УДК 517.9

О. В. Борисенко, канд. физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

ПОВЕДЕНИЕ НЕАВТОНОМНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ МАЛЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Исследовано предельное поведение решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения, описывающего неавтономную колебательную систему с малыми случайными возмущениями. Рассмотрен резонансный случай.

Досліджена гранична поведінка розв'язку нелінійного стохастичного диференціального рівняння, що описує неавтономну коливну систему з малими випадковими збуреннями. Розглянуто резонансний випадок.

При изучении колебательных процессов под воздействием малых нелинейных возмущений одним из основных методов является метод усреднения, предложенный и обоснованный Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским. Если колебательная система также подвержена малым случайным возмущениям типа "белого шума", то метод усреднения часто применяется с методом уравнений Колмогорова — Фоккера — Планка (КФП) [1]. В работе [2] для обоснования метода усреднения в автономных колебательных системах при наличии малых случайных возмущений, содержащих разрывную компоненту, применен прямой вероятностный подход. При этом используется условие слабой компактности А.В. Скорохода. В данной работе этот метод применяется для изучения неавтономной колебательной системы в резонансном случае. Нерезонансный случай рассмотрен в работе [3].

Рассмотрим поведение при $\varepsilon \to 0$ решения задачи

$$x''(t) + b^2 x(t) = \varepsilon f_1\big(\nu t, x(t), x'(t)\big) + \varepsilon^{\alpha} f\big(\nu t, x(t), x'(t)\big),$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\alpha > 0, f(\nu t, x(t), x'(t))$ — обобщенная случайная функция такая, что

$$\int_0^t f\big(\nu s, x(s), x'(s)\big) ds = \int_0^t f_2\big(\nu s, x(s), x'(s)\big) dW(s) + \int_0^t \int_{R^2} f_3\big(\nu s, x(s), x'(s), z\big) \tilde{\mu}(ds, dz),$$

$f_i,\ i = \overline{1,3}$,— нелинейные неслучайные функции, периодические по νt с периодом 2π; $W(t)$ — винеровский процесс; $\tilde{\mu}(t, A) = \mu(t, A) - t\,\Pi(A)$, $\mu(t, A)$ — пуассоновская мера с $M\mu(t, A) = t\,\Pi(A)$; $\Pi(\cdot)$ — мера на борелевских множествах в R^2; x_0, y_0 — неслучайные начальные данные.

Уравнение (1) понимается как система стохастических дифференциальных уравнений без последействия:

$$dx(t) = y(t)dt,$$
$$dy(t) = \left[-b^2 x(t) + \varepsilon f_1(\nu t, x(t), y(t))\right]dt + \varepsilon^{\alpha} f_2(\nu t, x(t), y(t)) dW(t) + \tag{2}$$
$$+\varepsilon^{\alpha} \int_{R^2} f_3(\nu t, x(t), y(t), z) \tilde{\mu}(dt, dz), \quad x(0) = x_0,\ y(0) = y_0.$$

Рассмотрим резонансный случай, т.е. $b = (p/q)\nu$, где p и q —целые взаимно простые числа.

Лемма. *Пусть* $\Pi(R^2) < \infty$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ *и выполняются условия*:

1) *функции* $f_i,\ i = \overline{1,3}$, *ограничены и удовлетворяют локальному условию Липшица по переменным* (x, y);

2) *существуют постоянные* $K>0$ *и* $r>0$ *такие, что для некоторого* $\gamma>0$

$$\left|f_1(\nu t,x,y)\right|^2+\left|f_2(\nu t,x,y)\right|^2+\left|f_3(\nu t,x,y,z)\right|^2\le K(x^2+y^2)^{1+\gamma}$$

при $x^2+y^2\le r^2$, $\forall\, t\in R_+$, $\forall\, t\in R^2$.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$

$$P\left\{x^2(t)+y^2(t)\le\delta\right\}\le Ct\left(\varepsilon\cdot\delta^{\gamma/2}+\varepsilon^{2\alpha}\cdot\delta^{\gamma}\right), \tag{3}$$

где $(x(t),y(t))$ — *решение системы* (2).

