УДК 517.9

Т. І. Зеленяк, д-р фіз.-мат. наук
(Ін-т математики Сибір. від-ня АН Росії, Новосибірськ)

До питання про застосування варіаційних методів у теорії параболічних рівнянь

Викладено основні математичні принципи застосування варіаційних методів у теорії параболічних рівнянь.

Изложены основные математические принципы применения вариационных методов в теории параболических уравнений.

Розглянемо задачу

$$u_t = a(x, u, u_x) u_{xx} + b(x, u, u_x), \tag{1}$$

$$\alpha_0 [u_x - \varphi(u)] + \beta_0 u \big|_{x=0} = \alpha_1 [u_x - \psi(u)] \big|_{x=1} = 0, \tag{2}$$

$$u \big|_{t=0} = u_0(x). \tag{3}$$

Припустимо, що $a(x, \xi, \eta)$, $b(x, \xi, \eta)$, $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$, $u_0(x)$ — двічі диференційовані функції для $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-\infty < \xi, \eta < \infty$, $\alpha_i \beta_i = 0$, α_i +

$+ \beta_i = 1$, $a \geqslant a_0 > 0$, $a_0 = \mathrm{const}$. При цих умовах існування (у «малому» по t) і єдиність розв'язку встановлено в [1, 2], якісна теорія для такої задачі побудована в [3—11].

Будемо говорити, що виконана умова A, якщо розв'язок $y = \theta(x, x_0, y_0, y_1)$ задачі Коші

$$y'' = -b(x, y, y')/a(x, y, y'),\ y)_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y_1 \tag{4}$$

визначений для всіх $0 \leqslant x, x_0 \leqslant 1$, $-\infty < y_i < \infty$.

Теорема 1 [3—5]. *Розв'язок u задачі (1)—(3), обмежений разом з першими похідними рівномірно відносно t, стабілізується. Це значить, що існує регулярний стаціонарний розв'язок v задачі (1), (2) такий, що*

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \{ |u(x, t) - v(x)| + |u_x - v_x| + |u_{xx} - v_{xx}| \} \xrightarrow{t \to \infty} 0.$$

Теорема 2 [3—5]. *Нехай виконана умова A. Існує $T \leqslant \infty$ таке, що розв'язок $u(x, t)$ задачі (1)—(3) визначений для $0 \leqslant t < T$ і виконується одне із тверджень:*

1) $0 < T \leqslant \infty$, $\lim\limits_{t \to T} \| u \|_{C(0,1)} = \infty$;

2) $T = \infty$ *і розв'язок $u(x, t)$ стабілізується.*

Будемо говорити, що виконана умова $Б$, якщо існують функції $\Phi(x, \xi, \eta)$, $\rho(x, \xi, \eta)$, двічі диференційовані, $\Phi_{\eta\eta} \geqslant a_0$, $\rho \geqslant a_0$ такі, що для всіх розв'язків задачі (1)—(3) і проміжків часу, на яких вони визначені, виконується

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^1 \Phi(x, u, u_x)\, dx = -\int\limits_0^1 \rho(x, u, u_x)\, u_t^2 dx. \tag{5}$$

Рівняння (1), після домноження на ρ приймає вигляд

$$\rho u_t = \frac{d}{dx} \Phi_{u_x} - \Phi_u, \tag{6}$$

а граничні умови у випадку $\beta_i = 0$ являються умовами трансверсальності для функціоналу

$$J(u) = \int\limits_0^1 \Phi(x, u, u_x)\, dx.$$

Функціонал $J(u)$ будемо називати регулярним, якщо виконана умова $Б$ і для всіх диференційованих функцій u, які задовольняють граничні умови (2), виконано

$$J(u) \geqslant c_1 \int\limits_0^1 (|u_x|^2 + |u|)\, dx - c_2$$

з додатніми константами c_i.

Умова A являється достатньою (але не являється необхідною) для виконання умови $Б$.

Будемо говорити, що для функціоналу $J(u)$ виконана умова B, якщо для рівняння Ейлера (4) існує перший інтеграл $Z(x, y, y')$ такий, що $|Z(x, \xi, \eta)| < \infty$ рівномірно, при кожному K, на множині $0 \leqslant x \leqslant 1$, $|\xi| \leqslant K$.

Теорема 3. *Якщо виконані умови $Б$ і B, то виконуються твердження теореми 2. Якщо додатково відомо, що $J(u)$ регулярний, то кожний розв'язок задачі (1), (2) стабілізується.*

Із теореми Тонеллі [12] випливає існування абсолютно неперервної функції, на якій реалізується мінімум регулярного функціоналу $J(u)$. Із умови B випливає, що якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння (4) для $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $\overline{\lim\limits_{x \to x_2}} |y'| = \infty$, то

$$\lim_{x \to x_2} |y(x)| = \infty, \quad \lim_{x \to x_2} |y'| = \infty.$$

Таким чином [12], умова B є достатньою умовою регулярності довільної абсолютно неперервної функції $v(x)$, на якій реалізується сильний локальний мінімум регулярного функціоналу $J(u)$. Якщо Φ не залежить від x або не залежить від u, умова B виконується автоматично. Це значить, що у випадку регулярності $J(u)$ стабілізується довільний розв'язок задачі (1), (2), а розв'язок варіаційної задачі є регулярним (двічі диференційованим) розв'язком рівняння Ейлера. Як показують приклади, в загальному випадку умова B не випливає із регулярності $J(u)$, варіаційна задача може мати абсолютно неперервні, нерегулярні розв'язки, стабілізація до яких регулярних розв'язків параболічної задачі не можлива навіть в нормі $C(0, 1)$.

