УДК 519.21

Б. Мередов, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ОБ ОБЛАСТЯХ АНАЛИТИЧНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматривается комплексный степенной ряд с независимыми случайными коэффициентами и изучается возможность аналитического продолжения его суммы через границы области сходимости.

Розглядається комплексний степеневий ряд з незалежними випадковими коефіцієнтами і вивчається можливість аналітичного продовження його суми через межі області збіжності.

1. Пусть $\{\xi_k = \eta_k + i\zeta_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ — последовательность независимых комплекснозначных случайных величин.

Рассмотрим степенной ряд

$$\Xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k z^k,\ z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. В [1, 2] исследовались условия сходимости таких рядов. Цель этой статьи — нахождение области аналитичности $\Xi(z)$ (точнее, ее аналитического продолжения).

Основной результат статьи формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. *Положим*

$$R = \sup\left\{b > 0:\ \sum_{k=0}^{\infty} P\{|\xi_k| > b^{-k}\} < \infty\right\},$$

$$R^* = \sup\left\{b > 0:\ \sum_{k=0}^{\infty} P\{|\tilde{\xi}_k| > b^{-k}\} < \infty\right\}.$$

Здесь $\tilde{\xi}_k$ *– величины, получаемые симметризацией из* ξ_k,

$$c_k = M\left(\eta_k R^k I_{\{|\eta_k R^k| \le 1\}}\right) + iM\left(\zeta_k R^k I_{\{|\zeta_k R^k| \le 1\}}\right).$$

Пусть $R^* > R$. *Тогда если* G_f *– область, куда аналитически продолжается функция* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, *то область аналитичности* $\Xi(z)$ *определяется равенством*

$$G_\Xi = S_{R^*}(0) \cap G_f,$$

где $S(0)$ *– круг радиуса* R^* *с центром в точке* 0.

Доказательству теоремы предпошлем доказательство нескольких вспомогательных утверждений.

2. Пусть ξ_k — вещественные случайные величины. В леммах 1, 2 положим

$$a_k = M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}}\right), \text{ где } C > 0.$$

Лемма 1. *Если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k$ *сходится с вероятностью* 1, *то найдется такая последовательность* a_k, *для которой сходятся ряды* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k - a_k)^2$.

Доказательство. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k$ сходится, $a_k = M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}}\right)$, то по теореме Колмогорова о трех рядах (см., например, [3, с. 39]) сходятся ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\xi_k^2 > C^2\right\},\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}} - a_k\right)^2.$$

Так как $a_k \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\left| M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}} - a_k\right)^2 - M\left\{(\xi_k - a_k)^2 I_{\{|\xi_k - a_k| \le C\}}\right\}\right| \le$$

$$\le M\left(I_{\{|\xi_k| \le C, |\xi_k - a_k| > C\}} + I_{\{|\xi_k| > C, |\xi_k - a_k| \le C\}}\right) \times$$

$$\times \left(C + |a_k|\right)^2 \le \left(P\left\{|\xi_k| > C\right\} + P\left\{|\xi_k| > C - |a_k|\right\}\right)\left(C + |a_k|\right)^2.$$

Ряд из этих членов сходится. Поэтому сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\left\{(\xi_k - a_k)^2 I_{\{(\xi_k - a_k)^2 \le C^2\}}\right\}.$$

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - a_k)^2$ сходится в силу условия сходимости неотрицательных рядов.

Лемма 2. *Если ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k$ *сходится, то найдется такая последовательность* a_k, *что ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - a_k)$ *сходится с вероятностью* 1.

Доказательство. Так как сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty} P\{|\xi_k| > C\}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} M\{\xi_k^2 I_{\{|\xi_k| \le C\}}\}$, а $a_k \to 0$, поскольку $\xi_k \to 0$ по вероятности при $k \to \infty$, то можно воспользоваться предыдущей оценкой и убедиться, что сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}} - a_k\right)^2. \tag{2}$$

Проверим, что для $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - a_k)$ выполнены условия теоремы о трех рядах

I. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P\{|\xi_k - a_k| > C\}$ сходится, так как $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ и

$$P\left\{|\xi_k - a_k| > C\right\} \le P\left\{|\xi_k| > C - |a_k|\right\} \le P\left\{|\xi_k| > \frac{C}{2}\right\}$$

для достаточно больших k.