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1 [2].

Если функции f_i, $i=\overline{1,3}$, удовлетворяют условию леммы с $\gamma>1$, то, используя оценку (3), убеждаемся, что к случайным процессам

$$a(t)=\sqrt{x^2(t)+\frac{y^2(t)}{b^2}},\ \theta(t)=-bt-\operatorname{arctg}\frac{y(t)}{bx(t)}$$

применима обобщенная формула Ито [4, с.274]. Для процесса $\xi(t)=(a(t),\theta(t))$ получаем систему стохастических дифференциальных уравнений без последействия

$$d\xi(t)=A\big(t,\xi(t)\big)dt+\sigma\big(t,\xi(t)\big)dW(t)+\int_{R^2}C\big(t,\xi(t),z\big)\tilde{\mu}(dt,dz),\quad \xi(0)=(a_0,\theta_0), \tag{4}$$

где

$$A(t,a,\theta)=\left(A^{(i)}(t,a,\theta),\ i=1,2\right),\ \ \sigma(t,a,\theta)=\left(\sigma^{(i)}(t,a,\theta),\ i=1,2\right),$$

$$C(t,a,\theta,z)=\left(C^{(i)}(t,a,\theta,z),\ i=1,2\right),\ \psi=p\nu t/q+\theta,$$

$$A^{(1)}(t,a,\theta)=-\frac{\varepsilon q}{p\nu}\tilde{f}_1(\nu t,a,\psi)\sin\psi+\frac{\varepsilon^{2\alpha}\cdot q^2}{2ap^2\nu^2}\tilde{f}_2^2(\nu t,a,\psi)\cos^2\psi+$$

$$+\frac{q}{p\nu}\int_{R^2}\left\{\left[\left(\frac{ap\nu}{q}\sin\psi-\varepsilon^{\alpha}\tilde{f}_3(\nu t,a,\psi,z)\right)^2+\frac{a^2p^2\nu^2}{q^2}\cos^2\psi\right]^{1/2}-\right.$$

$$\left.-ap\nu/q+\varepsilon^{\alpha}\sin\psi\cdot\tilde{f}_3(\nu t,a,\psi,z)\right\}\Pi(dz);$$

$$A^{(2)}(t,a,\theta)=-\frac{\varepsilon q}{ap\nu}\tilde{f}_1(\nu t,a,\psi)\cos\psi-\frac{\varepsilon^{2\alpha}\cdot q^2}{2a^2p^2\nu^2}\tilde{f}_2^2(\nu t,a,\psi)\sin 2\psi+$$

$$+\int\left\{\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\psi-\frac{\varepsilon^{\alpha}\cdot q}{ap\nu}\tilde{f}_3(\nu t,a,\psi,z)/\cos\psi\right]-\psi+\frac{\varepsilon^{\alpha}\cdot q}{ap\nu}\tilde{f}_3(\nu t,a,\psi,z)\cos\psi\right\}\Pi(dz),$$

$$\sigma^{(1)}(t,a,\theta)=-\frac{\varepsilon^{\alpha}\cdot q}{p\nu}\tilde{f}_2(\nu t,a,\psi)\sin\psi,\ \ \sigma^{(2)}(t,a,\theta)=-\frac{\varepsilon^{\alpha}\cdot q}{ap\nu}\tilde{f}_2(\nu t,a,\psi)\cos\psi,$$

$$C^{(1)}(t,a,\theta,z)=\frac{q}{p\nu}\left\{\left[\left(\frac{ap\nu}{q}\sin\psi-\varepsilon^{\alpha}f_3^{\alpha}(\nu t,a,\psi,z)\right)^2+\frac{a^2p^2\nu^2}{q^2}\cos^2\psi\right]^{1/2}-\frac{ap\nu}{q}\right\},$$

