УДК 517.94: 519.62

Я. М. Пелех, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

ПРО ОДИН ПІДХІД ДО ЗНАХОДЖЕННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Пропонується нова методика побудови чисельних методів на базі неперервних дробів. Характерною особливістю таких алгоритмів є те, що при певних значеннях параметрів можна одержувати як нові, так і традиційні (явні і неявні) чисельні методи розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Запропоновані двосторонні формули, які дозволяють на кожному кроці інтегрування одержувати не тільки верхні і нижні наближення до точного розв'язку, але й інформацію про величину головного члена похибки без додаткових обчислень правої частини вихідного диференціального рівняння.

Предлагается новая методика построения численных методов на базе непрерывных дробей. Характерной особенностью таких алгоритмов является то, что при определенных значениях параметров можно получать как новые, так и традиционные (явные и неявные) численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предложены двухсторонние формулы, позволяющие на каждом шаге интегрирования получать не только верхние и нижние приближения к точному решению, но и информацию о величине главного члена погрешности без дополнительных вычислений правой части исходного дифференциального уравнения.

Проблеми побудови і дослідження математичних моделей фізико-хімічних, біологічних і економічних процесів, задачі багатовимірної оптимізації, електроніки, кінетики і т.п. приводять до необхідності розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь та їх систем виду

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ 0 \le x \le X,\ y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Тут $y(x)$ — дійсний m-компонентний вектор, f — дійсна векторна функція залежної і незалежної змінних, причому припускається, що функція f диференційовна стільки разів, скільки необхідно для чисельного аналізу.

Широкого застосування в прикладній математиці набули ланцюгові (неперервні) та гіллясті ланцюгові дроби, які при певних умовах дають високу швидкість збіжності алгоритмів, двосторонні і монотонні наближення, мають слабку чутливість до похибок заокруглень, правильно відображають основні властивості розв'язків досліджуваних задач [1–4]. Процес обчислень неперервних дробів є циклічним і легко програмується.

В даній роботі пропонуються наближені методи розв'язування задачі (1), які базуються на неперервних дробах. Не обмежуючи загальності, будемо розглядати наближені формули для знаходження розв'язку задачі (1) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь вони переносяться покомпонентно.

Наближений розв'язок в точці x_{n+1}, $n = 0, 1, 2,\ldots$, шукаємо у вигляді

$$y_{n+1}^{[k,l]} = y_n / D_n, \tag{2}$$

де

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1+\cfrac{d_{k,1}}{1+\ddots+\cfrac{d_{k,l-1}}{1+d_{k,l}}}}\,.$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k + l = \overline{1,4}$ ($k = \overline{1,4}$; $l = \overline{0,3}$) мають вигляд

$$d_{0,0} = 1,\ d_{i,0} = -\sum_{m=1}^{i} d_{i-m,0}\frac{\sigma_m}{\sigma_0},\ i = \overline{1,4}\,,$$

$$d_{\nu,1} = -\frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}},\ \nu = 1,2,3,\ d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1},\ \mu = 1,2\,,$$

$$d_{1,3} = d_{2,1}\frac{d_{2,2}}{d_{1,2}},\ \ \sigma_0 = y_n \neq 0,\ \ \sigma_m = h\sum_{i=1}^{q} a_{mi}k_i\,, \tag{3}$$

$$k_i = f(x_n + \alpha_i h,\ y_n + h\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}k_j),\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}\,,\ q = k + l.$$

Тут h — крок інтегрування ($h = x_{n+1} - x_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}, i, j = \overline{1,4}$, — параметри.

За допомогою цих формул можна одержати як явні ($\beta_{ij} = 0$, якщо $i \leq j$), так і неявні чисельні методи. Значення параметрів $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}$ зручно записувати у вигляді таблиці

$$\begin{array}{|c|ccc|ccc|} \alpha_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1\nu} & a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \beta_{\nu 1} & \cdots & \beta_{\nu\nu} & a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{array}$$

Теорема 1. *Система нелінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases} 1 - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{mi} = 0,\ \ \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{mi}\alpha_i = 0, \\ \frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2} = 0,\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{3}\beta_{ij},\ i = 1,2,3, \\ \frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{mi}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}\alpha_j = 0 \end{cases} \tag{4}$$

разом з формулами (2), (3) *визначає обчислювальний метод* (k + l)*-го порядку точності.*

Доведення випливає з порівняння коефіцієнтів розкладів в ряди Тейлора для $y(x_{n+1})$ і $y_{n+1}^{[k,l]}$ при однакових степенях h^p, $p = 1, 2, 3$. В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь (4), якій повинні задовольняти параметри $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Тут $y(x_{n+1})$ і $y_{n+1}^{[k,l]}$ — відповідно точний і наближений розв'язки задачі (1).