II.

$$M\left\{(\xi_k - a_k) I_{\{|\xi_k - a_k| \le C\}}\right\} = M\left\{\xi_k I_{\{|\xi_k - a_k| \le C\}}\right\} - a_k + a_k P\left\{|\xi_k - a_k| > C\right\} =$$

$$= a_k P\left\{|\xi_k - a_k| > C\right\} + M\left\{\xi_k I_{\{|\xi_k - a_k| \le C\}} - \xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}}\right\}.$$

Отсюда

$$\left| M\left\{(\xi_k - a_k) I_{\{|\xi_k - a_k| \le C\}}\right\}\right| \le |a_k| P\left\{|\xi_k| > C - |a_k|\right\} +$$

$$+ \left(C + |a_k|\right)\left(P\left\{|\xi_k| > C\right\} + P\left\{|\xi_k| > C - |a_k|\right\}\right).$$

Значит, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left| M\left\{(\xi_k - a_k) I_{\{|\xi_k - a_k| \le C\}}\right\}\right|$$

сходится. Учитывая (2), получаем доказательство леммы.

Лемма 3. *Если* ξ_k *симметричны, то ряды* $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k^2$ *сходятся одновременно.*

Доказательство вытекает из лемм 1, 2.

Лемма 4. *Пусть последовательность независимых величин* ξ_k *такова, что* $\lim\limits_{k\to\infty} P\{|\xi_k| > C\} = 0$ *для всех* $C > 0$ *(т.е.* $\xi_k \to 0$ *по вероятности). Пусть* $c_k = M(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le 1\}})$. *Тогда ряды* $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - c_k)^2$ *и* $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - c_k)$ *сходятся одновременно.*

Доказательство леммы 4 содержится в доказательствах лемм 1, 2.

Лемма 5. *Пусть* $\tilde{\xi}_k$ *получены из* ξ_k *симметризацией,* $\xi_k \to 0$ *по вероятности. Тогда ряды* $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - c_k)^2, \sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - c_k), \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k, \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k^2$ *сходятся одновременно, т.е. если сходится один из них, то сходятся и остальные.*

Доказательство. Достаточно доказать, что одновременно сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - c_k)$ и $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k$.

Пусть сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k - c_k)$. Тогда, очевидно, будет сходиться также ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k = \sum_{k=0}^{\infty}[(\xi_k - c_k) - (\xi_k - c_k)^*]$, где $(\xi_k - c_k)^*$ – величины, независимые от $(\xi_k - c_k)$ и имеющие те же распределения, что и $(\xi_k - c_k)$.

Пусть теперь сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\left|\tilde{\xi}_k\right| > C\right\} < \infty.$$

Если $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \xi_k^*$, то

$$P\left\{\left|\xi_k - \xi_k^*\right| > C\right\} \ge P\left\{\left|\xi_k\right| > C/2\right\} P\left\{\left|\xi_k^*\right| \le C/2\right\},$$

и по условию $P\left\{|\xi_k^*| \le C/2\right\} = P\left\{|\xi_k| \le C/2\right\} \to 1$ при $k \to \infty$. Поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P\{|\xi_k| > C/2\}$ сходится. Далее,

$$M\left\{\left(\xi_k - \xi_k^*\right)^2 I_{\left\{\left|\xi_k - \xi_k^*\right| \le C\right\}}\right\} \ge M\left\{\left(\xi_k - \xi_k^*\right)^2 I_{\left\{\left|\xi_k\right| \le C/2\right\}} I_{\left\{\left|\xi_k^*\right| \le C/2\right\}}\right\} \ge$$

$$\ge M\left\{\left(\xi_k - \frac{M(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C/2\}})}{P\{|\xi_k| \le C/2\}}\right)^2 I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right\} P\{|\xi_k^*| \le C/2\}$$

(мы воспользовались неравенством: для всех a

$$M\left\{(\xi - a)^2 I_{\{|\xi| \le C\}}\right\} \ge M\left\{\left(\xi - \frac{M\left(\xi I_{\{|\xi| \le C\}}\right)}{P\{|\xi| \le C\}}\right)^2 I_{\{|\xi| \le C\}}\right\}).$$

Отсюда вытекает, что сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\left\{\left(\xi_k - \frac{M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right)}{P\left\{|\xi_k| \le C/2\right\}}\right)^2 I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right\}. \tag{3}$$

Легко проверить, что

$$\left| \frac{M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right)}{P\left\{|\xi_k| \le C/2\right\}} - M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right) \right| \le \frac{CP\left\{|\xi_k| > C/2\right\}}{P\left\{|\xi_k| \le C/2\right\}},$$

$$\left| M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C\}}\right) - M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right) \right| \le CP\left\{|\xi_k| > C/2\right\}.$$

Поэтому ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| c_k - \frac{M\left(\xi_k I_{\{|\xi_k| \le C/2\}}\right)}{P\left\{|\xi_k| \le C/2\right\}} \right|$$

сходится. Тогда из (3) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} M\left\{ (\xi_k - c_k)^2 I_{\{|\xi_k| \le C\}} \right\}.$$

Таким образом, выполняется третье условие теоремы Колмогорова. Наконец, условие II проверяется точно так же, как при доказательстве леммы 2.