$$C^{(2)}(t,a,\theta,z)=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\psi-\varepsilon^{\alpha}\cdot q\cdot\frac{\tilde{f}_3(\nu t,a,\psi,z)}{ap\nu\cos\psi}\right]-\psi,$$

$$\tilde{f}_i(\nu t,a,\psi)=f_3(\nu t,a\cos\psi,-a\frac{p\nu}{q}\sin\psi),\ i=1,2,$$

$$\tilde{f}_3(\nu t,a,\psi,z)=f_3(\nu t,a\cos\psi,-\frac{ap\nu}{q}\sin\psi,z),$$

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 q^2/p^2\nu^2},\ \theta_0 = -\operatorname{arctg} y_0 q/p\nu x_0.$$

Условимся все различные постоянные, которые не зависят от ε, обозначать C.

Теорема. *Пусть* $\Pi(R^2) < \infty$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, $t \in [0, t_0]$, *функции* f_i, $i = \overline{1,3}$, *ограничены и удовлетворяют локальному условию Гельдера по* t; f_1 — *один раз, а* f_2 *и* f_3 *дважды непрерывно дифференцируемы по переменным* (x, y),

$$\int_{R^2}\left[\left\|\nabla f_3\right\|^2 + \left\|\nabla^2 f_3\right\|^2\right]\Pi(dz) \le C,$$

и существует постоянная $r > 0$ *такая, что для некоторого* $\gamma > 1$

$$\sum_{i=1}^{3}\left|f_i\right|^2 \le C\left(x^2+y^2\right)^{1+\gamma},\ \sum_{i=1}^{3}\left\|\nabla f_i\right\|^2 \le C\left(x^2+y^2\right)^{\gamma}$$

при $x^2 + y^2 \le r^2$ *и любых* $t \in R^2, t \in R_+$. *Здесь* $\nabla f = (\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)$, $\nabla^2 f$ — *матрица вторых производных по* (x, y).

Тогда: 1. *При* $\alpha = 1/2$ *случайный процесс* $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon)$ *слабо сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению* $\overline{\xi}(t) = \left(\overline{a}(t), \overline{\theta}(t)\right)$ *стохастического дифференциального уравнения*

$$d\overline{\xi}(t) = \overline{A}\left(\overline{\xi}(t)\right)dt + \overline{\sigma}\left(\overline{\xi}(t)\right)dW(t),\quad \overline{\xi}(0) = (a_0, \theta_0), \tag{5}$$

где

$$\overline{A}^{(1)}(a,\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_k e^{ikq}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{q}{p\nu}\tilde{f}_1(\tau,a,\psi)\sin\psi + \right.$$

$$\left. + \frac{q^2}{2ap^2\nu^2}\tilde{f}(\tau,a,\psi)\cos^2\psi\right]e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi,$$

$$\overline{A}^{(2)}(a,\theta) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_k e^{ikq\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{q}{ap\nu}\tilde{f}_1(\tau,a,\psi)\cos\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{q^2}{2a^2p^2\nu^2}\tilde{f}(\tau,a,\psi)\sin 2\psi\right]e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi,$$

$$\hat{\sigma}(a,\theta) = \left\{\frac{q^2}{4\pi^2 p^2\nu^2}\sum_k e^{ikq\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}(\tau,a,\psi)B(a,\psi)e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi\right\}^{1/2}$$

$$\tilde{f}(\tau,a,\psi) = \tilde{f}_2^2(\tau,a,\psi) + \int_{R^2}\tilde{f}_3^2(\tau,a,\psi,z)\Pi(dz),$$

$$B(a,\psi) = \begin{pmatrix} \sin^2\psi & \frac{1}{2a}\sin 2\psi \\ \frac{1}{2a}\sin 2\psi & \frac{1}{a^2}\cos^2\psi \end{pmatrix},\ \overline{W}(t) = \left(\overline{W}_1(t), \overline{W}_1(t)\right),$$

