УДК 513.88+517

І.-П. П. Сироїд, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Матричні розв'язки рівняння $\mathfrak{B} U_t = -U_{xx} + 2U^3 + \mathfrak{B}[U_x, U] + 4cU$: розвиток методу оберненої задачі розсіяння

Знайдені комплексні матричні розв'язки нелінійного рівняння Шредінгера $\mathfrak{B}U_t = -U_{xx} + 2U^3 + \mathfrak{B}[U_x, U] + 4cU$. При цьому метод оберненої задачі розсіяння одержує природний розвиток. А саме, для несамоспряженої $\tilde{L} - A$ пари Лакса, що виникає для цього рівняння, враховано наявність ланцюжків приєднаних векторів у оператора $\tilde{L}$ за допомогою відповідних нормувальних ланцюжків. Одержана теорема єдиності для задачі Коші для досліджуваного рівняння. Тут $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $[M, N] = MN - NM$, c — параметр.

Найдены комплексные матричные решения нелинейного уравнения Шредингера $\mathfrak{B}U_t = -U_{xx} + 2U^3 + \mathfrak{B}[U_x, U] + 4cU$. При этом метод обратной задачи рассеяния получает естественное развитие. Именно, для несамосопряженной $\tilde{L} - A$ пары Лакса, возникающей для этого уравнения, учтено наличие цепочек присоединенных векторов у оператора $\tilde{L}$ с помощью соответствующих нормировочных цепочек. Получена теорема единственности для задачи Коши для исследуемого уравнения. Тут $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $[M, N] = MN - NM$, c — параметр.

Метод оберненої задачі розсіяння, наведений Гарднером, Гріном, Крускалом, М'юрою в статті [1], набув широкого розвитку (див., наприклад, [2—8]).

Дана стаття присвячена розвитку методу оберненої задачі розсіяння для комплексного матричного нелінійного рівняння Шредінгера $\mathfrak{B}U_t = -U_{xx} + 2U^3 + \mathfrak{B}[U_x, U] + 4cU$ з несамоспряженою $\tilde{L} - A$ парою Лакса, де $\tilde{L}(t) = \mathfrak{B}\dfrac{d}{dx} + U(x, t)$ — оператор Дірака з комплексною матрицею-функцією $U(x, t)$, $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, c — комплексний параметр, $[\cdot, \cdot]$ — комутатор. В порівнянні з статтею В. Е. Захарова і А. Б. Шабата [6], а також іншими роботами (наприклад, [7]) для скалярного рівняння $iU_t = -U_{xx} + 2\varkappa |U|^2 U$, $\varkappa < 0$, в даній статті враховано наявність у оператора $\tilde{L}(t)$ комплексних власних значень з приєднаними векторами. Власному і приєднаним векторам відповідають нормувальні ланцюжки, що вносять вагомий вклад в формули методу оберненої задачі на кожному етапі.

При формулюванні результатів оберненої задачі (п. 3) використані роботи [9—16].

Крім того, доведена теорема єдиності для задачі Коші для досліджуваного нелінійного рівняння Шредінгера, при формулюванні якої є істотним значення параметра c і характер (компактність або необмеженість) множин, що пробігає змінна t.

При використанні методу оберненої задачі розсіяння слід вміти обчислювати власні значення оператора $\tilde{L}(0) = \mathfrak{B}\dfrac{d}{dx} + U(x, 0)$. Цьому присвячена стаття [17] і частина статті [18]. Достатні умови на потенціал оператора Дірака $\tilde{L}(0)$, при яких у оператора $\tilde{L}(0)$ відсутні спектральні особливості, сформульовано в статтях [18, 19].

У випадку комплексних розв'язків рівняння Кортевега — де Фріза аналогічна ідея проведена автором в статті [20].

1. Відомості з прямої задачі розсіяння для несамоспряженого оператора Дірака на всій осі. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$, а комплекснозначні функції $v_i(x)$ задовольняють умови

$$|v_1(x)| \leqslant \frac{d}{1 + |x|^{2+2\varepsilon}}, \qquad |v_2(x)| \leqslant \frac{d}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}, \tag{1}$$

$$|v_1'(x)| + |v_2'(x)| \leqslant \frac{d}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}, \qquad d > 0, \ \varepsilon > 0.$$

Несамоспряжений оператор Дірака L породжується в $\mathfrak{H}$ диференціальним виразом

$$l = \mathfrak{B}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

і областю означення $D(L) = \left\{ f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{H} \mid f_i \text{ — абсолютно неперервні на} \right.$ кожному скінченному замкненому проміжку дійсної осі і $\left. l(f) \in \mathfrak{H} \right\}$.

Розглянемо рівняння Дірака на всій осі:

$$\mathfrak{B}y'(x) + Vy(x) = \lambda y(x). \tag{2}$$

Тут $y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x)$, $Vy(x) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(x)$. Матрицю-функцію V назвемо потенціалом оператора L.

Через $f_{j+}(x, \lambda)$, $f_{j-}(x, \lambda)$, $j = 1, 2$, позначимо розв'язки диференціального рівняння (2), що мають асимптотику на нескінченності:

$$f_{1+}(x, \lambda) \sim e_1(x, \lambda), \quad f_{2+}(x, \lambda) \sim e_2(x, \lambda) \text{ при } x \to +\infty,$$

$$f_{1-}(x, \lambda) \sim e_1(x, \lambda), \quad f_{2-}(x, \lambda) \sim e_2(x, \lambda) \text{ при } x \to -\infty,$$

де

$$e_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda x}, \quad e_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}.$$

Ці розв'язки існують, єдині і зображаються через оператори перетворення:

$$\left.\begin{aligned} f_{1+}(x,\lambda) &= e_1(x,\lambda) + \int_x^\infty K_+(x,t)\, e_1(t,\lambda)\, dt \\ f_{2-}(x,\lambda) &= e_2(x,\lambda) + \int_{-\infty}^x K_-(x,t)\, e_2(t,\lambda)\, dt \end{aligned}\right\} \text{ при } \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0,$$

$$\left.\begin{aligned} f_{2+}(x,\lambda) &= e_2(x,\lambda) + \int_x^\infty K_+(x,t)\, e_2(t,\lambda)\, dt \\ f_{1-}(x,\lambda) &= e_1(x,\lambda) + \int_{-\infty}^x K_-(x,t)\, e_1(t,\lambda)\, dt \end{aligned}\right\} \text{ при } \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0. \quad (3)$$