Замечание к леммам 4–6. Пусть $m_k = \text{median } \xi_k$, $c_k = M(\xi_k I_{\{|\xi_k - m_k| \le C\}})$. Тогда если $(\xi_k - m_k) \to 0$ по вероятности, то все утверждения лемм 4–6 остаются в силе.

3. Пусть $\xi_k = \eta_k + i\,\zeta_k$ независимы, $c_k = M(\eta_k I_{\{|\eta_k| \le 1\}}) + iM(\zeta_k I_{\{|\zeta_k| \le 1\}})$, $\tilde{\xi}_k = \tilde{\eta}_k + i\tilde{\zeta}_k$ – независимые симметризации величин ξ_k.

Лемма 6. *Пусть* $\xi_k \to 0$ *по вероятности. Тогда ряды* $\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k - c_k)$, $\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k - c_k|^2$, $\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{\xi}_k|^2$, $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ *сходятся одновременно, т.е. они все сходятся, если сходится хотя бы один из них.*

Доказательство. То, что ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\eta_k - M(\eta_k I_{\{|\eta_k| \le 1\}}) \right) + i \sum_{k=0}^{\infty} \left(\zeta_k - M(\zeta_k I_{\{|\zeta_k| \le 1\}}) \right)$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\eta_k - M(\eta_k I_{\{|\eta_k| \le 1\}}) \right)^2 + \left(\zeta_k - M(\zeta_k I_{\{|\zeta_k| \le 1\}}) \right)^2 \right]$$

сходятся одновременно, вытекает из леммы 4; из леммы 3 следует, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} |\tilde{\xi}_k|^2$ сходятся одновременно, и, наконец, воспользовавшись леммой 5, заключаем, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k - c_k)$ сходятся одновременно.

Доказательство теоремы. 1. Пусть $r < R$, тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{r^k |\xi_k| > C\} < \infty$$

и $P\{\sup_k r^k |\xi_k| < \infty\} = 1$. Поэтому при $|z| < r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^k |\xi_k| \le \sup_k \left(r^k |\xi_k| \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r} \right)^k < \infty.$$

При $|z| > R$ имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left\{|z|^k|\xi_k|>C\right\}=\infty.$$

Значит, найдется бесконечное множество тех k, для которых $|z|^k|\xi_k|\geq C$, а значит, $z^k\xi_k$ не может стремиться к нулю. Поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k z^k$ расходится.

2. Точно так же при $|z|>R^*$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k z^k$ сходится (с вероятностью 1), а при $|z|>R^*$ – расходится.

3. Исследуем теперь поведение ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k z^k$ на границе круга сходимости. Не ограничивая общности, можно считать, что $R^*=1$. Предположим, что ряд сходится в точке $z_0, |z_0|=1$. Тогда на основании леммы 6 сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|\tilde{\xi}_k z_0^k\right|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\tilde{\xi}_k\right|^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left|\tilde{\xi}_k z^k\right|^2,$$

каково бы ни было z, для которого $|z|=1$. Поэтому в силу той же леммы сходятся ряды $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty}(\xi_k-c_k)z^k$. Производная порядка n от ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k z^k$ имеет вид

$$n!\sum_{k\geq n} c_k^n\tilde{\xi}_k z^{k-n}. \qquad (4)$$

Если этот ряд сходится в некоторой точке $z_0, |z_0|=1$, то в силу доказанного выше он будет сходиться в точке z, для которой $|z|=1$.

4. Докажем стохастический аналог тауберовой теоремы.

Лемма 7. *Пусть ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\tilde{\xi}_k$, *где* $\tilde{\xi}_k$ *— симметричные величины,* $0<\lambda<1$, *сходится и существует* $\lim\limits_{\lambda\uparrow 1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\tilde{\xi}_k$ *по вероятности. Тогда ряд* $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k$ *сходится с вероятностью* 1.

