УДК 512.554.3

А. А. Тутов, асп., **В. М. Футорный**, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

РАЗБИЕНИЯ СИСТЕМ КОРНЕЙ АЛГЕБР КАЦА — МУДИ РАНГА 2

Приведена классификация параболических разбиений системы корней алгебр Каца — Муди ранга 2. Построены новые серии неприводимых представлений.

Наведена класифікація параболічних поділів системи коренів алгебр Каца — Муді рангу 2. Побудовані нові серії незвідних зображень.

Пусть Δ обозначает систему корней алгебры Каца — Муди L. Вопросы изучения представлений алгебры L, геометрий и алгебр Гекке тесно связаны с задачей классификации параболических разбиений системы корней Δ, т. е. таких замкнутых подмножеств $P \subset \Delta$, что $P \cup -P = \Delta$ и $P \cap -P = \varnothing$. В случае, когда $\dim L < \infty$, результат хорошо известен, а именно, для любого P существует базис π системы корней Δ такой, что $P = \Delta_+(\pi)$ [1] .Для афинных алгебр Ли полная классификация параболических разбиений приведена в [2]. В этом случае существует конечное число неэквивалентных разбиений.

В данной работе изучаются параболические разбиения системы корней Δ алгебры Каца — Муди неопределенного типа ранга 2 с симметричной матрицей Картана.Оказалось,что для таких алгебр существует континуум неэквивалентных параболических разбиений. С каждым таким разбиением связана конструкция неприводимых L-модулей, обобщающая конструкцию модулей Верма, причем неэквивалентные разбиения соответствуют неизоморфным представлениям. Для афинных алгебр такая конструкция рассматривалась в [2]. Случай алгебры $A_1^{(1)}$ подробно изучен в работе [3].

1. Система корней алгебр Каца — Муди ранга 2. Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим обобщенную матрицу Картана $A_k = \begin{pmatrix} 2 & -k \\ -k & 2 \end{pmatrix}$ и будем предполагать, что $k \geq 3$. Соответствующая алгебра Каца — Муди L_k задана образующими $e_1, e_2, f_1, f_2, h_1, h_2$ и соотношениями $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$, $[h_i, e_j] = ((k+2)\delta_{ij} - k) e_j$, $[h_i, f_j] = (k - (k+2)\delta_{ij}) f_j$, $[h_1, h_2] = 0$, $(\operatorname{ad} e_i)^{k+1} e_j = (\operatorname{ad} f_i)^{k+1} f_j = 0$, $i \neq j$.

Заметим, что L_k — простая алгебра неопределенного типа [4].

Обозначим через $\Delta(k)$ систему корней алгебры L_k. Пусть $\pi_k = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ — некоторый базис $\Delta(k)$, $\Delta_+(\pi_k)$ (соответственно $\Delta_-(\pi_k)$) — множество положительных (соответственно отрицательных) корней в $\Delta(k)$ относительно базиса π_k .Пусть $\Delta^{\mathrm{re}}(k)$ — множество действительных, а $\Delta^{\mathrm{im}}(k)$ — множество мнимых корней, $\Delta^{\mathrm{re}}_{\pm}(k) = \Delta^{\mathrm{re}}(k) \cap \Delta_{\pm}(\pi_k)$, $\Delta^{\mathrm{im}}_{\pm} = \Delta^{\mathrm{im}}(k) \cap \Delta_{\pm}(\pi_k)$. Пусть W обозначает группу Вейля, $Q(k) = \{m\alpha_1 + l\alpha_2 \mid m, l \in \mathbb{Z}\}$, $Q_+(k) = \{m\alpha_1 + l\alpha_2 \mid m, l \in \mathbb{Z}_+\}$.

Лемма 1. $\Delta^{\mathrm{re}}_+(k) = \{a_n\alpha_1 + a_{n+1}\alpha_2,\ a_{n+1}\alpha_1 + a_n\alpha_2 \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, *где* $a_n = [(k+t)^n/2 - (k-t)^n/2]/t$, $t = \sqrt{k^2-4}$, $n = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Delta^{\mathrm{re}}_+(k)$, $\varphi = m\alpha_1 + l\alpha_2$, $m, l \in \mathbb{Z}_+$. Предположим, что $m \geq l$. Тогда существует $w \in W$ такой, что $\varphi = w\alpha_1$. Поэтому

$m = a_{n+1}$, $l = a_n$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$, где a_n определяется по рекуррентной формуле $a_n = k a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_1 = 1$, $a_0 = 0$, $n \geq 2$. Отсюда легко получается утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi = m\alpha_1 + l\alpha_2 \in \Delta_+(\pi_k)$. *Существует* $\lambda \in \mathbb{R}$ *такое, что:*

1) *если* $l/m \in [1/\lambda, \lambda]$, *то* $\varphi \in \Delta_+^{\mathrm{im}}(k)$;

2) *если* $l/m \notin [1/\lambda, \lambda]$, *то* $\varphi \in \Delta_+^{\mathrm{re}}(k)$.