$\overline{W}_i(t)$, $i = 1, 2$, — *независимые одномерные винеровские процессы. Суммирование ведется по всем значениям* k, *как положительным, так и отрицательным, для которых суммарный показатель соответствующей экспоненты (полученной после разложения в ряд Фурье подынтегрального выражения) равен нулю.*

2. *При* $\alpha < 1/2$ *случайный процесс* $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t/\varepsilon^{2\alpha})$ *слабо сходится при* $\varepsilon \to 0$ *к решению* $\overline{\xi}(t) = \left(\overline{a}(t), \overline{\theta}(t)\right)$ *стохастического дифференциального уравнения* (5), *в котором коэффициенты* $\overline{A}^{(i)}(a,\theta)$, $i = 1, 2$, *не содержат членов, включающих функцию* $\tilde{f}_1(\tau,a,\psi)$.

3. *При* $\alpha > 1/2$ *случайный процесс* $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t / \varepsilon)$ *слабо сходится при* $\varepsilon \to \to 0$ *к решению* $\bar{\xi}(t) = \left(\bar{a}(t), \bar{\theta}(t)\right)$ *системы обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = -\frac{q}{4\pi^2 p\nu}\sum_k e^{ikq\bar{\theta}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}_1(\tau,\bar{a},\psi)\sin\psi\cdot e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi,$$
$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -\frac{q}{4\pi^2 \bar{a} p\nu}\sum_k e^{ikq\bar{\theta}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}_1(\tau,\bar{a},\psi)\cos\psi\cdot e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi. \qquad (6)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим случай $\alpha = 1/2$. Сделаем замену $t \to \to t / \varepsilon$ в уравнении (4). Обозначим $\xi_\varepsilon(t) = \xi(t / \varepsilon)$, $W_\varepsilon(t) = \varepsilon^{1/2} W(t / \varepsilon)$, $\tilde{\mu}_\varepsilon(t, A) = \mu(t / \varepsilon, \quad A) - (t / \varepsilon)\Pi(A)$. Заметим, что при каждом $\varepsilon > 0$ $W_\varepsilon(t)$ — стандартный винеровский процесс, а $\tilde{\mu}_\varepsilon(t, A)$ — центрированная пуассонова мера. Получим для процесса $\xi_\varepsilon(t) = (a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$ систему стохастических дифференциальных уравнений без последействия

$$d\xi_\varepsilon(t) = A_\varepsilon\left(t,\xi_\varepsilon(t)\right)dt + \sigma_\varepsilon\left(t,\xi_\varepsilon(t)\right)dW_\varepsilon(t) + \int_{R^2} C_\varepsilon\left(t,\xi_\varepsilon(t),z\right)\tilde{\mu}_\varepsilon(dt,dz), \quad \xi_\varepsilon(0) = \xi_0, \qquad (7)$$

где

$$A_\varepsilon(t,a,\theta) = \varepsilon^{-1}A(t / \varepsilon,a,\theta),\ \sigma_\varepsilon(t,a,\theta) = \varepsilon^{-1/2}\sigma(t / \varepsilon,a,\theta),$$
$$C_\varepsilon(t,a,\theta,z) = C(t / \varepsilon,a,\theta,z),\ \xi_0 = (a_0,\theta_0).$$

Из условий теоремы следует

$$\left\|A_\varepsilon(t,a,\theta)\right\| + \left\|\sigma_\varepsilon(t,a,\theta)\right\| + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\left\|C_\varepsilon(t,a,\theta,z)\right\| \le C \qquad (8)$$

и выполняются условия теоремы существования и единственности [5, с. 152] решения системы (7). Случайный процесс $\xi_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_0 + \int_0^t A_\varepsilon(s,\xi_\varepsilon(s)ds + \zeta_\varepsilon(t), \qquad (9)$$