***Зауваження* 1.** При $k = 1$, $l = 0$ з формул (2), (3) одержуємо відому формулу Ламберта [5], а при $k + l = 2, 3$, $k = 1, 2, 3$; $l = 0, 1, 2$ — явні формули другого і третього порядку апроксимації [6].

***Зауваження* 2.** Поклавши в (4) $a_{2i} = 0$, $a_{3i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, знайдемо сім'ю значень параметрів $a_{1i}, \alpha_i, \beta_{ij}$ для традиційних (явних і неявних) методів Рунге — Кутта [7–10].

Якщо $\sum_{i=1}^{3} a_{1i} = 1$, але $\sum_{i=1}^{3} a_{1i}\alpha_i \neq 1/2$, то згідно з умовами апроксимації перші два рівняння системи (4) розпадуться відповідно на два і три рівняння і в результаті матимемо систему

$$\begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{3} a_{1i} = 0,\ \sum_{i=1}^{3} a_{2i} = 0,\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i} = 0, \\ \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{3} a_{1i}\alpha_i - \sum_{i=1}^{3} a_{2i}\alpha_i = 0,\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\alpha_i = 0, \\ \frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2} = 0,\ \ \frac{1}{6} - \sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_{mi}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}\alpha_j = 0, \\ \alpha_i = \sum_{j=1}^{3}\beta_{ij},\ \ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{5}$$

З третього і п'ятого рівнянь ($\sum_{i=1}^{3} a_{3i} = 0,\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}\alpha_i = 0$) системи (5) виразимо a_{31} і a_{32} через a_{33}: $a_{31} = a_{33}\dfrac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$, $a_{32} = -a_{33}\dfrac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$, a_{33} — параметр, а з рівняння $\sum_{i=1}^{3} a_{2i} = 0$ виразимо $a_{21} = -a_{22} - a_{23}$. Тепер, віднявши від першого рівняння системи (5) друге і третє, а від четвертого — п'яте рівняння, і ввівши позначення

$$B_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31},\ B_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32},\ B_3 = a_{13} + a_{23} + a_{33}, \tag{6}$$

одержимо систему

$$\begin{cases} 1 - B_1 - B_2 - B_3 = 0,\ \ \dfrac{1}{2} - B_1\alpha_1 - B_2\alpha_2 - B_3\alpha_3 = 0, \\ \dfrac{1}{6} - B_1\dfrac{\alpha_1^2}{2} - B_2\dfrac{\alpha_2^2}{2} - B_3\dfrac{\alpha_3^2}{2} = 0, \\ \dfrac{1}{6} - B_1\sum\limits_{j=1}^{3}\beta_{1j}\alpha_j - B_2\sum\limits_{j=1}^{3}\beta_{2j}\alpha_j - B_3\sum\limits_{j=1}^{3}\beta_{3j}\alpha_j = 0, \\ \alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{3}\beta_{ij},\ \ i = 1,2,3. \end{cases} \tag{7}$$

З перших трьох рівнянь системи (7) виразимо B_i, $i = \overline{1,3}$:

$$B_1 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)\left\{\alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{1}{3}\right\}}{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

$$B_2 = \frac{(\alpha_3 - \alpha_1)\left\{\frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_1) - \frac{1}{3} - \alpha_1\alpha_3\right\}}{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

$$B_3 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\left\{\alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3}\right\}}{\alpha_2\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_3)}.$$

Враховуючи (6), знаходимо $a_{11} = B_1 - a_{21} - a_{31}$, $a_{12} = B_2 - a_{22} - a_{32}$, $a_{13} = B_3 - a_{23} - a_{33}$, а з решти рівнянь одержуємо співвідношення між B_i, α_i, β_{ij}. Наприклад, коефіцієнти для явних методів ($\beta_{ij} = 0$, якщо $i \le j$, $\alpha_1 = 0$) мають три сім'ї розв'язків:

1) якщо $\alpha_2\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)\left(\alpha_2 - \frac{2}{3}\right) \neq 0$, a_{22}, a_{23}, a_{33}, α_2, α_3 — параметри, то

$$\begin{gathered} a_{11} = 1 + \frac{2 - 3(\alpha_2 + \alpha_3)}{6\alpha_2\alpha_3} - a_{33}\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2} + a_{22} + a_{23}, \\ a_{12} = \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)} + a_{33}\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - a_{22}, \\ a_{13} = \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} - a_{23} - a_{33}, \\ a_{21} = -(a_{22} + a_{23}),\ \ a_{31} = a_{33}\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2},\ \ a_{32} = -a_{33}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \\ \beta_{21} = \alpha_2,\ \ \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)},\ \ \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32}; \end{gathered} \tag{8}$$

