утворює стандартний комплекс де-Рама

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d} \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^i \xrightarrow{d} \Lambda^{i+1} \xrightarrow{d} \dots, \quad (11)$$

який є точним згідно з d -лемою Пуанкаре [8], і де операція $d: \Lambda^i \rightarrow \Lambda^{i+1}$ у (8), $i \in \mathbb{Z}_+$ — зовнішнє диференціювання (антидиференціювання порядку $+1$) алгебри Грасмана $\Lambda(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$.

Внаслідок своєї конструкції многовид $J_{\text{top}}^{(k)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, локально параметризований точками $\{x\} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, які будемо надалі називати незалежними змінними. Відповідно до цього розкладемо модуль $\Lambda^j(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, у пряму суму підмодулів: $\Lambda^j = \bigoplus_{(k=\overline{0, j})} \Lambda^{(j-k|k)}$, де, за означенням, $\Lambda^{(j|k)} = \Lambda^j(J_{\text{top}}^{(\infty)}) \wedge \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$. Задамо тепер таку [9] операцію $\mathcal{D}: \Lambda^{(j|k)} \rightarrow \Lambda^{(j|k+1)}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, згідно з правилом

$$\mathcal{D}\alpha = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge L \frac{d}{dx_j} \alpha, \quad (12)$$

де $\alpha \in \Lambda^{(j|k)}$, $L_K = i_K d + di_K$ — похідна Лі [7 — 11] вздовж векторного поля $K: \tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)} \rightarrow T(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$, i_K — звичайне внутрішнє антидиференціювання по $K \in \mathcal{T}(\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)})$.

Операцію (12) характеризує наступна теорема.

Теорема 1. Для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$ комплекс

$$0 \rightarrow \delta_{j,0} \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^{(j|0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(j|1)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \dots \rightarrow \Lambda^{(j|k)} \rightarrow \dots \quad (13)$$

є точним, причому справедлива формула $d\mathcal{D} + \mathcal{D}d = 0$.

Доведення теореми 1 ґрунтується на наступній лемі гомотопії типу Пуанкаре.

Лема 1. Нехай $\alpha \in \Lambda^{(j|k)}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, — довільна $(j+k)$ -форма на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Тоді

$$\alpha[x; u] = \mathcal{D}H(\alpha)[x; u] + H(\mathcal{D}\alpha)[x; u], \quad (14)$$

де оператор гомотопії $H: \Lambda^{(j|k)} \rightarrow \Lambda^{(j|k-1)}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$, визначається за правилом [12]

$$H(\alpha)[x; u] = \sum_{|k| \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s=1}^n \sum_{(l)} \int_0^1 d\lambda D_x^{|k|} \left\langle v_i \frac{\partial}{\partial x_s} \omega_i, \frac{\partial P_l[x; \lambda u]}{\partial u^{(k,s)}} \right\rangle \Big|_{\sigma=u}, \quad (15)$$

де, за визначенням $\alpha[x; u] = \sum_{(l)} \omega_l P_l[x; u]$, $\omega_l \in \Lambda^{(j|k)}$, $l = \overline{1, C_n^k}$, — відповідний базис $(k+1)$ -форм, $D_x^{|k|} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d}{dx_i} - \partial_{x_i} \right)^{k_i}$, $\sum_{i=1}^n k_i = |k|$, причому

$\partial_x v = 0$, $\partial_{x_i} \alpha[x; u] = d\alpha[x; u]/dx_i$ для всіх $x \in \mathbb{R}^n$.

Для доведення лемі 1 зауважимо, що внаслідок тотожності

$$\left[\frac{\partial}{\partial u^{(k;s)}} , \frac{d}{dx_s} \right] = \frac{\partial}{\partial u^{(k)}} , \quad s = \overline{1, n}, \quad \text{справедливе співвідношення}$$

$$H(\mathcal{D}\alpha)[x; u] = \alpha[x; u] -$$

$$- \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s, m}^n \sum_{(l)}^1 \int_0^1 d\lambda \frac{d}{dx_m} D_x^{[kl]} \langle v dx_m \wedge i_{\frac{\partial}{\partial x_s}} \omega_l, \frac{\partial P_l[x; \lambda u]}{\partial u^{(k;s)}} \rangle \Big|_{v=u} =$$

$$= \alpha[x; u] - \sum_{m=1}^n dx_m \wedge \frac{d}{dx_m} H(\alpha)[x; u]. \quad (16)$$

Таким чином, з (16) знаходимо, що для довільної $(k + j)$ -форми $\alpha[x; u] \in \Lambda^{(j|k)}$ справедлива формула (14), що й треба було встановити.

З а у в а ж е н н я 3. При виведенні (14) ми скористались формулою гомотопії по векторному полю Ліувілля на джет-многовиді $\tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, що вимагає «зірчастості» [6—9] многовиду $\{x\} \times J_{\text{top}}^{(\infty)}$ для кожного $x \in \mathbb{R}^n$.

Тепер з урахуванням леми 1 твердження теореми 1 стає очевидним. Якщо форма $\alpha \in \Lambda^{(j|k)}$ замкнена, то при $k = 0, n - 1, j \in \mathbb{Z}_+$, комплекс (13) буде точним, тобто якщо $\mathcal{D}\alpha = 0$, то існує форма $\beta \in \Lambda^{(j|k-1)}$ така, що $\alpha = \mathcal{L}\beta \in \Lambda^{(j|k)}$, $\beta = H(\alpha)$. Рівність $d\mathcal{D} + \mathcal{L}d = 0$ є очевидною згідно з визначенням (12).

З а у в а ж е н н я 4. Відповідне доведення точності комплексу (13) в [9] є технічно відмінним від наведеного вище, а також важчим, бо використовує поняття «операторів Ейлера» вищих порядків, які мають складну операторно-диференціальну структуру. Наше доведення ґрунтується на формулі гомотопії (15), вперше встановленій у роботі [12], де, зокрема, наведене ефективне розв'язання однієї оберненої задачі диференціальної алгебри.