где

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_0^t \sigma_\varepsilon(s,\xi_\varepsilon(s))\,dW_\varepsilon(s) + \int_0^t\int_{R^2} C_\varepsilon(s,\xi_\varepsilon(s),z)\tilde{\mu}_\varepsilon(ds,dz).$$

Случайный процесс $\zeta_\varepsilon(t)$ — векторный квадратично интегрируемый мартингал с матричной характеристикой

$$\left\langle\zeta_\varepsilon^{(i)},\zeta_\varepsilon^{(j)}\right\rangle(t) = \int_0^t \sigma_\varepsilon^{(i)}(s,\xi_\varepsilon(s))\sigma_\varepsilon^{(j)}(s,\xi_\varepsilon(s))ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_{R^2} C_\varepsilon^{(i)}(s,a,\theta,z)C_\varepsilon^{(j)}(s,a,\theta,z)\Pi(dz),$$
$$i, j = 1, 2.$$

Случайный процесс $(\xi_\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon(t))$ удовлетворяет условиям слабой компактности А. В. Скорохода [6, с.17]. Так как мы изучаем слабую сходимость процессов, то можем считать, что для любой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ существует такая подпоследовательность $\varepsilon_k = \varepsilon_{n_k} \to 0$, такие случайные процессы $\bar{\xi}(t) = \left(\bar{a}(t), \bar{\theta}(t)\right)$, $\bar{\zeta}(t)$, что $\xi_{\varepsilon_k}(t) \to \bar{\xi}(t)$, $\zeta_{\varepsilon_k}(t) \to \bar{\zeta}(t)$ по вероятности при $\varepsilon_k \to 0$. Из свойств стохастических интегралов и оценки (8) имеем

$$M\left\|\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(s)\right\|^4 \le C\left[|t-s|^4 + |t-s|^2 + \varepsilon^{1/2}|t-s|^{3/2} + \varepsilon|t-s|\right],$$

$$M\|\zeta_\varepsilon(t)-\zeta_\varepsilon(s)\|^4 \le C\left[|t-s|^2+\varepsilon^{1/2}|t-s|^{3/2}+\varepsilon|t-s|\right]. \tag{10}$$

Последовательности $\|\xi_{\varepsilon_k}(t)-\xi_{\varepsilon_k}(s)\|^4$ и $\|\zeta_{\varepsilon_k}(t)-\zeta_{\varepsilon_k}(s)\|^4$ равномерно интегрируемы, а поскольку $\xi_{\varepsilon_k}(t)\to\bar\xi(t)$, $\zeta_{\varepsilon_k}(t)\to\bar\zeta(t)$ по вероятности при $\varepsilon_k\to 0$, то из (10) получаем

$$M\|\bar\xi(t)-\bar\xi(s)\|^4 \le C\left[|t-s|^4+|t-s|^2\right],\quad M\|\bar\zeta(t)-\bar\zeta(s)\|^4\le C|t-s|^2.$$

Таким образом, согласно критерию Колмогорова предельные процессы $\bar\xi(t)$ и $\bar\zeta(t)$ непрерывны;

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{t}\int_0^t A_\varepsilon^{(i)}(s,a,\theta)\,ds = \bar A^{(i)}(a,\theta), \tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{t}\int_0^t\left[\sigma_\varepsilon^{(i)}(s,a,\theta)\sigma_\varepsilon^{(j)}(s,a,\theta)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{R^2}C_\varepsilon^{(i)}(s,a,\theta,z)C_\varepsilon^{(j)}(s,a,\theta,z)\Pi(dz)\right]ds =$$

$$=\frac{q^2}{4\pi^2p^2\nu^2}\sum_k e^{ikq\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde f(\tau,a,\psi)B_{ij}(a,\psi)e^{-ikq(\psi-p\tau/q)}d\tau d\psi=\bar B_{ij}(a,\theta),$$

где $B_{ij}(a,\psi)$ — элементы матрицы $B(a,\psi)$, определенной в условии теоремы.