2) якщо $\alpha_2 = \alpha_3$, то маємо чотирьохпараметричну множину розрахункових формул

$$
\begin{gathered}
a_{11}=\frac{1}{4}+a_{22}+a_{23}, \quad a_{12}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\beta_{32}}-a_{22}-a_{33}, \\
a_{13}=\frac{1}{4\beta_{32}}-a_{23}-a_{33}, \quad a_{21}=-(a_{22}+a_{23}), \\
a_{31}=0, \qquad a_{32}=-a_{33}, \qquad \alpha_2=\alpha_3=\frac{2}{3}, \\
\beta_{21}=\frac{2}{3}, \qquad \beta_{31}=\frac{2}{3}-\beta_{32},
\end{gathered} \tag{9}
$$

де $\beta_{32} \neq 0$; a_{22}, a_{23}, a_{33} — вільні параметри;

3) якщо $\alpha_2 = 2/3$, то сім'я розв'язків має вигляд

$$
\begin{gathered}
a_{11}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\beta_{32}}\right)+a_{22}+a_{23}+a_{33}, \quad a_{12}=\frac{3}{4}-a_{22}, \\
a_{13}=\frac{1}{4\beta_{32}}-a_{23}-a_{33}, \quad a_{21}=-a_{22}-a_{23}, \\
a_{31}=-a_{33}, \quad a_{32}=0, \quad \alpha_2=\frac{2}{3}, \quad \beta_{21}=\frac{2}{3}, \\
\alpha_3=0, \quad \beta_{31}=-\beta_{32},
\end{gathered} \tag{10}
$$

де $a_{22}, a_{23}, a_{33}, \beta_{32} \neq 0$ — параметри.

Наведемо один набір значень параметрів для неявних схем:

$$
\begin{gathered}
a_{11}=1, \quad a_{21}=-a_{22}, \quad a_{22}=\frac{1}{2\alpha_2}, \quad a_{12}=a_{13}=a_{23}=0, \\
a_{31}=\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_2}, \quad a_{32}=\frac{3\alpha_2-2}{6\alpha_2(1-\alpha_2)}, \quad a_{33}=\frac{2-3\alpha_2}{6(1-\alpha_2)}, \\
\alpha_1=0, \quad \beta_{1j}=0, \quad j=1,2,3, \quad \beta_{21}=\alpha_2, \quad \beta_{31}=1-\beta_{32}-\beta_{33}, \\
\alpha_3=1, \quad \beta_{32}=\frac{1-\alpha_2+\beta_{33}(3\alpha_2-2)}{\alpha_2(2-3\alpha_2)},
\end{gathered} \tag{11}
$$

β_{33}, α_2 — параметри, причому $\alpha_2(1-\alpha_2)(2-3\alpha_2) \neq 0$.

Функція стійкості формул (2), (3), (11) при $k=1, l=2$ має вигляд

$$
S_{[1,2]}(\lambda h;\beta_{33})=\frac{1-\lambda h\left(\beta_{33}-\frac{1}{3}\right)}{1-\lambda h\left(\frac{2}{3}+\beta_{33}\right)+(\lambda h)^2\left(\frac{1}{6}+\beta_{33}\right)-\frac{1}{2}\beta_{33}(\lambda h)^3}, \tag{12}
$$

тобто $S_{[1,2]}\left(\lambda h;\frac{1}{3}\right)=[0/3]_{\exp}(\lambda h)$ і $S_{[1,2]}\left(\lambda h;\frac{1}{12}\right)=[1/3]_{\exp}(\lambda h)$.

Модульний характер запропонованих методів дає можливість в кожній точці інтегрування одержувати кілька наближень до точного розв'язку, що дозволяє проводити розрахунки з більшим, в порівнянні з відповідними традиційними методами виду Рунге-Кутта, кроком інтегрування.

Побудуємо явні двосторонні формули для знаходження наближеного розв'язку задачі (1). Розв'язок шукатимемо у вигляді (2), (3), але постійні a_{ij}, α_i, β_{ij} ($\beta_{ij} = 0$ при $i \le j$) визначимо з умови, щоб локальна похибка схеми в кожній вузловій точці мала вигляд

$$R^{[k,l]} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = \omega h^p K \mathfrak{F}^{[k,l]}(f) + O(h^{p+1}), \tag{13}$$

де $y(x_{n+1})$ і $y_{n+1}^{[k,l]}$ — відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), h — крок інтегрування, $\mathfrak{F}^{[k,l]}(f)$ — деякий диференціальний оператор, обчислений у точці (x_n, y_n), $(\mathfrak{F}^{[k,l]}(f) \neq 0)$, K — константа, p — порядок точності, ω — параметр двосторонності.