При цьому

$$V(x) = \mathfrak{B}K_+(x,x) - K_+(x,x)\mathfrak{B} = -(\mathfrak{B}K_-(x,x) - K_-(x,x)\mathfrak{B}). \quad (4)$$

При дійсних λ пари вектор-функцій $f_{1+}(x,\lambda)$, $f_{2+}(x,\lambda)$ і $f_{1-}(x,\lambda)$, $f_{2-}(x,\lambda)$ утворюють фундаментальні системи розв'язків, вронскіани яких дорівнюють відповідно $w_+(\lambda) = -2i$, $\tilde{w}_-(\lambda) = -2i$. Перехід від однієї фундаментальної системи до другої здійснюється за формулами, з яких, зокрема, випливає

$$\begin{aligned} f_{2-}(x,\lambda) &= -\frac{1}{2i} v(\lambda) f_{1+}(x,\lambda) + \frac{1}{2i} w(\lambda) f_{2+}(x,\lambda), \\ f_{1+}(x,\lambda) &= \frac{1}{2i} w(\lambda) f_{1-}(x,\lambda) + \frac{1}{2i} \tilde{v}(\lambda) f_{2-}(x,\lambda), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$w(\lambda) = \{f_{2-}(x,\lambda);\ f_{1+}(x,\lambda)\}, \quad \tilde{w}(\lambda) = \{f_{1-}(x,\lambda);\ f_{2+}(x,\lambda)\}, \quad (6)$$

$$v(\lambda) = \{f_{2-}(x,\lambda);\ f_{2+}(x,\lambda)\}, \quad \tilde{v}(\lambda) = \{f_{1+}(x,\lambda);\ f_{1-}(x,\lambda)\} \quad (7)$$

— відповідні вронскіани. Функції $w(\lambda)$ і $\tilde{w}(\lambda)$ при умові (1) є аналітичними в півплощинах $\operatorname{Im}\lambda > 0$ і $\operatorname{Im}\lambda < 0$ відповідно і неперервними в півплощинах $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ і $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$. При $|\lambda| \to \infty$ справедлива симптотика $w(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\tilde{w}(\lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)$ рівномірно в півплощині $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ ($\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$). Функції $v(\lambda)$ і $\tilde{v}(\lambda)$ при умові (1) визначені тільки на дійсній осі і задовольняють асимптотичні рівності $v(\lambda) = o(1)$, $\tilde{v}(\lambda) = o(1)$ при $\lambda \to \pm\infty$.

Зауваження 1. Якщо ζ — недійсний корінь рівняння $w(\lambda) = 0$ ($\tilde{w}(\lambda) = 0$), то число ζ є власним значенням оператора L. Якщо ζ_0 — дійсний корінь рівняння $w(\lambda)\tilde{w}(\lambda) = 0$, то число ζ_0 назвемо спектральною особливістю оператора L. Приклад оператора L з комплексним власним значенням подано в статтях [17, 18].

Припустимо, що в оператора L спектральні особливості відсутні, тобто $w(\lambda)\tilde{w}(\lambda) \neq 0$ при $\operatorname{Im}\lambda = 0$. Звідси випливає, що множина власних значень оператора L скінченна: $\{\lambda_p\}$, $p = 1, \ldots, \alpha$, при $\operatorname{Im}\lambda_p > 0$ та $\{\tilde{\lambda}_i\}$, $i = 1, \ldots, \tilde{\alpha}$, при $\operatorname{Im}\tilde{\lambda}_i < 0$. Кратність кореня λ_p ($\tilde{\lambda}_i$) позначимо через m_p ($\tilde{m}_i$).

Функції (6), (7) при $\operatorname{Im}\lambda = 0$ пов'язані рівністю

$$w(\lambda)\tilde{w}(\lambda) + v(\lambda)\tilde{v}(\lambda) = 4.$$

Будемо називати пару функцій $(s(\lambda); \tilde{s}(\lambda))$:

$$s(\lambda) = \frac{v(\lambda)}{w(\lambda)}, \quad \tilde{s}(\lambda) - \frac{\tilde{v}(\lambda)}{\tilde{w}(\lambda)}, \quad \operatorname{Im}\lambda = 0,$$

функцією розсіяння оператора L.

Зауваження 2. Якщо позначити матрицю розсіяння оператора L через $\begin{pmatrix} s_{11}(\lambda) & s_{12}(\lambda) \\ s_{21}(\lambda) & s_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$, то для коефіцієнта проходження зображення маємо $s_{11}(\lambda) = s_{22}(\lambda) = \dfrac{2i}{w(\lambda)}$. Для коефіцієнта відбиття направо одержуємо $s_{12}(\lambda) = \widetilde{v}(\lambda)/w(\lambda)$, а для коефіцієнта відбиття наліво $s_{21}(\lambda) = -v(\lambda)/w(\lambda) = -s(\lambda)$. Через несамоспряженість оператора L матриця розсіяння не має властивості унітарності. Проте в припущенні відсутності спектральних особливостей матриця розсіяння існує і оборотна для всіх дійсних λ. Функція $\widetilde{s}(\lambda)$ зі знаком мінус входить в матрицю, обернену до матриці розсіяння. Виконуються [12] асимптотичні рівності

$$s_{12}(\lambda) = o(1), \quad s_{21}(\lambda) = o(1), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0, \quad \lambda \to \pm\infty$$
$$s_{11}(\lambda) = s_{22}(\lambda) = 1 + o(1), \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Зокрема, $s(\lambda) = O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$, $\widetilde{s}(\lambda) = O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$, $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda = 0$.