Асоціюємо тепер з комплексом (11) такий комплекс:

$$\Lambda_*^{(0|k)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(1|k)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_*^{(j|k)} \xrightarrow{d_*} \dots, \quad (17)$$

де $j, k \in \mathbb{Z}_+$ і операція « d_* » (17) означається за правилом

$$d = d_u + d_x,$$

$$d_* \pi_*(\alpha) = \pi_* d_u \alpha, \quad \alpha \in \Lambda^{(j|k)},$$

$$\pi_*: \Lambda^{(j|k)} \rightarrow \Lambda_*^{(j|k)} = \Lambda^{(j|k)} / \mathcal{D}\Lambda^{(j|k-1)}. \quad (18)$$

Справедлива така теорема [9, 5].

Т е о р е м а 2. Комплекс (17) точний.

Доведення ґрунтується на теоремі 1 і точності d_u -комплексу де-Рама.

$$\Lambda^{(0|k)} \xrightarrow{d_u} \Lambda^{(1|k)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^{(j|k)} \xrightarrow{d_u} \dots, \quad (19)$$

яка є наслідком класичної леми Пуанкаре [4, 7].

Об'єднуючи теореми 1 і 2, знаходимо, що наступний комплекс точний:

$$\Lambda^{(0|0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(0|1)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^{(0|n)} \xrightarrow{E} \Lambda_*^{(1|n)} \xrightarrow{d_*} \Lambda_*^{(2|n)} \rightarrow \dots, \quad (20)$$

причому оператор Ейлера $E: \Lambda^{(0|n)} \rightarrow \Lambda_*^{(1|n)}$ визначається за правилом

$$\alpha \in \Lambda^{(0|n)} \simeq \Lambda^{(0|0)},$$

$$E\alpha[x; u] = \langle \alpha'_u[x; u] \cdot 1, du \rangle, \quad (21)$$

що впливає із формул гомотопії (14) і (15); значки «'» і «*» означають відповідно похідну Фреше елемента $\alpha \in \Lambda^{(0|n)}$ як локального функціонала на функціональному просторі $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ і її спряження відносно стандартної білінійної форми на $T^*(M) \times T(M)$ [9, 13]. Переходя-

чи до звичайних позначень [9, 13], одержуємо, що коли заданий елемент $\varphi \in T^*(M) \hookrightarrow T^*(J_{\text{top}}^{(\infty)})$, то величина $\langle \alpha, du \rangle \Rightarrow E\alpha[x, u]$ для деякого елемента $\alpha \in \Lambda^{(0|0)}$ тоді і тільки тоді, коли виконана умова Вольтерри — Гельмгольца: $\varphi'[x; u] = \varphi''[x; u]$. Справді, з (20) випливає $E\alpha[x; u] \in \text{Ker } d_*$, тобто білінійна форма $\langle du, \varphi' \cdot du \rangle$ повинна бути симетричною як ядро операції d_* , а це і означає, що $\varphi'[x; u] = \varphi''[x; u]$ для всіх $[x; u] \in \tilde{J}_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. При цьому вірна формула гомотопії Вольтерри

$$\alpha[x; u] \simeq \int_0^1 d\lambda \langle E\alpha[x; \lambda u], u \rangle, \quad (22)$$

що теж випливає з (14), (15); значок « \simeq » означає рівність з точністю за модулем $\{\text{mod } \mathcal{D}\Lambda^{(0|n-1)}\}$ згідно з (20).

4. Перейдемо до узагальнення поняття категорії топологічних джет-многовидів у випадку підстилаючого функціонального супермноговиду $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$, де $\mathbb{R}^{j|n}$, $(j, n) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{0, 0\}$, — комутативна супералгебра, тобто \mathbb{Z}_2 -градуований лінійний векторний простір над полем \mathbb{R} (або \mathbb{C}), на якому введена структура асоціативної алгебри з одиницею. Відповідний суперкомутатор $[\cdot, \cdot]$ на $\mathbb{R}^{j|n}$ означається як $[a, b] = a \cdot b - (-1)^{\tilde{a} \cdot \tilde{b}} b \cdot a = 0$, де $a, b \in \mathbb{R}^{j|n}$ — довільні однорідні елементи [14] в супералгебрі $\mathbb{R}^{j|n}$, $\tilde{a}, \tilde{b} \in \{0, 1\}$ — відповідні їх «парності», причому згідно з розкладом $\mathbb{R}^{j|n} = \mathbb{R}^{j|0} \oplus \mathbb{R}^{0|n}$, $\mathbb{R}^{j|0} \ni a \rightarrow \tilde{a} = 0$, $\mathbb{R}^{0|n} \ni b \rightarrow \tilde{b} = 1$, $\dim \mathbb{R}^{j|0} = j \in \mathbb{Z}_+$ і $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n \in \mathbb{Z}_+$. Як встановлено в [14], структура супералгебри $\mathbb{R}^{j|n}$, $(j, n) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{0, 0\}$ суттєво означається її анулятором ${}^{\perp}\mathbb{R}^{j|n} = \{a \in \mathbb{R}^{j|n} : a\mathbb{R}^{0|n} = 0\}$, а саме, вірна наступна [14] теорема.

Теорема 3. *Якщо $\mathbb{R}^{j|n} = \mathbb{R}^{j|0} \oplus \mathbb{R}^{0|n}$, $j, n \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{R}^{j|n} \neq \emptyset$) — комутативна супералгебра з тривіальним анулятором ${}^{\perp}\mathbb{R}^{j|n} = \emptyset$ над полем \mathbb{R} , то $\mathbb{R}^{0|n}$ — нескінченновимірний простір: $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n = \infty$.*

Серед найбільш «класичних» прикладів нескінченновимірної комутативної супералгебри з нульовим анулятором відмітимо побудовану нами раніше грасманову алгебру $\Lambda(J_{\text{top}}^{(\infty)}) = \text{inv} \lim_{j \in \mathbb{Z}_+} \Lambda(J_{\text{top}}^{(j)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m))$, де $\mathbb{R}(J_{\text{top}}^{(\infty)}) = \Lambda_s(J_{\text{top}}^{(\infty)}) \oplus \Lambda_a(J_{\text{top}}^{(\infty)})$ — розклад в пряму суму парних і непарних диференціальних форм довільного порядку.