Обмежимось детальнішим розглядом формул (2), (3) при $k = 3, l = 0$, оскільки у випадках $k = 2, l = 1$ і $k = 1, l = 2$ одержують аналогічні нелінійні системи алгебраїчних рівнянь.

Теорема 2. *Якщо параметри* a_{ij}, α_i, β_{ij} *задовольняють систему рівнянь*

$$\begin{cases} s_1 = 1,\ s_2 = s_3 = 0,\ \dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{i=2}^{3} s_i\alpha_i = 0,\ S_m = \sum_{j=m}^{3} a_{jm},\ m = 2,3, \\ \dfrac{1}{6} - \displaystyle\sum_{i=2}^{3} S_i \frac{\alpha_i^2}{2} = 0, \quad \frac{1}{6} - a_{33}\beta_{32}\alpha_2 = 0, \\ 2a_{22}\alpha_2 - \dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{i=2}^{3} S_i\alpha_i = \omega, \quad s_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij},\ i = 1,2,3, \end{cases} \tag{14}$$

то

$$R^{[3,0]} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = \omega h^3 \mathfrak{F}^{[3,0]}(f) + O(h^4),$$

де

$$\mathfrak{F}^{[3,0]}(f) = fDf / y_n.$$

Д о в е д е н н я. Взявши різницю розкладів $y(x_{n+1})$ і $y_{n+1}^{[3,0]}$ в ряди Тейлора в околі точки x_n, одержимо

$$R^{[3,0]} = \left\{ \left(1 - \sum_{i=1}^{3} s_i\right) hfy_n^3 + \left(\frac{1}{2} - \sum_{j=2}^{3} S_j\alpha_j\right) h^2 y_n^3 Df + (s_2 - s_3) h^2 y_n^2 f^2 + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{6} - \sum_{j=2}^{3} \frac{\alpha_j^2}{2} S_j\right) h^3 y_n^3 D^2 f + \left(\frac{1}{6} - a_{33}\beta_{32}\alpha_2\right) h^3 y_n^3 f_y Df +$$

$$\left. + \left(2a_{22}\alpha_2 - \frac{1}{2}(s_2 + s_3 + 1) - \sum_{j=2}^{3} S_j\alpha_j\right) h^3 y_n^2 fDf + 2s_2 h^3 y_n f^3 + O(h^4) \right\} Q_{[3,0]},$$

де

$$s_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij},\ i = \overline{1,3},\ Df = f_x + ff_y,\ D^2 f = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy},$$

$$Q_{[3,0]} = y_n^3 - h y_n^2 f(s_1 + s_2 + s_3) + O(h^2).$$

Позначивши вираз при $h^3 y_n^2 fDf$ через ω і прирівнявши до нуля решту коефіцієнтів при h^i, $i = 1, 2, 3$, одержимо твердження теореми.

Система (14) має три сім'ї розв'язків:

I.

$$a_{11}=1,\ a_{21}=-\frac{1+\omega}{2\alpha_2},\ a_{22}=\frac{1+\omega}{2\alpha_2},\ a_{31}=\frac{2+3(\omega\alpha_3-\alpha_2)}{6\alpha_2\alpha_3},$$

$$a_{32}=\frac{3\alpha_2-2-3\omega(\alpha_3-\alpha_2)}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},\quad a_{33}=\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$\beta_{21}=\alpha_2,\quad \beta_{32}=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2-3\alpha_2},\quad \beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32}, \tag{15}$$

де α_2, α_3 — параметри, що задовольняють умову $\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(2-\alpha_2)\neq 0$.

II.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{3}{4}(1+\omega) & \frac{3}{4}(1+\omega) & 0\\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\frac{1}{4a_{33}} & \frac{1}{4a_{33}} & 0 & \frac{3}{4}\omega & -\frac{3}{4}\omega-a_{33} & a_{33}
\end{array}$$

a_{33} — відмінне від нуля число.