Нехай λ_p — власне значення оператора L $(w(\lambda_p) = 0,\ \operatorname{Im}\lambda_p > 0)$. Тоді для лінійно залежних вектор-функцій $f_{2-}(x, \lambda_p)$ і $f_{1+}(x, \lambda_p)$ існують такі ланцюжки чисел $\{\chi_0^p, \ldots, \chi_{m_p-1}^p\}$, $\chi_0^p \neq 0$, для яких справедливі рівності

$$\frac{1}{j}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j f_{2-}(x, \lambda_p) = \sum_{\nu=0}^{j} \chi_{j-\nu}^p \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\nu f_{1+}(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_p}, \tag{8}$$

де $j = 0, \ldots, m_p - 1$; $p = 1, \ldots, \alpha$; $\left(\dfrac{d}{d\lambda}\right)^\nu f_{1+}(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_p}$ — ланцюжок головних функцій, що відповідають власному значенню λ_p. Аналогічно для власного значення $\widetilde{\lambda}_i$ $(\widetilde{w}(\widetilde{\lambda}_i) = 0,\ \operatorname{Im}\widetilde{\lambda}_i < 0)$ існують такі ланцюжки чисел $\{\widetilde{\chi}_0^i, \ldots, \widetilde{\chi}_{\widetilde{m}_i-1}^i\}$, $\widetilde{\chi}_0^i \neq 0$, для яких виконується рівність

$$\frac{1}{j}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j f_{1-}(x, \widetilde{\lambda}_i) = \sum_{\nu=0}^{j} \widetilde{\chi}_{j-\nu}^i \frac{1}{\nu!}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^\nu f_{2+}(x, \lambda)\big|_{\lambda=\widetilde{\lambda}_i}, \tag{$\widetilde{8}$}$$

де $j = 0, \ldots, \widetilde{m}_i - 1$; $i = 1, \ldots, \widetilde{\alpha}$; $\left(\dfrac{d}{d\lambda}\right)^\nu f_{2+}(x, \lambda)\big|_{\lambda=\widetilde{\lambda}_i}$ — ланцюжок головних функцій, що відповідають власному значенню $\widetilde{\lambda}_i$. Послідовність чисел $\{\chi_0^p, \ldots, \chi_{m_p-1}^p\}$ $(\{\widetilde{\chi}_0^i, \ldots, \widetilde{\chi}_{\widetilde{m}_i-1}^i\})$ називається нормувальним ланцюжком, прикріпленим до власного значення λ_p $(\widetilde{\lambda}_i)$.

Означення 1. *Функцію розсіяння* $(s(\lambda), \widetilde{s}(\lambda))$, *власні числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$; $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{\alpha}}$ *а прикріплені до них нормувальні ланцюжки* $\{\chi_0^p, \ldots, \chi_{m_p-1}^p\}$, $\{\widetilde{\chi}_0^i, \ldots, \widetilde{\chi}_{\widetilde{m}_i-1}^i\}$ *називатимемо даними розсіяння оператора* L, $p = 1, \ldots, \alpha$; $i = 1, \ldots, \widetilde{\alpha}$.

2. Еволюція даних розсіяння в силу нелінійного рівняння Шредінгера $\mathfrak{B}U_t = -U_{xx} + 2U^3 + \mathfrak{B}[U_x, U] + 4cU$. Розглянемо нелінійне матричне рівняння Шредінгера

$$\mathfrak{B}U_t = -U_{xx} + 2U^3 + \mathfrak{B}[U_x, U] + 4cU, \tag{9}$$

де c — комплексний параметр, а $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $[N, M] = NM - MN$.

Рівняння (9) зображається через $\widetilde{L}-A$ пари Лакса, $A=A_2+cA_0$:

$$\partial\widetilde{L}/\partial t=[\widetilde{L}, A_2+cA_0], \tag{$\widetilde{9}$}$$

де $[N, M]=NM-MN$; формальний оператор Дірака $\widetilde{L}=\mathfrak{B}\frac{d}{dx}+$ $+U(x,t)$, $\mathfrak{B}U+U\mathfrak{B}=0$, утворює пари Лакса (означення пар Лакса див. у [5]) з операторами A_0, A_2:

$$A_0=2\mathfrak{B},\quad A_2=-2\mathfrak{B}\frac{d^2}{dx^2}-2U\frac{d}{dx}-U_x+\mathfrak{B}U^2.$$

Із зображення $(\widetilde{9})$ випливає, що рівняння (9) можна розв'язати методом оберненої задачі розсіяння.

Нехай $X=\mathbb{R}$, а множина $T\subseteq\mathbb{R}$ є однією з множин $T=(-\infty,\infty)$, $T=[0,\infty)$, $T=(-\infty,0]$ або компакт $T=[0,b]$.

Означення 2. *Означимо простір, в якому будемо розв'язувати рівняння* (9). *Нехай* $S^{(2,1)}(X\times T;\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ — *простір комплексних* (2×2)-*матриць-функцій з нульовим слідом від двох незалежних змінних* (x,t) *і двічі диференційовних по* x, *один раз диференційовних по* t. *Через* $S^{(2)}(X;\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$ *позначимо простір комплексних двічі диференційовних* (2×2)-*матриць-функцій з нульовим слідом одної незалежної змінної* x.

Позначимо через $U_0(x)=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_2 & -u_1\end{pmatrix}(x)$ матрицю-функцію з $S^{(2)}(X;$ $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$, що задовольняє умову (1). Припустимо, що оператор L з потенціалом $U_0(x)$ не має спектральних особливостей на неперервному спектрі $(w(\lambda)\widetilde{w}(\lambda)\neq0$ при $\mathrm{Im}\,\lambda=0)$.

Розглянемо задачу Коші для нелінійного рівняння Шредінгера (9) з початковою умовою

$$U(x,0)=U_0(x). \tag{10}$$

Припустимо, що вона має розв'язок $U(x,t)=\begin{pmatrix}u_1 & u_2\\ u_2 & -u_1\end{pmatrix}(x,t)$ з $S^{(2,1)}(X\times T;\ \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$, що задовольняє умови

$$\max_t|u_1(x,t)|\leqslant\frac{d}{1+|x|^{2+2\varepsilon}},\quad \max_t|u_2(x,t)|\leqslant\frac{d}{1+|x|^{1+\varepsilon}}, \tag{11}$$

$$\max_t(|u_{1_x}(x,t)|+|u_{2_x}(x,t)|)\leqslant\frac{d}{1+|x|^{1+\varepsilon}},\quad d>0,\ \varepsilon>0.$$

Тут і надалі $\max\limits_t$ означає $\max\limits_{t\in T}$, якщо $T=[0,b]$ — компакт, і $\max\limits_t$ означає $\max\limits_{t\in\tau}$ для будь-якого компакта $\tau\in T$, якщо T — необмежена множина.