Так как процессы $\bar\xi(t)$ и $\bar\zeta(t)$ непрерывны, то из соотношений (8), (9), (11) и леммы 2 [2] следует

$$\bar\xi(t)=\xi_0+\int_0^t\bar A(\bar\xi(s))ds+\bar\zeta(t), \tag{12}$$

где $\bar\zeta(t)$ — непрерывный квадратично интегрируемый векторный мартингал с матричной характеристикой

$$\langle\bar\zeta,\bar\zeta\rangle(t)=\int_0^t\bar B(\bar\xi(s))ds,$$

где $\bar B(a,\theta)=\{\bar B_{ij}(a,\theta),\ i,j=1,2\}$. Из [7, с.114] следует, что существует винеровский процесс $\bar W(t)=\left(\bar W_1(t),\bar W_2(t)\right)$ такой, что

$$\bar\xi(t)=\int_0^t\bar\sigma(\bar\xi(s))\,dW(s), \tag{13}$$

где $\bar\sigma(a,\theta)=\bar B^{1/2}(a,\theta)$.

Соотношения (12) и (13) означают, что процесс $\bar\xi(t)$ удовлетворяет уравнению (5). Но стохастическое дифференциальное уравнение (5) имеет единственное решение в условиях теоремы. Поэтому процесс $\bar\xi(t)$ не зависит от выбора последовательности $\varepsilon_n\to0$, а значит, конечномерные распределения процесса $\xi_\varepsilon(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\bar\xi(t)$. Отметим, что процессы $\xi_\varepsilon(t)$ и $\bar\xi(t)$ марковские. Используя критерий слабой сходимости для марковских процессов [8, с. 508], завершаем доказательство первого утверждения теоремы.

Пусть $\alpha<1/2$. Сделаем замену $t\to t/\varepsilon^{2\alpha}$ в уравнении (4). Обозначим $\xi_\varepsilon(t)=\xi(t/\varepsilon^{2\alpha})$, $W_\varepsilon(t)=\varepsilon^\alpha W(t/\varepsilon^{2\alpha})$, $\tilde\mu_\varepsilon(t,A)=\mu(t/\varepsilon^{2\alpha},A)-(t/\varepsilon^{2\alpha})\Pi(A)$. Получим для процесса $\xi_\varepsilon(t)=(a_\varepsilon(t),\theta_\varepsilon(t))$ систему стохастических дифференциальных уравнений без последействия вида (7) с коэффициентами $A_\varepsilon(t,a,\theta)=$

$= \varepsilon^{-2\alpha} A(t / \varepsilon^{2\alpha}, a, \theta)$, $\sigma_\varepsilon(t, a, \theta) = \varepsilon^{-\alpha}\sigma(t / \varepsilon^{2\alpha}, a, \theta)$, $C_\varepsilon(t, a, \theta, z) = C(t / \varepsilon^{2\alpha}, a, \theta, z)$. Заметим, что коэффициенты сноса $A_\varepsilon^{(1)}(t,a,\theta)$ и $A_\varepsilon^{(2)}(t,a,\theta)$ содержат соответственно слагаемые

$$-\frac{\varepsilon^{1-2\alpha} q}{p\nu}\tilde{f}_1\left(\nu t\varepsilon^{-2\alpha}, a, \psi_\varepsilon\right)\sin\psi_\varepsilon \text{ и } -\frac{\varepsilon^{1-2\alpha} q}{ap\nu}\tilde{f}_1\left(\nu t\varepsilon^{-2\alpha}, a, \psi_\varepsilon\right)\cos\psi_\varepsilon,$$

где $\psi_\varepsilon = p\nu t / q\varepsilon^{2\alpha} + \theta$, которые стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, так как $\alpha < 1/2$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство первого утверждения с очевидными изменениями.