Розглянемо скінченновимірний векторний суперпростір $\otimes \mathbb{R}^{1|n(k+1)}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і в ньому довільну точку $[u^{[k]}] = (u = u^{[0]}, u^{[1]}, \dots, u^{[k]})$ і задамо в ньому дію векторного поля $\otimes \mathbb{R}^{1|n(k+1)} \rightarrow \otimes T[\mathbb{R}^{1|n(k+1)}]$ за правилом

$$\frac{d}{d\theta} u^{[i]} = u^{[i+1]}, \quad i = \overline{0, k-1},$$

$$\frac{d}{d\theta} u^{[k]} = g_k([u^{[k]}]), \quad [u^{[k]}]|_{x=x_0} = [u^{[k]}], \quad (23)$$

де $g_k \in C^{(\infty)}(\otimes \mathbb{R}^{1|n(k+1)}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ — деяке гладке відображення. Саме векторне поле $\frac{d}{d\theta}$ задається виразом

$$D_\theta = \frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{d}{dx}, \quad \theta^2 = 0, \quad (24)$$

де $(x, \theta) \in \mathbb{R}^{1|n}$ — відповідні координати в комутативній супералгебрі $\mathbb{R}^{1|n}$. Операція (24) має таку властивість: $\frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\theta}, \frac{d}{d\theta} \right] = \frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{d}{dx}$, тобто векторне поле (24) — «квадратний корінь» з векторного поля $\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}^{1|n}$.

Вираз $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$, означає частинну похідну за «суперзмінною» $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$

на функціональному просторі $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$. Але в загальному випадку частинна похідна $\partial/\partial\theta$ не визначена однозначно [14]. Але, оскільки для суперпросторів над комутативною супералгеброю з тривіальним анулятором частинна похідна $\partial/\partial\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$, визначена вже однозначно [14], то звідси випливає необхідність розглянути нескінченновимірну комутативну супералгебру $\mathbb{R}^{1|n}$, причому $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n = \infty$. Таким чином, надалі вважатимемо, що $\dim \mathbb{R}^{1|0} = 1$, $\dim \mathbb{R}^{0|n} = n = \infty$, і частинна похідна $\partial/\partial\theta$, $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$, визначена на функціональному суперпросторі M однозначно.

Нехай $Or(x_0; [u_0^{[k]}], g_k)$ — орбіта векторного поля (23) через точку $[u_0^{[k]}] \in \otimes^{(m)} \mathbb{R}^{1|n(k+1)}$ при $x = x_0 \in \mathbb{R}$, причому вона компактна і глобальна за параметром $x \in \mathbb{R}$. Означаючи аналогічно п. 2 топологічний k -суперджет $\tilde{J}_{top}^{[k]}(x_0; [u_0^{[k]}])$, $k \in \mathbb{Z}_+$, будемо топологічний джет-супермноговид $J_{top}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$ як топологічну суму

$$J_{top}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) = \bigcup_{[u_0^{[k]}]} \tilde{J}_{top}^{[k]}(x_0; [u_0^{[k]}]). \quad (25)$$

Будуючи аналогічно (4) узгоджений ланцюжок проєкцій інваріантних джет-супермноговидів

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^{1|n} \\ \swarrow \searrow \\ J_{top}^{[0]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^{1|n} \\ \swarrow \searrow \\ J_{top}^{[1]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \end{array} \leftarrow \dots \leftarrow \begin{array}{c} \mathbb{R}^{1|n} \\ \swarrow \searrow \\ J_{top}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) \end{array} \leftarrow \dots, \quad (26)$$

означаємо нескінченновимірний топологічний джет-супермноговид

$$J_{top}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) = \operatorname{inv} \lim_{k \in \mathbb{Z}_+} J_{top}^{[k]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$$

як відповідну (26) зворотну границю. Стандартним чином також означається грасманова алгебра $\Lambda(\tilde{J}_{top}^{[\infty]})$ диференціальних форм на джет-супермноговиді $\tilde{J}_{top}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)}) = \mathbb{R}^{1|n} \times J_{top}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$.

З а у в а ж е н н я 5. Операція (24) на однорідних елементах $a, b \in M$ діє як супердиференціювання \tilde{J} i:

$$\frac{d}{d\theta}(ab) = \left(\frac{d}{d\theta} a\right)b + (-1)^{\tilde{\alpha}} a \left(\frac{d}{d\theta} b\right), \quad (27)$$

де враховано, що парність $\tilde{d}/d\theta = 1$ згідно з (24).

Розглянемо тепер супердиференціальний комплекс форм на $J_{top}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$:

$$0 \rightarrow \mathbb{R}^{1|n} \rightarrow \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^j \xrightarrow{d} \Lambda^{j+1} \dots, \quad (28)$$

де операція зовнішнього диференціювання $d: \Lambda \rightarrow \Lambda$ означається правилом [15—18]

$$\begin{aligned} da(\xi_1) &= (-1)^{\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}_1 \xi_1 \cdot a, \\ d\alpha(\xi_1, \xi_2) &= (-1)^{\tilde{\alpha}} \tilde{\alpha} \tilde{\xi}_1 \alpha(\xi_2) - (-1)^{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + \tilde{\xi}_1)} \tilde{\xi}_2 \alpha(\xi_1) - \alpha([\tilde{\xi}_1, \xi_2]). \end{aligned} \quad (29)$$

Тут $a \in \Lambda^0(J_{top}^{[\infty]})$, $\alpha \in \Lambda^1(J_{top}^{[\infty]})$, $\xi_1, \xi_2 \in T(J_{top}^{[\infty]})$ — відповідні однорідні елементи, причому парність $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Z}_2$ для довільної j -форми $\alpha \in \Lambda^j(J_{top}^{[\infty]})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, задається виразом ($\alpha \neq 0$)

$$\tilde{\alpha} = \alpha(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j) \sim - \sum_{i=1}^j \tilde{\xi}_i + j/\operatorname{mod} 2\mathbb{Z}. \quad (30)$$