Зауваження 3. Обмеження задачі Коші (9), (10) тільки потенціалами $U_0(x)$, для яких оператор L не має спектральних особливостей, пов'язане з наступними обставинами. Обернена задача для оператора $\mathfrak{B}\frac{d}{dx}+U(x,t)$ з спектральними особливостями може не мати розв'язку при умовах (11) в $S^{(2,1)}(X\times T;\ \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$. Якщо замість (11) припускати експоненціальне спадання по x, обернена задача для оператора $\mathfrak{B}\frac{d}{dx}+$ $+U(x,t)$ з спектральними особливостями стає розв'язуваною [14], проте втрачаються безвідбивні і, зокрема, N-солітонні розв'язки, що випливає з статті [18]. Достатні умови на потенціал оператора L, при яких у оператора L відсутні спектральні особливості, наведено в статтях [18, 19].

Розглянемо в просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$ однопараметричну сім'ю операторів Дірака

$$L(t) = \mathfrak{B}\frac{d}{dx} + U(x, t), \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

де $U(x, t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & -u_1 \end{pmatrix}(x, t)$ — матриця-функція з $S^{(2,1)}(X \times T; \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))$. При цьому покладемо $L(0) = L$. Знайдемо еволюцію по t (в силу нелінійного рівняння Шредінгера (9)) даних розсіяння для оператора (12). Нехай

$$\{(s(\lambda); \widetilde{s}(\lambda)); \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha; \widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{\alpha}}; \chi_0^p, \ldots, \chi_{m_p-1}^p; \widetilde{\chi}_0^i, \ldots, \widetilde{\chi}^i_{\widetilde{m}_i-1}\} \tag{13}$$

— дані розсіяння оператора $L(0)$ (означення 1); $p = 1, \ldots, \alpha$; $i = 1, \ldots, \widetilde{\alpha}$.

У випадку комплексних матриць-функцій $U(x, t)$ і $U(x, 0)$ оператори $L(t)$ і $L(0)$ несамоспряжені і не є унітарно еквівалентними. Проте ізоспектральність операторів $L(t)$ зберігається в комплексному випадку і вимагає особливого доведення. Справедлива теорема.

Теорема 1. 1). *Всі власні значення оператора $L(t)$ від t не залежать і належать до множини інтегралів рівняння* (9).

2). *Дані розсіяння оператора $L(t)$* (12) *мають вигляд*

$$\{s(\lambda, t) = s(\lambda)\exp[4i(\lambda^2 + c)t], \quad \widetilde{s}(\lambda, t) = \widetilde{s}(\lambda)\exp[-4i(\lambda^2 + c)t], \tag{14}$$

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha; \widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{\alpha}}; \quad \chi_0^p(t), \ldots, \chi_{m_p-1}^p(t); \quad \widetilde{\chi}_0^i(t), \ldots, \widetilde{\chi}^i_{\widetilde{m}_i-1}(t)\},$$

$p = 1, \ldots, \alpha$; $i = 1, \ldots, \widetilde{\alpha}$, *де при додаткових до* (11) *умовах*

$$\max_t \lim_{|x|\to\infty} x^j \|U(x, t)\| = 0, \quad \max_t \lim_{|x|\to\infty} x^j \|U_x(x, t)\| = 0, \quad j = 2, \ldots, m_p - 1$$

функції $\chi_j^p(t)$ є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{d}{dt}\chi_j^p(t) = 4i(\lambda_p^2 + c)\chi_j^p(t) + 2i\sum_{q=0}^{j-1}\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix}(\lambda^2 + c)^{(j-q)}_{\lambda=\lambda_p}\frac{q!}{j!}\chi_q^p(t), \tag{15}$$

$p = 1, \ldots, \alpha$; $j = 0, \ldots, m_p - 1$ *з початковими умовами* $\chi_j^p(0) = \chi_j^p$. *Аналогічно при додаткових умовах до* (11):

$$\max_t \lim_{|x|\to\infty} x^j \|U(x, t)\| = 0, \quad \max_t \lim_{|x|\to\infty} x^j \|U_x(x, t)\| = 0, \quad j = 2, \ldots, \widetilde{m}_i - 1$$

функції $\widetilde{\chi}_j^i(t)$ є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\chi}_j^i(t) = -4i(\widetilde{\lambda}_i^2 + c)\widetilde{\chi}_j^i(t) - 2i\sum_{q=0}^{j-1}\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix}(\lambda^2 + c)^{(j-q)}_{\lambda=\widetilde{\lambda}_i}\frac{q!}{j!}\widetilde{\chi}_q^i(t), \tag{16}$$

$i = 1, \ldots, \widetilde{\alpha}$; $j = 0, \ldots, \widetilde{m}_i - 1$ *з початковими умовами* $\widetilde{\chi}_j^i(0) = \widetilde{\chi}_j^i$.

Доведення. Зафіксуємо в рівнянні (9) ($(\widetilde{9})$) певне значення параметра c. Підставимо в рівняння Дірака

$$L(t)y = \lambda y \tag{17}$$

власну функцію $f_{1+}(x, \lambda_p, t)$, що відповідає власному значенню λ_p, і продиференціюємо по t. Будемо використовувати позначення $\partial v/\partial t = \dot{v}$; $\partial v/\partial\lambda = v'$. Одержимо

$$\dot{L}(t)f_{1+}(x, \lambda_p, t) + L(t)\dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t) = \dot{\lambda}_p f_{1+}(x, \lambda_p, t) + \lambda_p\dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t).$$

Тому що $\dot{L}(t) = \dot{U}(x, t)$, то, використовуючи рівняння (9) і нагадуючи, що $A = A_2 + cA_0$, будемо мати

$$(L(t)A - AL(t))f_{1+}(x, \lambda_p, t) + (L(t) - \lambda_p)\dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t) = \dot{\lambda}_p f_{1+}(x, \lambda_p, t)$$

і

$$(L(t) - \lambda_p)(Af_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t)) = \dot{\lambda}_p f_{1+}(x, \lambda_p, t). \qquad (18)$$

Припустимо, що $\frac{\partial}{\partial t}\lambda_p \neq 0$. Тоді з (18) випливає, що $Af_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t)$ — приєднаний вектор, що відповідає власному вектору $\dot{\lambda}_p f_{1+}(x, \lambda_p, t)$. Отже, $(\dot{\lambda} f_{1+}(x, \lambda_p, t))'_{\lambda=\lambda_p} = Af_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t)$, тобто

$$(\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p} f_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{\lambda}_p f'_{1+}(x, \lambda_p, t) + \gamma(t) f_{1+}(x, \lambda_p, t) =$$
$$= Af_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t), \qquad (19)$$

де $\gamma(t)$ — довільна функція змінної t.