Доказательство. Обозначим $\lambda = (k+t)/2 = 2/(k-t)$. Рассмотрим последовательность $\{a_{n+1}/a_n, n \geq 1\}$. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lambda$, причем $a_{n+1}/a_n > \lambda$ для всех n. Отсюда следует п.1 леммы. Для доказательства п.2 достаточно рассмотреть значение на φ стандартной инвариантной билинейной формы. Легко показать, что, если $l/m \notin [1/\lambda, \lambda]$, то $(\varphi, \varphi) > 0$. Поэтому $\varphi \in \Delta_+^{\mathrm{re}}(k)$. Лемма доказана.

Зададим на $Q_+(k)$ частичный порядок. Пусть $\varphi = n\alpha_1 + m\alpha_2 \in Q_+(k)$, $\psi = n'\alpha_1 + m'\alpha_2 \in Q_+(k)$. Будем говорить, что $\varphi \geq \psi$, если $n \geq n'$ и $m \geq m'$. Вектор $\varphi \in Q_+(k)$ назовем неуменьшаемым, если $w\varphi \geq \varphi$ для всех $w \in W$.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi = n\alpha_1 + m\alpha_2 \in Q_+(k)$, *причем* $m/n \in [2/k, k/2]$. *Тогда* $\varphi \in \Delta_+^{\mathrm{im}}(k)$.

Доказательство. Покажем, что в условиях леммы вектор φ является неуменьшаемым. Для этого достаточно проверить, что $s_{\alpha_1}\varphi \geq \varphi$ и $s_{\alpha_2}\varphi \geq \varphi$, где $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}$ — отражения, соответствующие простым корням α_1 и α_2. Имеем

$$s_{\alpha_1}\varphi = \varphi - \varphi(h_1)\alpha_1 = n\alpha_1 + m\alpha_2 - (2n - mk)\alpha_1 = (mk - n)\alpha_1 + m\alpha_2,$$

$$s_{\alpha_2}\varphi = \varphi - \varphi(h_2)\alpha_2 = n\alpha_1 + m\alpha_2 - (2m - nk)\alpha_2 = (nk - m)\alpha_2 + n\alpha_1.$$

Но $mk \geq 2n$ и $nk \geq 2m$. Поэтому $s_{\alpha_1}\varphi \geq \varphi$ и $s_{\alpha_2}\varphi \geq \varphi$. Значит, вектор φ — неуменьшаемый. Согласно [5], $\varphi \in \Delta(k)$. Заметим, что $1 < k/2 < \lambda$ и, следовательно, $1/\lambda < m/n < \lambda$. Осталось воспользоваться леммой 2. Лемма доказана.

2. Параболические разбиения системы корней Δ. Будем называть произвольное непустое подмножество $P \subset \Delta$ замкнутым, если $\varphi + \psi \in P$ для любых $\varphi, \psi \in P$ таких, что $\varphi + \psi \in \Delta$.

Определение [2]. *Замкнутое подмножество* $P \subset \Delta$ *называется параболическим разбиением, если* $P \cup -P = \Delta$ *и* $P \cap -P = \varnothing$.

Рассмотрим на множестве корней Δ инволюцию $i: \varphi \to -\varphi$ и автоморфизм $b: \Delta \to \Delta$ такой, что $b(\alpha_1) = \alpha_2$, $b(\alpha_2) = \alpha_1$. Пусть $I = \langle i \rangle$, $B = \langle b \rangle$ и $\tilde{W} = W \times I \times B$. Если P — некоторое параболическое разбиение, $w \in \tilde{W}$, то очевидно, что wP снова будет параболическим разбиением. Поэтому можно рассмотреть действие группы $\tilde{W}$ на множестве $\{P\}$ всех параболических разбиений. Два параболических разбиения P_1 и P_2 назовем эквивалентными, если они принадлежат одной орбите $\tilde{W}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Множество неэквивалентных параболических разбиений имеет мощность континуума.*

Доказательство. Рассмотрим элементы $\alpha_1^*, \alpha_2^* \in H = \langle h_1, h_2 \rangle$, где

$\alpha_i^*(\alpha_j)=\delta_{ij}$. Пусть $l_r=-r\alpha_1^*+\alpha_2^*\in H$ и $r\in[2/k, k/2]$, $k\geq 3$. Обозначим $P_r=$ $=\{\varphi\in\Delta(k)\mid l_r(\varphi)>0\}\bigcup\{\varphi\in\Delta_+(\pi_k)\mid l_r(\varphi)=0\}$.Тогда $-P_r=\{\varphi\in\Delta(k)\mid l_r(\varphi)<$ $<0\}\bigcup\{\varphi\in\Delta_-(\pi_k)\mid l_r(\varphi)=0\}$. Очевидно, что P_r является параболическим разбиением. Пусть $r'\in[2/k, k/2]$ и $r'>r$. Рассмотрим произвольное $q\in\mathbb{Q}$ такое, что $r<q<r'$ и вектор $\varphi=n\alpha_1+m\alpha_2$, где $m/n=q$. Согласно лемме 3 $\varphi\in\Delta^{\text{im}}(k)$. При этом $\varphi\in P_r$, но $\varphi\notin P_{r'}$. Значит, $P_r\neq P_{r'}$. Рассмотрим множество $\Omega=\{P_r\mid r\in[2/k, k/2]\}$ мощности континуума. Тогда множество различных орбит $\{\tilde{W}P_r\}$ разбиений из Ω является подмножеством в множестве орбит $\{\tilde{W}P\}$ всех разбиений и имеет мощность континуума. Теорема доказана.