3. Пусть $\alpha > 1/2$. Сделаем замену $t \to t / \varepsilon$ в уравнении (4). Используя обозначения из первого пункта доказательства, получаем для процессов $a_\varepsilon(t)$ и $\theta_\varepsilon(t)$ соотношения

$$a_\varepsilon(t) = a_0 - \frac{q}{p\nu}\int_0^t \tilde{f}_1\left(\frac{\nu s}{\varepsilon}, a_\varepsilon(s), \psi_\varepsilon(s)\right)\sin\psi_\varepsilon(s)ds + \zeta_\varepsilon^{(1)}(t) + O(\varepsilon^{2\alpha-1}),$$

$$\theta_\varepsilon(t) = \theta_0 - \frac{q}{p\nu}\int_0^t \tilde{f}_1\left(\frac{\nu s}{\varepsilon}, a_\varepsilon(s), \psi_\varepsilon(s)\right)\frac{\cos\psi_\varepsilon(s)}{a_\varepsilon(s)}ds + \zeta_\varepsilon^{(2)}(t) + O(\varepsilon^{2\alpha-1}), \tag{14}$$

где $\psi_\varepsilon(s) = p\nu s /(q\varepsilon) + \theta_\varepsilon(s)$, $\zeta^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$, — квадратично интегрируемые мартингалы такие, что

$$M\left|\zeta_\varepsilon^{(i)}(t)\right|^2 \le C\varepsilon^{2\alpha-1}, \ i = 1,2. \tag{15}$$

Случайный процесс $(a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$ удовлетворяет условиям слабой компактности, поэтому можем считать, что для любой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ существует такая подпоследовательность $\varepsilon_k = \varepsilon_{n_k} \to 0$, такие случайные процессы $\bar{a}(t)$ и $\bar{\theta}(t)$, что $a_{\varepsilon_k}(t) \to \bar{a}(t)$, $\theta_{\varepsilon_k}(t) \to \bar{\theta}(t)$ по вероятности при $\varepsilon_k \to 0$. Согласно критерию Колмогорова процессы $\bar{a}(t)$ и $\bar{\theta}(t)$ непрерывны;

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{f}_1\left(\frac{\nu s}{\varepsilon}, a, \frac{p\nu}{q\varepsilon}s + \theta\right)\sin\left(\frac{p\nu}{q\varepsilon}s + \theta\right)ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\sum_k e^{ikq\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}_1(\tau, a, \psi)\sin\psi \cdot e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{f}_1\left(\frac{\nu s}{\varepsilon}, a, \frac{p\nu}{q\varepsilon}s + \theta\right)\frac{\cos(p\nu s/q\varepsilon + \theta)}{a}ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\sum_k e^{ikq\theta}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{f}_1(\tau, a, \psi)\frac{\cos\psi}{a} \cdot e^{-ikq(\psi - p\tau/q)}d\tau d\psi. \tag{16}$$

Так как функция f_1 ограничена, то из (15), (16), леммы 2 [2] и соотношений (14) при $\varepsilon_k \to 0$ получим для $\bar{a}(t)$ и $\bar{\theta}(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений (6) с начальным условием $\bar{a}(0) = a_0$, $\bar{\theta}(0) = \theta_0$. Поскольку система (6) имеет единственное решение в условиях теоремы, то функции $\bar{a}(t)$ и $\bar{\theta}(t)$ не зависят от выбора последовательности $\varepsilon_n \to 0$. Процессы $a_\varepsilon(t)$, $\theta_\varepsilon(t)$ марковские. Согласно критерию слабой сходимости для марковских процессов