Використовуючи умову (11) і означення операторів A_2, A_0, одержуємо

$$Af_{1+}(x, \lambda, t) = 2(\lambda^2 + c)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1) \text{ при } x \to +\infty, \qquad (20)$$

$$Af_{2-}(x, \lambda, t) = 2(\lambda^2 + c)\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + o(1) \text{ при } x \to -\infty. \qquad (21)$$

Тому що $\dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t) = \dot{\lambda}_p f'_{1+}(x, \lambda_p, t) + o(1)$ при $x \to +\infty$, то, використовуючи (20), знаходимо

$$Af_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{1+}(x, \lambda_p, t) = -2i(\lambda_p^2 + c)\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda_p x} +$$
$$+ \dot{\lambda}_p ix \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda_p x} + o(1), \quad x \to +\infty. \qquad (22)$$

Для лівої частини (19) маємо асимптотику:

$$(\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p} f_{1+}(x, \lambda_p, t) + \dot{\lambda}_p f'_{1+}(x, \lambda_p, t) + \gamma(t) f_{1+}(x, \lambda_p, t) =$$
$$= (\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda_p x} + \dot{\lambda}_p ix \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda_p x} + \gamma(t)\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\lambda_p x}, \quad x \to +\infty.$$

Порівнюючи цю асимптотику з асимптотикою (22), з (19) одержуємо

$$-2i(\lambda_p^2 + c) = (\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p} + \gamma(t). \qquad (23)$$

Тепер порівняємо асимптотики в рівності (19) при $x \to -\infty$. Тому що $w(\lambda_p) = 0$, то при $x \to -\infty$ розв'язок $f_{1+}(x, \lambda_p, t)$ має асимптотику розв'язку $f_{2-}(x, \lambda_p, t)$, тобто (19) можна переписати так:

$$((\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p} + \gamma(t)) f_{2-}(x, \lambda_p, t) + \dot{\lambda}_p f'_{2-}(x, \lambda_p, t) =$$
$$= Af_{2-}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{2-}(x, \lambda_p, t). \qquad (19')$$

Для правої частини (19′) маємо асимптотику

$$Af_{2-}(x, \lambda_p, t) + \dot{f}_{2-}(x, \lambda_p, t) = 2i(\lambda_p^2 + c)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\lambda_p x} -$$
$$- \dot{\lambda}_p ix \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\lambda_p x} + o(1) \text{ при } x \to -\infty, \qquad (22')$$

для лівої частини (19′) —

$$((\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p}+\gamma(t))\,f_{2-}(x,\lambda_p,t)+\dot{\lambda}_p f'_{2-}(x,\lambda_p,t)=((\lambda)'_{\lambda=\lambda_p}+\gamma(t))\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\lambda_p x}+$$
$$+\dot{\lambda}_p(-ix)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{-i\lambda_p x}+o(1),\qquad x\to-\infty.$$

Порівнюючи цю асимптотику з асимптотикою (22′), на основі (19′) одержуємо

$$2i(\lambda_p^2+c)=(\dot{\lambda})'_{\lambda=\lambda_p}+\gamma(t). \tag{23′}$$

З (23) і (23′) випливає

$$\lambda_p^2+c=0. \tag{24}$$

Рівність (24) означає, що довільне власне значення λ_p з півплощини $\operatorname{Im}\lambda>0$ є коренем рівняння $\lambda^2+c=0$, не залежного від t. Значить, $\frac{\partial}{\partial t}\lambda_p=0$ і ми одержали суперечність з припущенням $\frac{\partial}{\partial t}\lambda_p\neq 0$. Ця суперечність доводить твердження 1 теореми 1, якщо врахувати, що випадок власного значення $\widetilde{\lambda}_i$ з нижньої півплощини розглядається аналогічно.

Тепер з (18) маємо

$$(L(t)-\lambda_p)(Af_{1+}(x,\lambda_p,t)+\dot{f}_{1+}(x,\lambda_p,t))=0, \tag{25}$$

тобто $Af_{1+}(x,\lambda_p,t)+\dot{f}_{1+}(x,\lambda_p,t)$ є не приєднаним, а власним вектором оператора $L(t)$, що відповідає власному значенню λ_p. Розглянемо асимптотичну рівність (22). Оскільки $\frac{\partial\lambda_p}{\partial t}=0$ і розв'язок рівняння (17) асимптотичною поведінкою на $\pm\infty$ визначається однозначно, то з (25) і (22) маємо

$$Af_{1+}(x,\lambda_p,t)+\dot{f}_{1+}(x,\lambda_p,t)=-2i(\lambda_c^2+c)\,f_{1+}(x,\lambda_p,t). \tag{26}$$

Аналогічно, використовуючи (21), одержуємо формулу

$$Af_{2-}(x,\lambda_p,t)+\dot{f}_{2-}(x,\lambda_p,t)=2i(\lambda_r^2+c)\,f_{2-}(x,\lambda_p,t). \tag{27}$$

Формулу (27) використаємо для обчислення еволюції нормувального ланцюжка $\{\chi_0^p(t),\ldots,\chi_{m_p-1}^p(t)\}$. З (27) знаходимо (позначаючи через $f_{2-}^{(j)}(x,\lambda_p,t)$ значення j-ї похідної по λ при $\lambda=\lambda_p$):

$$Af_{2-}^{(j)}(x,\lambda_p,t)+\dot{f}_{2-}^{(j)}(x,\lambda_p,t)=2i\sum_{q=0}^{j}\begin{pmatrix}q\\ j\end{pmatrix}(\lambda^2+c)^{(j-q)}_{\lambda=\lambda_p}f_{2-}^{(q)}(x,\lambda_p,t). \tag{28}$$