Доказательство. Так как величины $\lambda^k\tilde{\xi}_k$ симметричны, то [3, с.37] для всех N

$$P\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\tilde{\xi}_k\right|>C\right\}\leq 2P\left\{\left|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\xi_k\right|>\frac{C}{2}\right\}.$$

Функции $\tilde{\xi}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\tilde{\xi}_k$ ограничены по вероятности при $\lambda<1$. Поэтому ограничены по вероятности суммы $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k$, а значит, в силу теоремы п.19^0 [3, с.41] ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\xi}_k$ из симметричных величин сходится.

Следствие. *Если при некотором* $z_0, |z_0|=1$, *функция* $\tilde{\Xi}(z)$ *аналитична, то для всех* n *существуют пределы*

$$\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{1}{n!}\tilde{\Xi}^{(n)}(\lambda z_0)=\sum_{k\geq n}C_k^n\tilde{\xi}_k z_0^{k-n}.$$

Здесь $\tilde{\Xi}^{(n)}(\lambda)$ *— n-я производная функции* $\tilde{\Xi}(\lambda)$. *Если для некоторого* $z, |z|=1$, *и* $n\geq 0$ *ряд* (4) *расходится, то функция* $\tilde{\Xi}(z)$ *не может быть аналитической ни в одной точке* $z_0, |z_0|=1$.

5. Покажем, что ни одна точка единичной окружности не может быть аналитической для $\tilde{\Xi}(z)$. Если ряд (4) расходится хотя бы при одном $z, |z|=1$, и

$n \geq 0$, то это уже доказано. Поэтому рассмотрим случай, когда все ряды (4) сходятся при $|z| = 1$. Докажем, что точка $z_0 = 1$ не является точкой аналитичности (для других точек доказательство аналогично).

Положим

$$\theta_n = \sum_{k \geq n} C_k^n \tilde{\xi}_k = \frac{1}{n!} \lim_{\lambda \uparrow 1} \tilde{\Xi}^{(n)}(\lambda).$$

Если она аналитична, то при некотором $\delta > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \delta^n. \tag{5}$$

Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ сходится, то сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} P\{|\tilde{\xi}_k| > 1\}$ и, значит, среди чисел $\tilde{\xi}_k I_{\{|\tilde{\xi}_k| > 1\}}$ только конечное число отлично от нуля. Поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k I_{\{|\tilde{\xi}_k| > 1\}} z^k$ является целой аналитической функцией. Особенности $\tilde{\Xi}(z)$ совпадают с особенностями ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k I_{\{|\tilde{\xi}_k| \leq 1\}} z^k$; не ограничивая общности, можно считать, что $|\tilde{\xi}_k| \leq 1$.

Покажем, что $\theta_n \delta^n$ не может сходиться по вероятности к нулю. Рассмотрим величину

$$|\theta_n|^2 \delta^{2n} = \delta^{2n} \left[\left(\sum_{k \geq n} C_k^n \tilde{\eta}_k \right)^2 + \left(\sum_{k \geq n} C_k^n \tilde{\zeta}_k \right)^2 \right].$$

Положим $M\, \tilde{\eta}_k^2 = b_k$, $M\, \tilde{\zeta}_k^2 = c_k$. Тогда

$$M\, |\theta_n|^2 \delta^{2n} = \delta^{2n} \sum_{k \geq n} \left(C_k^n \right)^2 (b_k + c_k).$$

Из условия $\left| \tilde{\eta}_k \right| \leq 1$ и $\left| \tilde{\zeta}_k \right| \leq 1$ вытекает, что [3] выражение $|\theta_n|^2 / M |\theta_n|^2$ имеет равномерно ограниченные моменты. Поэтому $\theta_n \delta^n \to 0$ по вероятности эквивалентно условию

$$\lim_{n \to \infty} \delta^{2n} \sum_{k \geq n} \left(C_k^n \right)^2 (b_k + c_k) = 0.$$

Но тогда при $\delta_1 < \delta$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_1^{2n} \sum_{k \geq n} \left(C_k^n \right)^2 (b_k + c_k) < \infty$$

и следовательно, при $\delta_2 < \delta_1$ сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \delta_2)^{2n} (b_n + c_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \delta_2)^{2n} M \left| \tilde{\xi}_n \right|^2,$$

что противоречит расходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\xi}_k (1 + \delta_2)^k$. Теорема доказана.

1. *Мередов Б.* Степенные ряды со случайными коэффициентами // Тез. докл. VI Совет.–Япон. симпоз. по теор. вероятн. и мат,статистике (5–10 авг. 1991, г. Киев).– Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991.– С. 103.
2. *Мередов Б.* Случайные степенные ряды // Стохастические уравнения и граничные теоремы.– Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991.–140с.
3. *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями.–М.: Наука, 1986.–320с.

Получено 28.05.92