Якщо $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^1(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $\xi_1, \xi_2 \in T(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, то операція зовнішнього добутку $\wedge: \Lambda(J_{\text{top}}^{[\infty]}) \rightarrow \Lambda(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ означається правилом [15, 19]

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(\xi_1, \xi_2) = (-1)^{\tilde{\xi}_1 \tilde{\alpha}_2} \alpha_1(\xi_1) \alpha_2(\xi_2) - (-1)^{\tilde{\xi}_2(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\alpha}_2)} \alpha_1(\xi_2) \alpha_2(\xi_1). \quad (31)$$

Відповідно операція внутрішнього антидиференціювання $i(\xi): \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{j-1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, діє згідно з правилом

$$i(\xi) \alpha(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}) = (-1)^{\tilde{\xi} \tilde{\alpha}} \alpha(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}) \quad (32)$$

для довільних однорідних елементів $\xi, \xi_k \in T(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $k = \overline{1, j-1}$, причому

$$i(\xi) (\alpha_1 \wedge \alpha_2) = (i(\xi) \alpha_1) \wedge \alpha_2 + (-1)^{\tilde{\alpha}_1(1+\tilde{\xi})} \alpha_1 \wedge (i(\xi) \alpha_2), \quad (33)$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ — довільні однорідні диференціальні форми. За допомогою (32) означається похідна Лі L_ξ за формулою Картана

$$L_\xi = i(\xi) d + di(\xi), \quad (34)$$

де $\xi \in T(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ — довільний елемент з дотичного простору до джет-супермноговиду $J_{\text{top}}^{[\infty]}$.

Нехай $\mathcal{T}(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ — модуль векторних полів на джет-супермноговиді $J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{n|n}; \mathbb{R}^{1|n(m)})$. Структура супералгебри Лі в $\mathcal{T}(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ означається суперкомутатором $[\cdot, \cdot]$, де для довільних однорідних векторних полів $K, F, G \in \mathcal{T}(J_{\text{top}}^{[\infty]})$

$$[K, F] = K \cdot F - (-1)^{\tilde{K} \cdot \tilde{F}} F \cdot K = -(-1)^{\tilde{K} \cdot \tilde{F}} [F, K],$$

$$\sum_{\text{цикл}(K, F, G)} (-1)^{\tilde{K} \cdot \tilde{G}} [K, [F, G]] = 0. \quad (35)$$

З урахуванням формул (29) встановлюємо, що згідно з класичною лемою Пуанкаре вірна така теорема.

Т е о р е м а 4. *Комплекс (28) точний.*

Як наслідок одержуємо, що відповідні комплекси

$$i \quad \begin{array}{ccccccc} \Lambda^{(0|j)} & \xrightarrow{d_u} & \Lambda^{(1|j)} & \rightarrow \dots \rightarrow & \Lambda^{(k|j)} & \rightarrow \dots \\ \Lambda^{(j|0)} & \xrightarrow{d_x} & \Lambda^{(j|1)} & \rightarrow \dots \rightarrow & \Lambda^{(j|k)} & \rightarrow \dots \end{array} \quad (36)$$

де $d = d_u + d_x$, є точними.

Нехай $\{\theta_j: j = \overline{1, n}\}$ — базис модуля $\mathbb{R}^{0|n}$ в комутативній супералгебрі $\mathbb{R}^{1|n}$; тоді можна визначити комплекс

$$\Lambda^{(0|0)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Lambda^{(0|1)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^{(0|n)} \xrightarrow{E} \Lambda^{(1|n)} \xrightarrow{a_n} \Lambda^{(2|n)} \rightarrow \dots, \quad (37)$$

де

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^n d\theta_j \wedge \frac{d}{d\theta_j}, \quad \frac{d}{d\theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \theta_j \frac{d}{dx}, \quad (38)$$

причому очевидно $\mathcal{D} \cdot \mathcal{D} = 0$, $\left[\frac{d}{d\theta_j}, \frac{d}{d\theta_k} \right] = 2\delta_{j,k} \frac{d}{dx}$, $j, k = \overline{1, n}$. Оскільки для операції $\mathcal{D}: \Lambda^{(0|j)} \rightarrow \Lambda^{(0|j+1)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, вірна формула гомотопії типу (14), то справедлива наступна теорема.

Т е о р е м а 5. *Комплекс (37) точний, причому оператор варіаційної суперпохідної Ейлера $E: \Lambda^{(0|n)} \rightarrow \Lambda^{(1|n)}$ означається правилом [17, 18]*

$$E\alpha = \langle \alpha'_u [u] \cdot 1, du \rangle = \langle \text{grad } \alpha [u], du \rangle =$$

$$= \sum_{|k| \in \mathbb{Z}_+} \langle (-1)^{|k|} \prod_{(j) \subset (k)} (-1)^{|j|} \frac{d^{|j|}}{d\theta^{|j|}} \frac{\partial \alpha [u]}{\partial u^{|j|}}, du \rangle. \quad (39)$$

Зауваження 6. Якщо $\alpha \in \Lambda^{(0|0)}(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, то з (37) також випливає $d\alpha = \langle \text{grad } \alpha [u], du \rangle + \sum_{j=1}^n \frac{d}{d\theta_j} \omega_j [u]$, де $\omega_j \in \Lambda^{(1|0)}(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $j = \overline{1, n}$, — деякі 1-форми.

Зауваження 7. При побудові топологічного джет-супермноговиду $J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n(m)})$ ми повинні врахувати, що множина векторних полів $\frac{d}{d\theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \theta_j \frac{d}{dx}$, $j = \overline{1, n}$, не є суперабелевою, через що необхідно для його узгодженості як функціонального суперпростору $M \hookrightarrow C \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n(m)})$ розглядати многовид $J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n(m)})$ як інтегральний [8] для супердиференціальної системи векторних полів $\theta(M) = \left\{ \frac{d}{d\theta}, \frac{d^2}{d\theta_j^2}; j = \overline{1, n} \right\}$, що утворюють таку супералгебру Лі:

$$\left[\frac{d}{d\theta_j}, \frac{d}{d\theta_s} \right] = \delta_{js} 2 \frac{d}{dx}, \quad \left[\frac{d}{d\theta_j}, \frac{d}{dx} \right] = 0, \quad (40)$$

для всіх $j, s = \overline{1, n}$, $x \in \mathbb{R}^{10}$. Внаслідок узагальненої теореми Фробеніуса [8] існує інтегральний супермноговид $J_{\text{top}}^{[k]}(x_0; [u_0^{[k]}])$, $k \in \mathbb{Z}_+$, інваріантний відносно супералгебри Лі (40).