Підставимо в (28) вираз (8) для $f_{2-}^{(j)}(x,\lambda_p,t)$:

$$A\sum_{\nu=0}^{j}\chi_{j-\nu}^p(t)\frac{j!}{\nu!}f_{1+}^{(\nu)}(x,\lambda_p,t)+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{j}\left(\dot{\chi}_{j-\nu}^p(t)\frac{j!}{\nu!}f_{1+}^{(\nu)}(x,\lambda_p,t)+\chi_{j-\nu}^p(t)\frac{j!}{\nu!}\dot{f}_{1+}^{(\nu)}(x,\lambda_p,t)\right)=$$
$$=2i\sum_{q=0}^{j}\begin{pmatrix}q\\ j\end{pmatrix}(\lambda^2+c)^{(j-q)}_{\lambda=\lambda_p}\sum_{\mu=0}^{q}\chi_{q-\mu}^p(t)\frac{q!}{\mu!}f_{1+}^{(\mu)}(x,\lambda_p,t).$$

Прирівнюючи зліва і справа коефіцієнти при головних членах асимптотики при $x\to+\infty$, одержуємо

$$\frac{j!}{\nu!}\dot{\chi}_{j-\nu}^p(t)-2i(\lambda_p^2+c)\frac{j!}{\nu!}\chi_{j-\nu}^p(t)=$$

$$= 2i \sum_{q \geqslant \nu}^{j} \binom{q}{j} (\lambda^2 + c)^{(j-q)}_{\lambda=\lambda_p} \frac{q!}{\nu!} \chi^p_{q-\nu}(t), \tag{29}$$

де $\nu = 0, 1, \ldots, j$; $j = 0, \ldots, m_p - 1$. При цьому ми використали умови $\max\limits_t \lim\limits_{|x| \to \infty} x^j \| U(x, t) \| = 0$, $\max\limits_t \lim\limits_{|x| \to \infty} x^j \| U_x(x, t) \| = 0$, $j = 2, \ldots, m_p - 1$.

З (29) при $\nu = 0$, $0! = 1$ одержуємо (15). Зокрема, для $\chi^p_0(t)$ маємо еволюцію $\chi^p_0(t) = \chi^p_0 \exp[4i(\lambda^2 + c)t]$. Рівняння (16) одержуємо аналогічно.

Знайдемо еволюцію функцій $v(\lambda, t)$, $\tilde{v}(\lambda, t)$, а також покажемо, що $\frac{\partial}{\partial t} w(\lambda, t) = 0$ і $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}(\lambda, t) = 0$. Аналогічно формулі (26) знаходимо

$$Af_{1+}(x, \lambda, t) + \dot{f}_{1+}(x, \lambda, t) = -2i(\lambda^2 + c) f_{1+}(x, \lambda, t). \tag{30}$$

Нехай тепер $x \to -\infty$. Оскільки з (5) випливає

$$f_{1+}(x, \lambda, t) = \frac{1}{2i} w(\lambda, t) f_{1-}(x, \lambda, t) + \frac{1}{2i} \tilde{v}(\lambda, t) f_{2-}(x, \lambda, t),$$

то, використовуючи (30), одержуємо

$$w(\lambda, t) Af_{1-}(x, \lambda, t) + \tilde{v}(\lambda, t) Af_{2-}(x, \lambda, t) + \dot{w}(\lambda, t) f_{1-}(x, \lambda, t) +$$

$$+ w(\lambda, t) \dot{f}_{1-}(x, \lambda, t) + \dot{\tilde{v}}(\lambda, t) f_{2-}(x, \lambda, t) + \tilde{v}(\lambda, t) \dot{f}_{2-}(x, \lambda, t) =$$

$$= -2i(\lambda^2 + c)[w(\lambda, t) f_{1-}(x, \lambda, t) + \tilde{v}(\lambda, t) f_{2-}(x, \lambda, t)].$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових асимптотиках зліва і справа, маємо $\frac{\partial}{\partial t} w(\lambda, t) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{v}(\lambda, t) = -4i(\lambda^2 + c)\tilde{v}(\lambda, t)$. Тому

$$w(\lambda, t) = w(\lambda, 0) = w(\lambda), \quad \tilde{v}(\lambda, t) = \tilde{v}(\lambda) \exp[-4i(\lambda^2 + c)t], \tag{31}$$

де $\tilde{v}(\lambda) = \tilde{v}(\lambda, 0)$. Виходячи з формули

$$Af_{2-}(x, \lambda, t) + \dot{f}_{2-}(x, \lambda, t) = 2i(\lambda^2 + c) f_{2-}(x, \lambda, t)$$

і міркуючи аналогічно, знаходимо

$$v(\lambda, t) = v(\lambda) \exp[4i(\lambda^2 + c)t]. \tag{32}$$

Аналогічно одержуємо $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}(\lambda, t) = 0$.

Використовуючи (31) і (32) і означення функції розсіяння, одержуємо формули (14) для $s(\lambda, t)$ і $\tilde{s}(\lambda, t)$. Теорема 1 доведена.

Тепер, щоб знайти розв'язки нелінійного рівняння Шредінгера (9) з $S^{(2,1)}(X \times T; \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))$, потрібно розв'язати обернену задачу: за даними розсіяння (14) відновити потенціал $U(x, t)$. При цьому дані розсіяння (14) мають задовольняти умови, що є необхідними і достатніми і сформульовані в п. 3.

3. Умови єдиної розв'язності і алгоритм оберненої задачі. Спочатку випишемо умови, необхідні і достатні для єдиної симетричної факторизації функції розсіяння $(s(\lambda, t), \tilde{s}(\lambda, t))$.

Нехай $(s(\lambda, t); \tilde{s}(\lambda, t))$ задовольняє умови:

1) $s(\lambda, t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $|\lambda| \to \infty$; $\tilde{s}(\lambda, t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $|\lambda| \to \infty$ рівномірно по $t \in T$;

2) $s(\lambda, t)\tilde{s}(\lambda, t)$ не обертається в нескінченність (при дійсних λ);

3) $1 + s(\lambda, t)\tilde{s}(\lambda, t) \neq 0$.