[8, с. 508] случайные процессы $a_\varepsilon(t)$ и $\theta_\varepsilon(t)$ слабо сходятся к решению системы (6). Теорема доказана.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий полученные результаты. Пусть

$$f_1(\nu t, x, x') = \frac{x^3 \sin t}{1+(x^2+(x')^2)^2};\ f_2(\nu t, x, x') = f_3(\nu t, x, x', z) = \sin(x^2+(x')^2)^2;$$

$$b=1,\ \Pi(R^2)=1,\ x(0)=x_0,\ x'(0)=y_0$$

в уравнении (1). Тогда система (2) имеет вид

$$\begin{gathered} dx(t) = y(t)dt, \\ dy(t) = \left[-x(t)+\varepsilon\frac{x^3(t)\cdot\sin t}{1+(x^2(t)+y^2(t))^2}\right]dt + \varepsilon^\alpha \sin(x^2(t)+y^2(t))^2\, dW(t) + \\ +\varepsilon^\alpha \int_{R^2} \sin(x^2(t)+y^2(t))^2 \tilde{\mu}(dt, dz). \end{gathered} \tag{17}$$

Поскольку $\nu = b = 1$, имеет место резонансный случай. Если $a(t)$ и $\theta(t)$ — соответственно амплитуда и фаза колебания, описываемого системой (17), то из доказанной теоремы следует:

1. При $\alpha \le 1/2$ процесс $(a(t/\varepsilon^{2\alpha}), \theta(t/\varepsilon^{2\alpha}))$ слабо сходится к решению $(\overline{a}(t), \overline{\theta}(t))$ системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} d\overline{a}(t) = \frac{\sin^2 \overline{a}^4(t)}{2\overline{a}(t)} dt + \sin \overline{a}^4(t) dW_1(t), \\ d\overline{\theta}(t) = \frac{\sin \overline{a}^4(t)}{\overline{a}(t)} dW_2(t),\ \overline{a}(0)=a_0,\ \overline{\theta}(0)=\theta_0, \end{gathered} \tag{18}$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — независимые одномерные винеровские процессы.

Отметим, что при вычислении усредненных коэффициентов $\overline{A}^{(1)}$ и $\overline{A}^{(2)}$ при $\alpha = 1/2$ слагаемые, содержащие f_1, обращаются в нуль и поэтому усредненная система (18) будет иметь один и тот же вид для $\alpha = 1/2$ и для $\alpha < 1/2$.

2. При $\alpha > 1/2$ процесс $(a(t/\varepsilon), \theta(t/\varepsilon))$ слабо сходится к решению системы

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = 0,\ \overline{a}(0) = a_0,\quad \frac{d\overline{\theta}}{dt} = 0,\ \overline{\theta}(0) = \theta_0.$$

Значит $\overline{a}(t) \equiv a_0$, $\overline{\theta}(t) \equiv \theta_0$, а в колебательной системе, описываемой (17), устанавливаются при времени порядка t/ε колебания с постоянной амплитудой a_0 и постоянной фазой θ_0.

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* О воздействии случайных сил на нелинейные колебательные системы // Мат. физика и нелинейн. механика.– 1986.– **5**, №39.– С. 23–34.
2. *Борисенко О. В.* Нелинейные колебания с малыми случайными возмущениями // Асимптотические методы в задачах математической физики.– Киев: Ин–т математики АН УССР, 1989.– С. 19–27.
3. *Борисенко О. В.* Случайные колебания неавтономной системы второго порядка в нерезонансном случае // Асимптотические методы и их приложение в задачах математической физики.– Киев: Ин–т математики АН УССР, 1990.– С. 9–15.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.– Киев: Наук. думка, 1968.– 354 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Управляемые случайные процессы.– Киев: Наук. думка, 1977.– 252 с.
6. *Скороход А. В.* Исследование по теории случайных процессов.– Киев: Изд–во Киев. ун-та, 1961.– 216 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3–х т.– М.: Наука, 1975.– Т.3.– 496 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3–х т.– М.: Наука, 1971.– Т.1.– 664 с.

Получено 18.02.91