III.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{3}{4}(1+\omega) & \frac{3}{4}(1+\omega) & 0\\
0 & -\frac{1}{4a_{33}} & \frac{1}{4a_{33}} & 0 & \frac{3}{4}\omega-a_{33} & -\frac{3}{4}\omega & a_{33}
\end{array}$$

Головний член локальної похибки легко оцінити, оскільки y_n відоме з попереднього кроку, $f=k_1$, $h\,D\,f\simeq(k_2-k_1)/\alpha_2$, де $k_1=f(x_n, y_n), k_2=f(x_n+\alpha_2 h, y_n+\beta_2 h k_1)$. Тоді

$$\mathfrak{F}^{[3,0]}=\omega h^3 Df/y_n=\frac{\omega}{\alpha^2}h^2k_1(k_2-k_1)/y_n.$$

Виведені розрахункові формули дозволяють одержувати оцінку вигляду

$$y(x_{n-1})-y_{n+1}^{[k,l]}=\omega h^{p-1}\mathfrak{F}_1^{[k,l]}(f)+\omega h^p\mathfrak{F}_2^{[k,l]}(f)+O(h^{p+1}), \tag{16}$$

причому без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння можна не тільки оцінити $\mathfrak{F}_1^{[k,l]}(f)$ і $\mathfrak{F}_2^{[k,l]}(f)$, але й одержати односторонні наближення p-го порядку точності до точного розв'язку задачі (1), що вигідно відрізняє їх від двосторонніх алгоритмів з [11, 12]. Наприклад, при $k=3$, $l=0$ один з наборів параметрів $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}$ має вигляд

$$a_{11}=1,\quad a_{21}=\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{1}{\alpha_2}\right),\ a_{22}=\frac{1}{2\alpha_2},\ a_{31}=-\frac{\omega}{2}+\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_2\alpha_3},$$

$$a_{32}=\frac{3\alpha_2-2}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},\quad a_{33}=\frac{2-3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$\beta_{21}=\alpha_2,\quad \beta_{32}=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2-3\alpha_2},\quad \beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32}, \tag{17}$$

$$R^{[3,0]}=\omega h^2\mathfrak{F}_1^{[3,0]}(f)+\omega h^3\mathfrak{F}_2^{[3,0]}(f)+O(h^4),$$

де $\mathfrak{F}_1^{[3,0]}(f) = f^2/y_n$, $\mathfrak{F}_2^{[3,0]}(f) = f^3/y_n^2$, що випливає із системи (14), якщо позначити коефіцієнти при $h^2 y_n^2 f^2$ і $h^3 y_n f^3$ через ω, а всі інші прирівняти до нуля.

Аналогічно можна одержувати двосторонні формули з іншими значеннями $\mathfrak{F}^{[k,l]}(f)$, а також наближені формули вищих порядків точності. Наведемо лише один набір параметрів для двостороннього алгоритму третього порядку апроксимації (див. (2), (3) при $k = 4$, $l = 0$):

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{6}+2\omega & -2\omega-\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-2\omega & \frac{1}{6}+2\omega \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2\omega & 2\omega & 2\omega & -2\omega
\end{array}
$$

$$\mathfrak{F}^{[4,0]}(f) = \omega h^3(D^2 f + f_y Df) = -2h\sum_{i=1}^{4} a_{4i}\, k_i. \qquad (18)$$

За допомогою параметрів ω і h досягається двосторонність і необхідна точність наближень на всьому інтервалі інтегрування.

Пара формул, що відповідають двом значенням ω, які відрізняються лише знаком, складає формулу двостороннього методу, тому що одна з них буде давати верхнє, а друга — нижнє наближення до точного розв'язку задачі (1). За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень, а модуль їх піврізниці дає допущену при цьому похибку.

1. *Бейкер Дж., Грейвс–Моррис П.* Аппроксимации Паде. Основы теории. Обобщения и приложения. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
3. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312с.
4. *Пелех Я. Н., Крупка З. И., Солодяк М. Т.* Применение непрерывных дробей к решению уравнений, описывающих электромагнитное поле в ферромагнитных телах // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1989. – С.165–171.
5. *Lambert I. D.* Computational methods in ordinary differential equations. – London, etc.: Wiley and Sons, 1973. – 278p.
6. *Пелех Я. Н.* Алгоритм построения *A*-устойчивых методов для численного интегрирования дифференциальных уравнений // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1981. – Вып 14. – С.12–16.
7. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутта для жестких дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 322с.
8. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312с.
9. *Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1978. – 464с.
10. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. II. Stiff and differential algebraic problems. – Berlin: Springer, 1991. – 601p.
11. *Горбунов А. Д., Шахов Ю. А.* О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, №2. – С.239–253.
12. *Пелех Я. Н., Пляцко Р. М., Вынар А. Л.* Ультрарелятивистское движение вращающегося пробного тела в гравитационном поле // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – №4. – С.39–43.

Одержано 17.06.92