

УДК 519.21

Р. В. Бобрик, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Про стійкість в середньому квадратичному для гармонійного осцилятора з випадковим параметром

Одержані достатні умови для стійкості в середньому квадратичному гармонійного осцилятора, у якого випадковим параметром є процес Орнштейна — Уленбека.

Получены достаточные условия для устойчивости в среднем квадратическом гармонического осциллятора, случайным параметром которого является процесс Орнштейна — Уленбека.

В [1, с. 197] сформульована гіпотеза про те, що кожний результат відносно стійкості для диференціальних рівнянь з «білим» шумом справедливий і для рівнянь з достатньо регулярними випадковими збуреннями, що є в певному розумінні близькими до «білого» шуму.

Мета даної статті — показати, що існують важливі рівняння, для яких це припущення вірне і без вимоги про близькість збурень до «білого» шуму.

Розглянемо рівняння гармонійного осцилятора

$$d^2x(t)/dt^2 + (k + \beta\xi_\tau(t)) dx(t)/dt + \omega x(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

де $k > 0$, $\omega > 0$, а $\xi_\tau(t)$ — процес Орнштейна — Уленбека з кореляційною функцією

$$B(t) = M[\xi_\tau(t+s)\xi_\tau(s)] = \tau \exp\{-\tau|t|\}.$$

Як впливає із [2, с. 241], розв'язок рівняння (1) при $\tau \rightarrow \infty$ слабко збігається до розв'язку стохастичного диференціального рівняння Іто

$$d\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + (k + \beta^2) \frac{dy(t)}{dt} dt + \omega y(t) dt + V\sqrt{2\beta} \frac{dy(t)}{dt} d\omega(t) = 0, \quad (2)$$

з тими ж самими початковими умовами. Тут $\omega(t)$ — стандартний вінерівський процес.

Стійкість в середньому квадратичному для рівняння (2) досліджувалась в [1, 3], звідки випливає, що нерівність

$$2\beta^2 \leq k \quad (3)$$

є необхідною і достатньою умовою для стійкості тривіального його розв'язку в середньому квадратичному, а строга нерівність — для асимптотичної стійкості в середньому квадратичному.

Справедлива наступна теорема.

Т е о р е м а. *Нерівність (3) є достатньою умовою для стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку рівняння (1) при будь-яких $\tau > 0$, $\omega > 0$.*

Д о в е д е н н я. Вводячи вектор

$$u(t) = \text{col}\left(\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2, V\sqrt{2\omega x(t)} \frac{dx(t)}{dt}, \omega(x(t))^2\right),$$

для нього на основі (1) одержуємо рівняння в R^3

$$du(t)/dt = Au(t) + \xi_\tau(t)Cu(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -2k & -\sqrt{2\omega} & 0 \\ \sqrt{2\omega} & -k & -\sqrt{2\omega} \\ 0 & \sqrt{2\omega} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На основі формули інтегрування частинами для міри Гаусса [4, с. 79] одержуємо для $Mu(t)$ нескінченний ланцюжок рівнянь з варіаційними похідними [5]:

$$\frac{dMu(t)}{dt} = AMu(t) + C \int_0^t B(t-s) M \frac{\delta u(s)}{\delta \xi_\tau(s)} ds,$$

$$M \frac{\delta^n u(t)}{\delta \xi_\tau(s_1) \dots \delta \xi_\tau(s_n)} = A \int_0^t M \frac{\delta u(t_1)}{\delta \xi_\tau(s_1) \dots \delta \xi_\tau(s_n)} dt_1 +$$

$$+ C \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} B(t_1 - s_{n+1}) M \frac{\delta^n u(t_1)}{\delta \xi_\tau(s_1) \dots \delta \xi_\tau(s_{n+1})} ds_{n+1} dt_1 + \sum_{i=1}^n \theta(t - s_i) \times \\ \times CM \frac{\delta^{n-1} u(s_i)}{\delta \xi_\tau(s_1) \dots \delta \xi_\tau(s_{i-1}) \delta \xi_\tau(s_{i+1}) \dots \delta \xi_\tau(s_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де $\theta(t)$ — функція Хевісайда.