Тоді існує єдина пара функцій $w(\lambda, t)$ і $\widetilde{w}(\lambda, t)$, аналітичних в півплощинах $\operatorname{Im}\lambda > 0$ і $\operatorname{Im}\lambda < 0$ при фіксованому t з асимптотикою $2i\left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$ при $|\lambda| \to \infty$ рівномірно в кожній з півплощин $\operatorname{Im}\lambda \geqslant \tau > 0$ і $\operatorname{Im}\lambda \leqslant \widetilde{\tau} < 0$ відповідно. При цьому на дійсній осі виконується співвідношення симетричної факторизації

$$w(\lambda, t)\,\widetilde{w}(\lambda, t) = \frac{4}{1 + s(\lambda, t)\,\widetilde{s}(\lambda, t)}.$$

Функції $w(\lambda, t)$ і $\widetilde{w}(\lambda, t)$ мають задані числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ і $\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_{\widetilde{\alpha}}$ коренями кратності $m_1, \ldots, m_\alpha$ і $\widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_{\widetilde{\alpha}}$ відповідно в півплощинах $\operatorname{Im}\lambda > 0$ і $\operatorname{Im}\lambda < 0$. Крім того, виконується співвідношення погодження [15]

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\alpha + \widetilde{m}_1 + \widetilde{m}_2 + \ldots + \widetilde{m}_{\widetilde{\alpha}} = \operatorname{ind} \frac{1}{1 + s(\lambda, t)\,\widetilde{s}(\lambda, t)}. \quad (33)$$

Умова (33) виникає при зведенні задачі симетричної факторизації функції розсіяння до задачі Рімана.

Умови 2 і 3 виконуються, причому в силу (14) $s(\lambda, t)\,\widetilde{s}(\lambda, t) = s(\lambda)\,\widetilde{s}(\lambda)$ і, значить, $w(\lambda)\,\widetilde{w}(\lambda) = \dfrac{4}{1 + s(\lambda)\,\widetilde{s}(\lambda)}$, де $w(\lambda) = w(\lambda, 0)$, $\widetilde{w}(\lambda) = \widetilde{w}(\lambda, 0)$. Якщо $s(\lambda) \not\equiv 0$, $\widetilde{s}(\lambda) \not\equiv 0$ і t приймає значення на необмеженій множині дійсної осі (наприклад, $t \in T = [0, \infty)$, $t \in T = (-\infty, \infty)$, $t \in T = (-\infty, 0]$), то умова 1 виконується тільки при дійсному значенні параметра c. Якщо t приймає значення з компакту $T = [0, b]$, то умова 1 виконується при дійсних і комплексних значеннях параметра c.

Введемо функції, аналогічні функціям, впровадженим в статті [14] (у даній статті ситуація простіша в зв'язку з відсутністю спектральних особливостей):

$$F_+(x, t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} f_s^+(x, t) & 0 \\ 0 & f_{\widetilde{s}}^-(x, t) \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \sum\limits_{p=1}^{\alpha} f_p^+(x, t) & 0 \\ 0 & \sum\limits_{l=1}^{\widetilde{\alpha}} f_l^-(x, t) \end{vmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}^{-1}, \quad (34)$$

$$f_s^+(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(\lambda, t)\, e^{ix\lambda} d\lambda, \quad f_{\widetilde{s}}^-(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{s}(\lambda, t)\, e^{-ix\lambda} d\lambda, \quad (35)$$

$$f_p^+(x, t) = i \sum_{\nu=0}^{m_p - 1} \chi_{m_p - 1 - \nu}^{p}(t)\, \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d}{d\nu}\right)^{\nu} e^{ix\lambda}\, \frac{(\lambda - \lambda_p)^{m_p}}{w(\lambda)} \Bigg|_{\lambda = \lambda_p}, \quad \operatorname{Im}\lambda_p > 0,$$

$$f_l^-(x, t) = i \sum_{\nu=0}^{\widetilde{m}_l - 1} \widetilde{\chi}_{\widetilde{m}_l - 1 - \nu}^{l}(t)\, \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{\nu} e^{-ix\lambda}\, \frac{(\lambda - \lambda_l)^{\widetilde{m}_l}}{\widetilde{w}(\lambda)} \Bigg|_{\lambda = \widetilde{\lambda}_l}, \quad \operatorname{Im}\widetilde{\lambda}_l < 0.$$

Складемо основне рівняння, яке задовольняє ядро $K_+(x, \xi, t)$ ($K_+(x, \xi, 0)$ означено в (3)):

$$K_+(x, \xi, t) + \int\limits_x^{\infty} K_+(x, \gamma, t)\, F_+(\gamma + \xi, t)\, d\gamma + F_+(x + \xi, t) = 0, \quad (36)$$

де $-\infty < x \leqslant \xi < \infty$.

Рівняння, аналогічне (36), справедливе і для $K_-(x, \xi, t)$:

$$K_-(x, \xi, t) + \int_{-\infty}^{x} K_-(x, \gamma, t) F_-(\gamma + \xi, t) d\gamma + F_-(x + \xi, t) = 0,$$

де $-\infty < \xi \leqslant x < \infty$, а ядро $F_-(x, t)$ будується по $s_1(\lambda, t) = \dfrac{\tilde{s}(\lambda, t)\tilde{w}(\lambda)}{w(\lambda)}$ і $\tilde{s}_1(\lambda, t) = \dfrac{s(\lambda, t) w(\lambda)}{\tilde{w}(\lambda)}$ аналогічно $F_+(x, t)$.

Функції $f_s^+(x, t)$ і $f_{\tilde{s}}^-(x, t)$ (35) належать до $L_2(\mathbb{R})$ при кожному фіксованому t.

Теорема 2. *При довільному $\delta > -\infty$ рівняння*

$$\varphi(\xi, t) + \int_{\delta}^{\infty} \varphi(\zeta, t) F_+(\zeta + \xi, t) d\zeta = 0$$

має лише нульовий розв'язок з $L_2(\delta, \infty)$ при кожному фіксованому $t \in T$.

Теорема 2 доводиться аналогічно [9]. З теореми 2 випливає, що основне рівняння (36) має єдиний розв'язок.