Слід точніше сформулювати варіаційну задачу. В [13] доведено, що для будь-якої пари функцій обмеженої варіації $p(x)$, $q(x)$ і неперервної $\Phi(\xi, \eta)$ можна побудувати послідовність функцій $\{y_n\}$ обмеженої варіації таку, що

$$\int_0^1 \Phi(y_n, y_n')\, dx \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 \Phi(\rho, q)\, dx.$$

Таким чином, в цьому класі задача зводиться до задачі мінімізації функціоналу, в якому аргументи в лагранжіані не зв'язані операцією диференціювання, і втрачає зміст.

Регулярний функціонал в класі АС абсолютно неперервних функцій досягає мінімуму [12], але можливий ефект Лаврентьєва [13]: не існує мінімізуючої для АС послідовності, що складається з гладких функцій.

В [14—16] побудовані приклади регулярних варіаційних задач з ефектом Лаврентьєва, проте мінімум в класі неперервно диференційованих функцій досягається в цих прикладах на диференційованих функціях. Відповідні рівняння Ейлера не задовольняють умову B, існують обмежені, з необмеженими похідними розв'язки, та до них не можуть в нормі $C(0, 1)$ стабілізуватись розв'язки відповідної параболічної задачі. В противному випадку легко було б побудувати гладку, мінімізуючу функціонал в АС послідовність. А це суперечить наявності ефекту Лаврентьєва. В [14, 17] ефект Лаврентьєва відсутній, мінімум в класі неперервно диференційованих функцій не досягається, а досягається на функції, похідна від якої безмежна лише у граничній точці (задача з закріпленими кінцями, функціонал регулярний). В [18, 19] ефект Лаврентьєва відсутній, похідна необмежена у внутрішній точці інтервалу, що дало можливість автору вказаних робіт дати негативну відповідь на питання, поставлене Гільбертом в [14], у випадку двох незалежних змінних. М. А. Сичов побудував теж приклад регулярного функціоналу. При цьому рівняння Ейлера має обмежені розв'язки з необмеженою похідною, але мінімум $J(u)$ в класі абсолютно неперервних з довільними фіксованими граничними даними функцій досягається лиш на функціях двічі диференційованих.

1. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными //Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1979.—Вып. 5.— С. 217—272.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
3. *Зеленяк Т. И.* О стабилизации решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной // Дифференц. уравнения.— 1968.— 4, № 1.— С. 34—45.
4. *Зеленяк Т. И.* О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа // Мат. сб.— 1977.— **104**, № 3.— С. 436—510.
5. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.— Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1975.— 156 с.
6. *Белоносов В. С.* Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения // Мат. сб.— 1979.— **110**, № 2.— С. 163—188.
7. *Белоносов В. С., Вишневский М. П.* Об устойчивости стационарных решений нелинейных параболических систем // Там же.— 1977.— **104**, № 4.— С. 535—558.
8. *О качественных* свойствах решений параболических уравнений / В. С. Белоносов, М. П. Вишневский, Т. И. Зеленяк, М. М. Лаврентьев (мл.).— Новосибирск, 1983.— 86 с.— (Препринт / ВЦ, СО АН СССР, № 466).

9. *Вишневский М. П.* Интегральные множества нелинейных параболических систем // Динамика сплошной среды.— 1982.— Вып. 54.— С. 74—84.
10. *Мусиенко Е. И.* Управление решением одной параболической задачи в окрестности неустойчивого стационарного решения // Там же.— 1981.— Вып. 51.— С. 68—83.
11. *Зеленяк Т. И., Михайлов В. П.* Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач математической физики //Дифференц. уравнения с частными производными: Тр. симп., посвященного 60-летию акад. С. Л. Соболева.— М. : Наука, 1970.— С. 96—118.
12. *Tonneli L.* Fondamenti di Calcolo delle variazioni.— Bologna: Zanichelli, 1921—1923.— **11**.— 660 p.
13. *Lavrentiev M.* Sur la quelques problemes du calcul des variations // Ann. mat. pura ed appl.— 1926.— N 4.— P. 7—28.
14. *Ball J. M., Mizel V. J.* Singular minimizers for regular one-dimensional problems in the calculus of variations // Bull. Amer. Math. Soc.— 1984.— **2**, N 1.— P. 143—146.
15. *Ball J. M., Mirel V. J.* One-dimensional variational problems whose minimizers variational do not soitisfy the Euler-Lagrange equation // Arch. Ration. Mech. and Anal.— 1985.— **90**, N 4.— P. 325—388.
16. *Davil A. M.* Singular minimizers in the calculus of variations // Ibid.— 1988.— **101**, N 2.— P. 161—177.
17. *Clarke F. H., Vinter R. B.* Reqularity property of solutions to the basic problem in the calculus of variations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— **289**, N 1.— P. 73—98.
18. *Сычев М. А.* К вопросу о регулярности решений простейших вариационных задач.— Новосибирск, 1991.— 48 с.— (Препринт / СО АН СССР. Ин-т математики: № 4).
19. *Сычев М. А.* О регулярности некоторых вариационных задач // Докл. АН СССР.— 1991.— **316**, № 6.— С. 1326—1330.

Одержано 12.06.92