Зауваження 8. З кожним векторним полем $\frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{d}{dx}$ на джет-супермноговиді $J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n(m)})$ пов'язана нескінченновимірна супералгебра Лі $\left\{ \frac{d}{dt_i} \in \mathcal{F}(J_{\text{top}}^{[\infty]}) : i \in \mathbb{Z}_+ \right\}$, де

$$\frac{d}{dt_{2j+2}} = \frac{d}{d\tau_{2j+2}}, \quad \frac{d}{dt_{2j+1}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{2j+1}} + \sum_{k=0} \tau_{2k+1} \frac{\partial}{\partial \tau_{2k+2}}, \quad (41)$$

$j \in \mathbb{Z}_+$, причому елементи $\tau_{2j+2} \in \mathbb{R}^{10}$, $\tau_{2j+1} \in \mathbb{R}^{0|n}$ і виконуються комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt_{2j+2}}, \frac{d}{dt_{2k+2}} \right] &= 0 = \left[\frac{d}{dt_{2j+2}}, \frac{d}{dt_{2k+1}} \right], \\ \left[\frac{d}{dt_{2j+1}}, \frac{d}{dt_{2k+1}} \right] &= 2 \frac{d}{dt_{2(j+k)+2}}, \quad j, k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (42)$$

Зокрема, співвідношенням супералгебри Лі (42) задовольняють векторні поля $\left(\frac{d}{d\theta} \right)^{j+1} = \frac{d}{dt_j}$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Зображення супералгебри Лі (42) допускає наступне узагальнення [18]:

$$\frac{d}{dt_{2j+2}} = \frac{d}{d\tau_{2j+2}}, \quad \frac{d}{dt_{2j+1}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{2j+1}} + \sum_{k=0} \kappa_{2k+1}^{(2j)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau_{2k+2}}, \quad (43)$$

де функції $\kappa_{2k+1}^{(2j)}: \mathbb{R}^{0|n} \rightarrow \mathbb{R}^{0|n}$, $j, k \in \mathbb{Z}_+$ такі, що

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{2j+1}} \kappa_{2k+1}^{(2j)}(\tau) + \frac{\partial}{\partial \tau_{2k+1}} \kappa_{2j+1}^{(2l)}(\tau) = 2\delta_{l, j+k+1} \quad (44)$$

Векторні поля (42), як показано в [18], відіграють суттєву роль в дослідженні повної інтегровності нелінійних динамічних систем на функціональному супермноговиді $M \hookrightarrow C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R})^{1n m}$.

5. Розглянемо для прикладу суперсиметричну нелінійну динамічну систему типу Кортевега — де Фріза [18, 20]

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega^{[6]} + 2(\omega\omega^{[1]})^{[2]} + 2\omega^{[1]}\omega^{[2]} = K[\omega], \quad (45)$$

де $\omega \in M \simeq J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n})$, причому $\tilde{\omega} = 1$, $\omega^{[j]} = \left(\frac{d}{d\theta}\right)^j \omega$, $j \in \mathbb{Z}_+$, і еволюційний параметр $t \in \mathbb{R}^{1|0}$. Якщо $\gamma \in \mathcal{D}(M)$, $\tilde{\gamma} = 0$ — закон збереження для (45), то величина $\varphi = \text{grad } \gamma \in T(M)$, $\tilde{\varphi} = 1$ задовольняє рівняння типу Лакса [13]

$$\varphi_t + K^{**}\varphi = 0, \quad (46)$$

де $K': T(M) \rightarrow T(M)$ — похідна Фреше векторного поля (45) на M , «**» — відповідне її спряження відносно стандартної білінійної форми на $T^*(M) \times T(M)$, причому

$$K^{**} = D_0^6 - 4\omega^{[1]}D_0^2 - 2\omega^{[2]}D_0. \quad (47)$$

Згідно з градієнтно-голономним алгоритмом побудови критеріїв інтегровності нелінійних динамічних систем [13] вивчимо існування спеціального асимптотичного за параметром $|\lambda| \rightarrow \infty$ розв'язку рівняння (46) у вигляді

$$\varphi = c \exp(\lambda x - \lambda^3 t + D_0^{-1}\sigma[\omega; \lambda]), \quad \frac{dc}{dt} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (48)$$

$$\sigma \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \sigma_j[\omega] \lambda^{-j}, \quad \tilde{\sigma} = 1, \quad \tilde{c} = 1,$$

де обернений до (24) оператор D_0^{-1} має вигляд

$$D_0^{-1} = \partial^{-1} \int d\theta \cdot + \theta, \quad \frac{d}{dx} \partial^{-1} = 1, \quad D_0 D_0^{-1} = 1. \quad (49)$$

Операція інтегрування по суперзмінній $\theta \in \mathbb{R}^{0|n}$ означається [14, 18] за правилом Березіна:

$$\int d\theta = 0, \quad \int \theta d\theta = 1, \quad (50)$$

звідки випливає тотожність: для довільного елемента $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{1|n}; \mathbb{R}^{1|n})$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} dx f(x, \theta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx d\theta. \quad (51)$$

З а у в а ж е н н я 9. Для формального виведення формули (49) розглянемо таку тотожність

$$\partial^{-1} D_0 = \partial^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta = D_0^{-2} D_0 = D_0^{-1}. \quad (52)$$

При цьому ми скористались тим, що $D_0^2 = \frac{d}{dx}$ на $J_{\text{top}}^{[\infty]}$. Із (52) і (51) одразу ж випливає (49).