Подамо алгоритм розв'язку оберненої задачі. За даними розсіяння (14) одержуємо єдину пару функцій $w(\lambda, t) = w(\lambda, 0) = w(\lambda)$ і $\tilde{w}(\lambda, t) = \tilde{w}(\lambda, 0) = \tilde{w}(\lambda)$ в результаті симетричної факторизації функції розсіяння $(s(\lambda, t), \tilde{s}(\lambda, t))$. Маючи функції $w(\lambda)$, $\tilde{w}(\lambda)$, будуємо ядро $F_+(x, t)$ (34). Рівняння (36) в силу теореми 2 має єдиний розв'язок $K_+(x, \xi, t)$, для якого при $-\infty < \gamma \leqslant x < \infty$ справедливі оцінки [11]

$$\max_t |K_{11,22}(x, x, t)| \leqslant \frac{d(\gamma)}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}, \quad \max_t |K_{12,21}(x, x, t)| \leqslant \frac{d(\gamma)}{1 + |x|^{2+2\varepsilon}}, \tag{37}$$

$$\max_t [|K_{ij_x}(x, y, t)| + |K_{ij_y}(x, y, t)|]_{x=y} \leqslant \frac{d(\gamma)}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}. \tag{38}$$

Маючи $K_+(x, \xi, t)$, одержуємо потенціал $U(x, t)$ оператора Дірака $L(t) = \mathfrak{B}\dfrac{d}{dx} + U(x, t)$ за формулою

$$U(x, t) = \mathfrak{B}K_+(x, x, t) - K_+(x, x, t)\mathfrak{B}. \tag{39}$$

При цьому, слідуючи статті [11], за допомогою оцінок (37), (38) доводяться твердження коректності. А саме, показується, що матриця-функція $K_+(x, \xi, t)$ задовольняє рівняння

$$\mathfrak{B}K_{+_x}(x, \xi, t) + K_{+_\xi}(x, \xi, t)\mathfrak{B} + U(x, t) K_+(x, \xi, t) = 0$$

з початковою умовою $\lim\limits_{\xi\to\infty} K_{ij}(x, \xi, t) = 0$, де $U(x, t) = \mathfrak{B}K_+(x, x, t) - K_+(x, x, t)\mathfrak{B}$. Звідси випливає, що вектор-функція $f_{1+}(x, \lambda, t)$, визначена за формулою (3), задовольняє рівняння Дірака (17) з потенціалом $U(x, t)$, визначеним за формулою (39). За допомогою оцінок (37), (38) знаходяться оцінки (11) для функції $U(x, t)$.

З викладеного вище випливає наступна теорема єдиності для задачі Коші (9), (10).

Теорема 3. I. *Нехай задано початкову функцію $U_0(x)$ (10) таку, що $(s(\lambda) \not\equiv 0, \tilde{s}(\lambda) \not\equiv 0)$ і виконуються умови теореми 1. Тоді:*

1) якщо t приймає значення на необмеженій множині $T \subseteq \mathbb{R}$ (наприклад, $T = (-\infty, \infty)$, $T = [0, \infty)$, $T = (-\infty, 0]$), параметр c в рівнянні (9) дійсний, то задача Коші (9), (10) має єдиний розв'язок $U(x, t) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & -u_1 \end{pmatrix}(x, t)$ в просторі $S^{(2,1)}(X \times T; \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))$ з умовами (11);

2) *якщо* t *приймає значення з компакту* $T = [0, b]$, *то задача Коші* (9), (10) *має єдиний розв'язок в* $S^{(2,1)}(X \times T; \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))$ *з умовами* (11) *при дійсних і комплексних значеннях параметра* c.

II. *Нехай початкова функція* $U_0(x)$ (10) *така, що* $(s(\lambda) \equiv 0, \tilde{s}(\lambda) \equiv 0)$. *Тоді задача Коші* (9), (10) *має єдиний розв'язок для дійсних і комплексних значень параметра* c *в* $S^{(2,1)}(X \times T; \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))$ *з умовами* (11) *для всіх перелічених вище множин* $T \subseteq \mathbb{R}$ $(T = [0, b], T = [0, \infty), T = (-\infty, \infty), T = (-\infty, 0])$. *В цьому випадку одержуємо матричний безвідбивний розв'язок рівняння* (9).

Зауваження 4. З статті [18] випливає, що $s(\lambda) \equiv 0$ тоді і тільки тоді, коли $\tilde{s}(\lambda) \equiv 0$.

Зауваження 5. Опис картини зіткнень безвідбивних розв'язків рівняння (9) може бути предметом окремої статті.

1. *Method* for solving the Korteveg-de Vries equation / C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura /Phys. Rev. Lett.— 1967.— **19**, N 19.— P. 1095—1097.
2. *Теория* солитонов. Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 324 с.
3. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1977.— 331 с.
5. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math.— 1968.— **21**.— P. 467—490.
6. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1971.— **61**, № 1.— С. 118—134.
7. *Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д.* Гальмитонов поход в теории солитонов.— М. : Наука, 1986.— 528 с.
8. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений.— Киев: Наук. думка, 1991.— 232 с.
9. *Лянце В. Э.* Аналог обратной задачи рассеяния для несамосопряженного оператора // Мат. сб.— 1967.— **72**, № 4.— С. 537—557.
10. *Гасымов М. Г.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1968.— **19**.— С. 41—112.
11. *Фролов И. С.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР.— 1972.— **207**, № 1.— С. 44—47.
12. *Максудов Ф. Г., Велиев С. Г.* Факторизация матрицы рассеяния для системы уравнений Дирака на всей оси // Тр. II Всесоюзн. летн. мат. школы по спектр. теории операторов.— Баку: Элм, 1979.— С. 121—133.
13. *Блащак В. А.* Обратная задача теории рассеяния для несамосопряженного оператора Штурма—Лиувилля // Тр. летн. школы по спектральной теории операторов и теории представлений групп.— Баку : Элм, 1975.— С. 11—19.
14. *Максудов Ф. Г., Велиев С. Г.* Обратная задача рассеяния для несамосопряженного оператора Дирака на всей оси // Докл. АН СССР.— 1975.— **225**, № 6.— С. 1263—1266.
15. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Физматгиз, 1963.— 639 с.
16. *Фам Лой Ву.* Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Укр. мат. журн.— 1972.— **24**, № 5.— С. 667—675.
17. *Сыроид И.-П. П.* О дискретном спектре одномерного оператора Дирака // Функцион. анализ.— Ульяновск, 1987.— С. 182—186.
18. *Сыроид И.-П. П.* Условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Дирака в терминах потенциала // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С. 352—359.
19. *Сироїд І.-П. П.* Спектральність оператора Дірака в термінах потенціалу // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1986.— № 12.— С. 8—10.
20. *Сыроид И.-П. П.* Комплексные решения общего уравнения Кортевега — де Фриза: метод обратной задачи // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 2.— С. 223—230.

Одержано 06.03.92