УДК 517.948

Я. В. Микитюк, канд. фіз.-мат. наук,
М. Аль-Тунджі, асп. (Львів. ун-т)

Про оператор множення на матричний многочлен

Показано, як можна звести вивчення збуреного оператора множення на матричний многочлен у просторі $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ до вивчення збуреного оператора множення на незалежну змінну в просторі $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ з вагою ω, що задовольняє умову Макенхаупта.

Показано, как можно свести изучение возмущенного оператора умножения на матричный многочлен в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ к изучению возмущенного оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ с весом ω, удовлетворяющим условию Макенхаупта.

Нехай $H = L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $L : H \to H$ оператор множення на матричний многочлен $G(x) = (G_{ij}(x))$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ (G_{ij} — многочлени з комплексними коефіцієнтами), тобто

$$Lf(x) \overset{\text{def}}{=} G(x) f(x), \; f \in D(L) \overset{\text{def}}{=} \{f \in H : Gf \in H\}.$$

Будемо припускати, що виконані наступні умови:

i) для всіх $x \in \mathbb{R}$ $G(x) = G(x)^*$;

ii) при великих $|x|$ матриця $G(x)$ має обернену і

$$\| G(x)^{-1} \| = o(x^{-1}), \quad x \to \infty. \tag{1}$$

При виконанні умов i), ii) оператор L є самоспряженим, а його спектр співпадає або з $\mathbb{R}$, або з деякою півпрямою.

Означення 1. *Нехай* $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, $N \in \mathbb{N}$, *де* $\omega_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$, — *вимірні, майже всюди додатні функції і*

$$L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N) = \bigoplus_{j=1}^{N} L_2(\mathbb{R}, \omega_j).$$

Простір $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$, *як звичайно, наділяємо нормою*

$$\|f\| = \Big(\sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} |f_j(x)|^2\, \omega_j(x)\, dx\Big)^{1/2}.$$

Будемо говорити, що вага ω *задовольняє умову Макенхаупта (див., наприклад,* [1, с. 253]), *якщо*

$$\sup_{\Delta}\Big(\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta} \omega_j dx\Big)\Big(\frac{1}{|\Delta|}\int_{\Delta} \frac{1}{\omega_j}\, dx\Big) < \infty, \quad j = 1, \ldots, N,$$

де верхня грань береться по всіх скінченних інтервалах $\Delta \subset \mathbb{R}$, $|\Delta|$ — *довжина інтервалу* Δ.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконані умови* i), *ii*). *Тоді існують простір* $L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ *і ізометричний оператор* $V: H \to L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ *такі, що*

1) *вага* ω *задовольняє умову Макенхаупта;*

2) $VLV^* = SVV^* = VV^*S$, $Sf(x) \overset{\text{def}}{=} xf(x)$;

3) $\|Vf\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty}$, $f \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$.

Доведення. З результатів роботи [2] випливає, що справедлива така лема.

Лема 1. *Існує набір дійсних функцій* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ *і функція* $u \in C^\infty(\mathbb{R}, B(\mathbb{C}^n))$ *такі, що:*

1) *для всіх* $x \in \mathbb{R}$ $u(x)$ — *унітарний оператор в* $\mathbb{C}^n$;

2) *функції* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *є звуженнями на* $\mathbb{R}$ *галузок деяких алгебраїчних функцій;*

3) *для всіх* $x \in \mathbb{R}$ $u(x)\, G(x)\, u(x)^* = \operatorname{diag}(\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x))$.

Введемо оператор $U: H \to H$, покладаючи $Uf(x) = u(x) f(x)$, $f \in H$, де u — функція з леми 1. Очевидно, що оператор U є унітарним і, крім того,

$$ULU^* = \bigoplus_{j=1}^{n} \Lambda_j,$$

$$\|Uf\|_{L_\infty} = \|f\|_{L_\infty}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n),$$

де $\Lambda_j: L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор множення на функцію λ_j ($j = 1, \ldots, n$).