Використовуючи формулу (49), розв'язок (48) можна перетворити до вигляду

$$\varphi = c(1 + \theta b[\omega, \lambda]) \exp(\lambda x - \lambda^3 t + \partial^{-1} a[\omega; \lambda]), \quad (53)$$

де при $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = \tilde{b} = 1$ і при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$a[\omega; \lambda] \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} a_j[\omega] \lambda^{-i}, \quad b[\omega; \lambda] \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} b_j[\omega] \lambda^{-i}, \quad (54)$$

$a_j, b_k: J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n(m)}) \rightarrow \mathbb{R}^{1n}, j, k \in \mathbb{Z}_+$ — локальні функціонали на джет-супермноговиді $J_{\text{top}}^{[\infty]}$. Підставляючи вирази (48) у рівняння Лакса (46), одержуємо нескінченну ієрархію рекурентних співвідношень:

$$D_0^{-1} \sigma_{j,t} - 4w^{[1]} \delta_{j,-1} - 4w^{[1]} \sigma_j^{[1]} - 2w^{[2]} \theta \delta_{j,-1} - 2w^{[2]} \sigma_j + \sigma_j^{[5]} + 3\sigma_{j+1}^{[3]} + 3\sigma_{j-k}^{[1]} \sigma_k^{[3]} + 3\sigma_{j+2}^{[1]} + 3\sigma_{j+1-k} \sigma_k^{[1]} + \sigma_{j-k}^{[1]} \sigma_{k-s} \sigma_s^{[1]} = 0, \quad (55)$$

розв'язуючи які, знаходимо

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2}{3} w + \frac{2}{3} w^{[1]} \theta, \quad \sigma_2 = -\sigma_1^{[2]}, \\ \sigma_3 &= \frac{2}{9} w^{[5]} \theta - \frac{14}{9} w^{[4]} - \frac{4}{9} (w w^{[1]})^{[1]} \theta - \frac{8}{9} w w^{[1]} + \\ &+ \frac{8}{9} w^{[1]} (w \theta)^{[1]} + \frac{4}{9} (w^{[1]} \theta)^{[4]} - \frac{16}{9} (w \theta)^{[1]} w^{[1]} + \frac{4}{3} D_0^{-1} (w^{[2]} w^{[1]} \theta), \dots \end{aligned} \quad (56)$$

При подальшому знаходженні величин $\sigma_j \in \Lambda^0(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $j \geq 3$, ми переконуємось, що рекурентна процедура в (55) обривається при $j=2$, тобто при $j \geq 2$ величини $\sigma_{j,t} \neq D_0 \eta_j$ для деяких $\eta_j \in \Lambda^0(J_{\text{top}}^{[\infty]})$, $j \geq 2$. Останнє означає, що при $j \geq 2$ функціонали $\gamma_j = \int_{\mathbb{R}} dx \int d\theta \sigma_j[w] \in \mathcal{D}(J_{\text{top}}^{[\infty]})$ не є законами збереження (інваріантами) нелінійної динамічної системи (45). Останнє згідно з градієнтно-голономним алгоритму [13] означає, що вихідна нелінійна динамічна система (45) не є інтегрованою за Ліувуллем — Лаксом [13, 18] гамільтоновою системою, що збігається з результатами робіт [18, 20]. Якщо провести аналогічний аналіз наступної нелінійної суперсиметричної динамічної системи типу Кортевега — де Фріза

$$w_t = -w^{[6]} + 3(w w^{[1]})^{[1]} = K[w], \quad (57)$$

де $w \in M \simeq J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n})$, $t \in \mathbb{R}^{10}$ — еволюційний параметр, то переконуємось, що відповідна процедура типу (55) продовжується узгоджено для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$, причому

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int d\theta \int_{\mathbb{R}} dx w, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \int d\theta \int_{\mathbb{R}} dx w w^{[1]}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{2} \int d\theta \int_{\mathbb{R}} dx (2w w^{[1]} w^{[1]} + w^{[2]} w^{[3]}), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{2} \int d\theta \int_{\mathbb{R}} dx (5w (w^{[1]})^3 + 10w (w^{[3]})^2 - 6w w^{[2]} w^{[4]} + w^{[4]} w^{[5]}), \dots,$$

де для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$ $d\gamma_j/dt = 0$, $t \in \mathbb{R}^{10}$. У роботі [21] встановлена бігамільтоновість [13] динамічної системи Кортевега — де Фріза (57), причому $w_t = \{ \gamma_2, w \}_{\mathcal{K}} = \{ \gamma_2, w \}_{\mathcal{M}}$, де для всіх $(x, \theta), (y, \eta) \in \mathbb{R}^{1n}$

$$\begin{aligned} \{w(x, \theta), w(y, \eta)\}_{\mathcal{K}} &= (D_0^5 - 3w(x, \theta) D_0^3 - w^{[1]}(x, \theta) D_0 - \\ &- 2w^{[2]}(x, \theta)) (\theta - \eta) \delta(x - y). \end{aligned} \quad (59)$$

Друга гамільтонова структура $\mathcal{M}: T^*(M) \rightarrow T(M)$ згідно з [22, 23] має дещо складнішу операторну природу, на чому тут не зупиняємось. У загальному випадку [13] довільний імплектичний оператор $\mathcal{L}: T^*(M) \rightarrow T(M)$ динамічної системи (57) задовольняє рівняння Каргана — Нетер

$$L_{\mathcal{K}} \mathcal{L} = \mathcal{L}' \mathcal{K} - \mathcal{K}' \mathcal{L} - \mathcal{L} \mathcal{K}'' = 0, \quad (60)$$

яке, зокрема, можна розв'язувати [13] асимптотичним методом малого параметра. Аналогічні результати встановлення інтегровності за Лаксом можна одержати для багатьох [24—27] нелінійних динамічних систем; зокрема, цілком інтегровна нелінійна динамічна система мКДФ

$$\omega_t = -\omega^{[6]} + 3\omega^{[1]}(\omega\omega^{[1]})^{[2]} = K[\omega] \quad (61)$$

на супермноговиді $M \hookrightarrow J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n})$, яка також [20] допускає зображення типу Лакса [13, 23] аналогічно динамічній системі Кортевега — де Фріза (57). Але, як відзначено в [20, 27], не всі ці динамічні системи допускають, як (57) і (61), інваріантність відносно суперсиметрії, генератором якої є векторне поле $\tilde{D}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta} - \theta \frac{d}{dx}$, що задовольняє умову

комутативності з векторним полем супердиференціювання $D_0 = \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{d}{dx} : [D_0, \tilde{D}_0] = 0, (x, \theta) \in \mathbb{R}^{1n}$.