Для функцій

$$v_0(t) = Mu(t), \quad v_n(t) = \int_0^t \dots \int_0^t \exp \left\{ -\tau \sum_{i=1}^n (t - s_i) \right\} \times \\ \times M \frac{\delta^n u(t)}{\delta \xi_\tau(s_1) \dots \delta \xi_\tau(s_n)} ds_1 \dots ds_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

цей ланцюжок можна подати як ланцюжок лінійних диференціальних рівнянь

$$dv_0(t)/dt = Av_0(t) + \tau Cv_1(t), \quad dv_n(t)/dt = -n\tau v_n(t) + Av_n(t) + \\ + \tau Cv_{n+1}(t) + nCv_{n-1}(t), \quad (5)$$

$$v_0(0) = u(0), \quad v_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Розглянемо банахів простір F нескінченних послідовностей функцій

$$g = \{g_n(t), n = 0, 1, 2, \dots, \sup_n \sup_{t>0} [e^{-\sigma t} d^n \|g_n(t)\|] < \infty\},$$

з нормою

$$\|g\| = \sup_n \sup_t [e^{-\sigma t} d^n \|g_n(t)\|].$$

Тут σ і d — деякі додатні параметри, а $\|\cdot\|$ — норма в евклідовому просторі R^3 .

Якщо помножити ліву і праву частини рівняння для $v_n(t)$ в (5) на $\exp \{nt\}$ і перейти до інтегральної форми, то ланцюжок (5) можна зобразити у вигляді лінійного рівняння в просторі F :

$$v = Gv + g_0,$$

де оператор G і вільний член g_0 визначаються правою частиною ланцюжка (5).

На основі (5) для норми оператора G неважко одержати оцінку

$$\|G\| \leq \max \left\{ \frac{d\|A\| + \tau\|C\|}{d\sigma}; \sup_n \left(\frac{d\|A\| + \tau\|C\| + d^2n\|C\|}{d(\sigma + n)} \right) \right\}.$$

Звідси видно, що вибором σ і d завжди можна добитись, щоб $\|G\| < 1$, а отже у ланцюжка (5) існує єдиний розв'язок із простору F .

Нехай (\cdot, \cdot) — скалярний добуток в R^3 ,

$$z_n(t) = \sqrt{\frac{\tau^n}{n!}} v_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді, враховуючи вигляд матриці A і симетричність матриці C , із ланцюжка (5) маємо

$$\frac{1}{2} \frac{d\|z_0(t)\|^2}{dt} = (Dz_0(t), z_0(t)) - \|Cz_0(t)\|^2 + \sqrt{\tau}(Cz_0(t), z_1(t)), \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt} = (Dz_n(t), z_n(t)) - n\tau\|z_n(t)\|^2 - \|Cz_n(t)\|^2 +$$

$$+ \sqrt{(n+1)\tau}(z_{n+1}(t), Cz_n(t)) + \sqrt{n\tau}(Cz_{n-1}(t), z_n(t)), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

де D — діагональна матриця, $D = \text{diag}(-2k + 4\beta^2, -k + \beta^2, 0)$.

Оскільки $v_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, належить F , то збіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \|z_n(t)\|^2$, а також з урахуванням (5) і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt}$. Із рівностей (6) випливає

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (Dz_n(t), z_n(t)).$$

Таким чином, якщо виконується умова (3), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\|z_n(t)\|^2}{dt} \leq 0.$$

Звідси на основі теорії стійкості Ляпунова, враховуючи вигляд вектора $u(t)$ і те, що $z_0(t) = Mu(t)$, одержуємо твердження теореми.

1. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
2. Стохастическое исчисление / С. В. Анулова, А. Ю. Веретенников, Н. В. Крылов и др. // Итоги науки и техники. Современ. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНТИ. — 1989. — 49. — С. 5—260.
3. Гихман И. И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Предельные теоремы и статист. выводы. — Ташкент: Ин-т математики АН УзССР, 1966. — С. 14—45.
4. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
4. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983. — 384 с.
5. Бобрик Р. В. Об одном свойстве устойчивых систем линейных стохастических уравнений // Укр. мат. журн. — 1990. — 42, № 2. — С. 147—152.

Одержано 06.03.92