УДК 519.947

О. Л. Горбачук, канд фіз.-мат. наук,
Н. О. Яконська, студ. (Львів. ун-т)

Існування границі в розумінні Чезаро обмеженого розв'язку еволюційного рівняння в банаховому просторі

Одержано критерій існування границі в розумінні Чезаро $\left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi\right)$ обмеженого розв'язку $y(t)$ задачі $dy(t)/dt = Ay(t)$, $y(0) = y_0$, $t\in[0,\infty)$, де A — лінійний замкнений оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ в рефлексивному банаховому просторі E, при умові, що існує достатньо малий інтервал $(0,\delta)$, який належить множині регулярних точок $\rho(A)$ оператора A.

Получен критерий существования предела в смысле Чезаро $\left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi\right)$ ограниченного решения $y(t)$ задачи $dy(t)/dt = Ay(t)$, $y(0) = y_0$, $t\in[0,\infty)$, где A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения $D(A)$ в рефлексивном банаховом пространстве E, при условии, что найдется достаточно малый интервал $(0,\delta)$, принадлежащий множеству регулярных точек $\rho(A)$ оператора A.

У даній роботі вивчається питання про існування границі в розумінні Чезаро обмеженого розв'язку еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t\in[0,\infty)$, де A — лінійний замкнений оператор, область визначення $D(A)$ якого щільна в рефлексивному банаховому просторі E. Зауважимо, що у випадку скінченновимірного простору E обмежений розв'язок еволюційного рівняння має границю в розумінні Чезаро для будь-якого лінійного оператора A. Це легко встановити, використовуючи жорданову форму матриці оператора.

Нагадаємо, що $(C-1)\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi$ ($(C-1)$ — lim — границя в розумінні Чезаро, [1, с. 519]), а (A) — lim — границя за Абелем, яка згідно з [1] дорівнює $\lim\limits_{\lambda\to 0,\lambda>0}\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}y(\xi)\,d\xi$. Основні факти, необхідні надалі, викладені в [1, 2].

Теорема. *Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною в рефлексивному банаховому просторі E областю визначення $D(A)$, причому знайдеться таке $\delta>0$, що інтервал $(0,\delta)$ належить множині регулярних точок $\rho(A)$ оператора A. Тоді обмежений розв'язок $y(t)$ еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t\in[0,\infty)$, має границю в розумінні Чезаро, якщо і тільки якщо існує $\lim\limits_{\lambda\to 0,\lambda>0}\lambda R_\lambda y(0)$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi = \lim\limits_{\lambda\to 0,\lambda>0}\lambda R_\lambda y(0)$.*

Доведення. Зауважимо, що для обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння границя в сенсі Чезаро збігається з границею в сенсі Абеля [3, с. 92], тобто

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi = \lim_{\lambda\to 0,\lambda>0}\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}y(\xi)\,d\xi.$$

Звідси, оскільки

$$\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}y(\xi)\,d\xi = -\int\limits_0^\infty y(\xi)\,de^{-\lambda\xi} = y(0) + \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}Ay(\xi)\,d\xi,$$

то

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}(\lambda I - A)\,y(\xi)\,d\xi = R_0(0).$$

На підставі цього, враховуючи, що $\lambda I - A$ замкнений, одержуємо $(\lambda I - A)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}y(\xi)\,d\xi = y(0)$ і, як наслідок, $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}y(\xi)\,d\xi = R_\lambda y(0)$ для $\lambda \in (0, \delta)$. З останньої рівності маємо

$$\lim_{\lambda\to 0,\lambda>0} \lambda \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\xi}y(\xi)\,d\xi = \lim_{\lambda\to 0,\lambda>0} \lambda R_\lambda y(0),$$

що і завершує доведення теореми.

Наслідок 1. *Нехай A — лінійний замкнений оператор зі щільною в рефлексивному банаховому просторі E областю визначення $D(A)$, для якого $0 \notin \sigma(A)$, де $\sigma(A)$ — спектр оператора A. Тоді границя в розумінні Чезаро обмеженого розв'язку $y(t)$ еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, дорівнює нулю.*

Доведення. Оскільки множина регулярних точок $\rho(A)$ відкрита, то знайдеться деяке таке $\delta > 0$, що інтервал $(0, \delta)$ належить $\rho(A)$. Тоді в силу теореми

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi = \lim_{\lambda\to 0,\lambda>0} \lambda R_\lambda y(0) = 0R_0 y(0) = 0.$$

Наслідок 2. *Нехай A — генератор обмеженої напівгрупи $U(t)$ класу C_0 в рефлексивному банаховому просторі E. Тоді будь-який розв'язок $y(t)$ еволюційного рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$, $t \in [0, \infty)$, має границю в розумінні Чезаро і*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi = Py(0),$$

де P — проектор на ядро Ker *A оператора A.*

Доведення. Оскільки напівгрупа $U(t)$ обмежена, то кожен розв'язок рівняння $dy(t)/dt = Ay(t)$ також обмежений. Як і в доведенні леми 1 [4], $\lim\limits_{\lambda\to 0,\lambda>0} \lambda R_\lambda y(0) = Py(0)$, звідки в силу теореми

$$(C - 1)\lim_{t\to\infty} y(t) = Py(0).$$

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 830 с.
2. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.— 464 с.
3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения.— Киев : Вища шк., 1989.— 120 с.
4. *Горбачук Е. Л.* Решение одной обратной задачи для эволюционного уравнения в банаховом пространстве // Укр. мат. журн.— 1990.— 42, № 9.— С. 1262—1265.

Одержано 14.02.92