Відповідні зображення типу Лакса для цих «несуперсиметричних» нелінійних динамічних систем згідно з алгоритмом градієнтно-голономного методу дослідження інтегровності [13] забезпечує існування відповідного розв'язку рівняння Лакса (46) в покомпонентній формі типу (53). При цьому розв'язок рівняння Лакса (46) у коваріантній формі типу (48) вже не існує згідно з неіснуванням коваріантної форми запису вихідної нелінійної динамічної системи $\omega_t = K[\omega]$ на супермноговиді $M \hookrightarrow J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n(m)})$.

Для прикладу розглянемо [24] нелінійну динамічну систему типу Кортевега — де Фріза $\omega = u\theta + \xi \in M \hookrightarrow J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1n}), \tilde{\omega} = 1$

$$\left. \begin{aligned} du/dt &= -u_{3x} + 6uu_x - 12\xi\xi_{xx} \\ d\xi/dt &= -4\xi_{3x} + 6u\xi_x + 3\xi^2u_x \end{aligned} \right\} = K[\omega], \quad (62)$$

причому многовид $J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1n})$ — звичайний джет-многовид зі значеннями функціональних елементів в \mathbb{Z}_2 -градуїзованій комутативній супералгебрі \mathbb{R}^{1n} . Система рівнянь (62), як легко переконатись, не допускає суперсиметричного переформулювання, тобто не існує відповідного вкладення $\xi + \theta u \in J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{1n}) \rightarrow J_{\text{top}}^{[\infty]}(\mathbb{R}^{1n}; \mathbb{R}^{1n}) \ni \omega$, через що розв'язок рівняння Лакса (46) шукаємо у вигляді (53), (54). В результаті підстановки його в (46) знаходимо систему нескінченних рекурсивних співвідношень

$$\begin{aligned} \partial^{-1}a_{j,t} + a_{j,xx} + 3a_{j+1,x} + 3a_{j-k,xx}a_k + 3a_{j+2} + 3a_{j-k+1}a_k + a_{j-k}a_{k-s}a_s - \\ - 6u\delta_{j,-1} - 6ua_j - 3\xi_x b_j + 3\xi b_{j,x} + 3\xi b_{j+1} + 3\xi b_{j-k}a_k = 0, \quad (63) \\ b_{j,t} - b_{j+3} + b_{j-k}\partial^{-1}a_{k,t} - 24\xi_x \delta_{j,-1} - 24\xi_x a_j - 12\xi a_{j,x} - 12\xi_{j,-2} + \\ + 4(b_{j,xxx} + 3b_{j+1,xx} + 3b_{j-k,xx}a_k + 3\xi\sigma_{j+1} + 3b_{j-k,x}a_{k,x} + 3b_{j+2,x} + \\ + 6b_{j+1-k,x}\sigma_k + 3b_{j-k,x}\sigma_{k-s}\sigma_s - 3\xi\sigma_{j-k}\sigma_k + b_{j-k}a_{k,xx} + 3b_{j+1-k}a_{k,x} + \\ + 3b_{j-k}a_{k-s,x}a_s + b_{j+3} + 3b_{j+2-k}a_k + 3b_{j+1-k}a_{k-s}a_s + b_{j-k}a_{k-s}a_{s-l}a_l) - \\ - 6(ub_j)_x - 6ub_{j+1} - 6ub_{j-k}a_k = 0, \end{aligned}$$

де $j \in \mathbb{Z}_+$, і оператор K'^* : $T^*(M) \rightarrow T^*(M)$, використаний в (46), має вигляд

$$K'^* = \begin{vmatrix} \partial^3 - 6u\partial & -6\xi_x + 3\partial\xi \\ -12\partial\xi\partial - 12\xi_x\partial & 4\partial^3 - 6\partial u \end{vmatrix}. \quad (64)$$

Розв'язуючи рекурентні рівняння (63), знаходимо

$$\begin{aligned} a_1 = 2u, \quad a_2 = -2u_x, \quad a_3 = 2u^2 + 2u_{xx} + 8\xi\xi_x, \dots, \\ b_1 = 4\xi, \quad b = -8\xi_x, \dots \end{aligned} \quad (65)$$

Таким чином, згідно з градієнтно-голономним алгоритмом функціонали $\gamma_j = \int_{\mathbb{R}} dx a_j[u, \xi]$, $j \in \mathbb{Z}_+$, будуть законами збереження несуперсиметричної динамічної системи (62), тобто $d\gamma_j/dt = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{R}^{10}$, де

$$\gamma_1 = 2 \int_{\mathbb{R}} dx u, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 2 \int_{\mathbb{R}} dx (u^2 + 4\xi\xi_x), \quad \gamma_4 = 0, \quad \gamma_5 = 2 \int_{\mathbb{R}} dx (2u^3 + u_x^2 - 16\xi_x\xi_{xx} + 24\xi\xi_x), \dots \quad (66)$$

Розв'язуючи відповідно рівняння Картана — Нетер (60), отримуємо бігамільтоновість динамічної системи (62) з узгодженою парою вигляду [23]

$$\mathcal{L} = \left\| \begin{array}{c|c} \partial & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{4} \end{array} \right\|, \quad \mathcal{M} = \left\| \begin{array}{c|c} \partial^3 - 2(\partial v + v\partial) & -\partial\alpha - 2u\partial \\ \hline -\xi\partial - 2\partial\xi & \partial^2 - u \end{array} \right\|. \quad (67)$$

З використанням $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ -пари (67) градієнтно-голономним алгоритмом знаходимо явне зображення Лакса для (62):

$$(-D_\theta^3 + w)f(x, \theta) = \lambda\theta f(x, \theta), \quad (68)$$

$f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{1n})$, де $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральний параметр.