Оскільки функції $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є звуженнями на $\mathbb{R}$ галузок деяких алгебраїчних функцій, то їх похідні можуть мати не більше, ніж скінченну кількість нулів. Тому для кожного j, $j = 1, \ldots, n$, існує набір точок $\{a_{j,k}\}_{k=1}^{2m_j-1}$, $m_j \in \mathbb{N}$, такий, що:

1) $a_{j,1} < \ldots < a_{j,2m_j-1}$;

2) $\{x \in \mathbb{R} : \lambda_j'(x) = 0\} = \{a_{j,2k} : k = 1, \ldots, m_j - 1\}$. Нехай $\Delta_{jk} =]a_{j,k-1}, a_{j,k}[$, $k = 1, \ldots, 2m_j$, де $a_{j,0} = -\infty$, $a_{j,2m_j} = +\infty$. Позначимо через λ_{jk} звуження на Δ_{jk} функції λ_j, а через $\Lambda_{jk}: L_2(\Delta_{jk}) \to L_2(\Delta_{jk})$ оператор множення на функцію λ_{jk}. Очевидно, що $\Lambda_j = \bigoplus_{k=1}^{2m_j} \Lambda_{jk}$, $j = 1, \ldots, n$, і, таким чином,

$$ULU^* = \bigoplus_{j=1}^{n} \bigoplus_{k=1}^{2m_j} \Lambda_{jk}.$$

Оскільки при всіх $x \in \Delta_{jk}$ $\lambda_{jk}'(x) \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, 2m_j$, то λ_{jk} має обернену функцію $\lambda_{jk}^{-1} \in C^\infty(\tilde{\Delta}_{jk})$, де $\tilde{\Delta}_{jk} = \lambda_{jk}(\Delta)$.

Введемо оператори $W_{jk}: L_2(\tilde{\Delta}_{jk}) \to L_2(\mathbb{R}, \omega_{jk})$, покладаючи

$$W_{jk} f(\xi) = \begin{cases} f(\lambda_{jk}^{-1}(\xi)), & \text{якщо } \xi \in \tilde{\Delta}_{jk}, \\ 0, & \text{якщо } \xi \in \mathbb{R} \setminus \tilde{\Delta}_{jk}. \end{cases}$$

Від ваг ω_{jk} вимагаємо, щоб $\omega_{jk}(x) = |(\lambda^{-1})'(x)|$ при $x \in \tilde{\Delta}_{jk}$. Безпосередня перевірка показує, що оператори W_{jk} є ізометричними і

$$W_{jk}\Lambda_{jk}W^*_{jk} = SW_{jk}W^*_{jk} = W_{jk}W^*_{jk}S,$$

$$\|W_{jk}f\|_{L\infty} = \|f\|_{L\infty}, \quad f \in L_2(\tilde{\Delta}_{jk}) \cap L_\infty(\tilde{\Delta}_{jk}),$$

де S — оператор множення на незалежну змінну в просторі $L_2(\mathbb{R}, \omega_{ik})$. За допомогою операторів U, W_{jk}, $i = 1, \ldots, n.$, $k = 1, \ldots, 2m_j$, неважко побудувати оператор $V : H \to L_2(\mathbb{R}, \omega, \mathbb{C}^N)$ $(\omega = \{\omega_{ik}\})$, який задовольняє умови 2 і 3 теореми 1. Таким чином, залишилося показати, що ваги ω_{ik} можна підібрати так, щоб вони задовольняли умову Макенхаупта. Враховуючи (1) і те, що λ_{jk} є звуженнями на Δ_{jk} галузок деяких алгебраїчних функцій, неважко переконатися, що функції $|(\lambda_{jk}^{-1})'(x)|$ можна подати у вигляді добутку $|x - a|^\nu g$, де $a \in \mathbb{R}$, $\nu \in]-1, 1[$, g — вимірна і $0 < \inf g \leqslant \sup g < +\infty$. Тому достатньо показати, що умову Макенхаупта задовальняє вага $\omega_\nu(x) = \max(1, |x|^\nu)$, $\nu \in]-1, 1[$. Перевірка цього факту зводиться до нескладних обчислень. Теорема доведена.

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.— М. : Мир, 1984.— 469 с.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.

Одержано 06.03.92