Зображення (68) не суперсиметричне за своєю структурою (явно залежить від суперзмінної $\theta \in \mathbb{R}^{01n}$), в той час як зображення типу Лакса для суперсиметричного рівняння Кортевега — де Фріза (62) апіорі суперсиметричне також: $L[w; \lambda]f = 0$, $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^{11n}; \mathbb{C}^{11n})$, $\lambda \in \mathbb{C}^{10}$, де

$$L[w; \lambda] = D_\theta^4 - w^{11} + wD_\theta - \lambda. \quad (69)$$

На закінчення цього пункту зауважимо, що у випадку суперсиметричної нелінійної динамічної системи Кортевега — де Фріза (62) відповідна процедура розв'язку характеристичного рівняння Лакса (46) на джет-многовиді $M \simeq J_{\text{top}}^{(\infty)}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{11n})$ (тобто на многовиді M , не вкладеному в джет-супермноговид $J_{\text{top}}^{1\infty}(\mathbb{R}^{11n}; \mathbb{R}^{11n})$) приводить до відповідної серії нелокальних законів збереження:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{\mathbb{R}} dx (2u - \xi\xi_{-1}), & \gamma_2 &= \int_{\mathbb{R}} dx (-2u_x + \xi_x\xi_{-1} + \xi\partial^{-1}u\xi_{-1}), \\ \gamma_3 &= \int_{\mathbb{R}} dx (-2u^2 - 3\xi\xi_x + 2u\xi\xi_{-1} + u\xi_{-1}\partial^{-1}u\xi_{-1}), \dots, \end{aligned} \quad (70)$$

де $\xi_{-1} = \partial^{-1}\xi$, що є наслідком порушення апіорної суперсиметричної структури відповідного рівняння Лакса (46). Усі отримані нами вище закони збереження мають нульову парність, тобто $\dot{\gamma}_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Але природно сподіватись, що нелінійні інтегровні динамічні системи мають також інваріанти ненульової парності, які обов'язково задовольняють рівняння Лакса (46). Звідси впливає важлива задача їх знаходження у явному вигляді, бо відповідне асимптотичне зображення типу (48) вже для цієї мети не годиться.

6. Алгоритми, застосовані для дослідження нелінійних динамічних систем з суперзмінними в п. 5, піддаються автоматизації обчислень на комп'ютерах з використанням систем аналітичних обчислень. Зокрема, для проведення основних розрахунків для знаходження описаних об'єктів була застосована система REDUCE, що значно скоротило об'єм роботи і дало можливість ефективно досліджувати нелінійні динамічні системи в суперпросторі.

1. Теорія солітонів / Под ред. С. П. Новикова. — М.: Наука, 1980. — 342 с.
2. Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д. Гамильтонов підхід в теорії солітонів. — М.: Наука, 1986. — 527 с.

3. *Интегрируемые динамические системы* / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М. : Наука, 1979.— 431 с.
5. *Самойленко В. Г.* Джет-анализ на гладких бесконечномерных многообразиях и его приложения для исследования интегрируемости нелинейных динамических систем.— Киев, 1988.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88.51).
6. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений.— М. : Наука, 1982.— 340 с.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия.— М. : Наука, 1984.— 710 с.
8. *Питула М. М., Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Элементы теорії диференціально-геометричних структур та динамічних систем.— К. : УМКВО, 1988.— 87 с.
9. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.— М. : Мир, 1989.— 637 с.
10. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1986.— 335 с.
11. *Громов М.* Дифференциальные соотношения с частными производными.— М.: Мир: 1990.— 536 с.
12. *Митропольский Ю. О., Прикарпатский А. К., Філь Б. М.* Деякі аспекти градієнтно-головного алгоритму в теорії інтегровності нелінійних динамічних систем та проблеми комп'ютерної алгебри // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 1.— С. 78—91.
13. *Прикарпатский А. К., Микитюк И. В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях.— Киев : Наук. думка, 1991.— 267 с.
14. *Хренников А. Ю.* Функциональный суперанализ // Успехи мат. наук.— 1988.— 43, № 2.— С. 87—114.
15. *Kastler D.* The Koszul formula for graded Lie-Cartan pairs (super BBS operator) // J. Geom. and Phys.— 1987.— 4, № 4.— P. 523—534.
16. *Jadczyk A., Kastler D.* Graded Lie-Cartan Pairs. II. The fermionic differential calculus // Ann. Phys.— 1987.— 179, № 2.— P. 169—200.
17. *Trostel R.* Color analysis, theory of Γ -graded integrable evolution equations, and super Nijenhuis operators // J. Math. Phys.— 1985.— 26, N 12.— P. 3160—3171.
18. *Manin Yu. I., Radul A. O.* A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy // Commun Math. Phys.— 1985.— 98, N 1.— P. 65—77.
19. *Gawedzki K.* Supersymmetric extension of super-geometry // Ann. Inst. H. Poincaré A. 1977.— 27, N 4.— P. 335—366.
20. *Mathieu P.* Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation // J. Math. Phys.— 1988.— 29, № 11.— P. 2499—2506.
21. *Кулиш П. П.* Аналог уравнения Кортевега — де Фриза для суперконформной алгебры // Дифференц. геометрия, группы Ли и механика.— 1987.— 101.— С. 64—68.
22. *Olver W.* R-structures, Yang-Baxter equations, and related involution theorems // J. Math. Phys.— 1989.— 30, № 5.— P. 1140—1149.
23. *Филь Б. Н.* Суперобобщение вполне интегрируемых динамических систем.— Киев, 1989.— 19 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 89.28).
24. *Chowdhury R. A., Roy S.* On the Backlund transformation and Hamiltonian properties of superevaluation equations // J. Math. Phys.— 1986.— 27, N 10.— P. 2464—2468.
25. *Yi-Shen L., Zhang L.-N.* Super AKNS-scheme and its finite conserved currents // Nuovo cim. A.— 1986.— 93, № 2.— P. 175—183.
26. *Gurses M., Oguz O.* A super AKNS-scheme // Phys. Lett. A.— 1985.— 108, № 9.— P. 437—440.
27. *Kupershmidt B. A.* Integrable systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1984.— N 81.— P. 6562—6563.

Одержано 06.03.92