Перейдем к классификации неэквивалентных параболических разбиений.

Пусть P — некоторое параболическое разбиение. Обозначим $P^{\text{re}}=P\cap$ $\cap\Delta^{\text{re}}(k)$. Очевидно, что P^{re} является разбиением множества $\Delta^{\text{re}}(k)$, т.е. $P^{\text{re}}\bigcup$ $\bigcup -P^{\text{re}}=\Delta^{\text{re}}(k)$ и $P^{\text{re}}\cap -P^{\text{re}}=\varnothing$. Рассмотрим элемент $l_{1/\lambda}=-\alpha_1^*/\lambda+\alpha_2^*\in H$.

Теорема 2. *Пусть P — некоторое параболическое разбиение. Тогда возможен один из следующих случаев:*

1) *существует $w\in\tilde{W}$ такой, что $P^{\text{re}}=w\,\Delta_+^{\text{re}}(k)$;*

2) *существует $w\in\tilde{W}$ такой, что $P^{\text{re}}=wP_{1/\lambda}^{\text{re}}$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [2].

Таким образом, достаточно рассмотреть только такие параболические разбиения P, что $P^{\text{re}}=\Delta_+^{\text{re}}(k)$ или $P^{\text{re}}=P_{1/\lambda}^{\text{re}}$. Предположим, $P^{\text{re}}=\Delta_+^{\text{re}}(k)$. Но тогда $P=\Delta_+(k)$. Осталось классифицировать неэквивалентные параболические разбиения, у которых $P^{\text{re}}=P_{1/\lambda}^{\text{re}}=P_\lambda^{\text{re}}$. Такую классификацию дает следующая теорема.

Теорема 3. 1).*Если P — параболическое разбиение и $P^{\text{re}}=P_\lambda^{\text{re}}$, то P эквивалентно P_r для некоторого $r\in[1, k/2]$. 2). Пусть $r, r\in[1, k/2]$ и $r=r'$. Тогда P_r* и *$P_{r'}$ неэквивалентны.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть P – параболическое разбиение, $P^{\text{re}}=P_\lambda^{\text{re}}$, $\varphi=n\alpha_1+m\alpha_2\in$ $\in P\bigcap\Delta_+^{\text{im}}(k)$, $\psi=p\,\alpha_1+q\alpha_2\in\Delta_+^{\text{im}}(k)$, причем $q/p\geq m/n$. Тогда $\psi\in P$.*

Доказательство. Поскольку $P^{\text{re}}=P_\lambda^{\text{re}}$, то $\alpha_2\in P$ и $-\alpha_1\in P$. Далее, из неравенства $q/p\geq m/n$ следует $\psi\in\mathbb{Z}_+\varphi+\mathbb{Z}_+\alpha_2-\mathbb{Z}_+\alpha_1$. Учитывая замкнутость P, получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Пусть P — некоторое параболическое разбиение и $P^{\text{re}}=P_\lambda^{\text{re}}$. Тогда согласно лемме 4 $P=P_r$ для некоторого $r\in$ $\in[1/\lambda, \lambda]$. Но исходя из действия группы $\tilde{W}$, легко видеть, что P_r эквивалентно некоторому $P_{r'}$, где $r'\in[1, k/2]$, причем если $r', r''\in[1, k/2]$, то $P_{r'}$ и $P_{r''}$ неэквивалентны. Теорема доказана.

4. Представления, соответствующие параболическим разбиениям. Пусть P — некоторое параболическое разбиение и $L_k=H\oplus\sum_{\varphi\in\Delta}L_\varphi$ — картановское разложение алгебры L_k. Обозначим $L_{\pm P}=\sum_{\varphi\in\pm p}L_\varphi$. Тогда L_k есть прямая сумма подалгебр: $L_k=L_{-p}\oplus H\oplus L_p$. L_k-модуль V будем называть весовым, если $V = \oplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$, где $V_\lambda = \{ v \in V \mid h_i v = \lambda(h_i)v, i = 1, 2 \}$. Ненулевой элемент $v \in V_\lambda$ называется P - примитивным элементом веса λ, если $L_p v = 0$. Заметим, что в случае $P = \Delta_+(\pi_k)$ мы получаем известное определение примитивного элемента.

Построим универсальный L_k - модуль, порожденный P - примитивным элементом веса λ. Определим на поле $\mathbb{C}$ структуру $L_p \oplus H$ - модуля, где $(a + h)1 = \lambda(h)1$ для всех $a \in L_p$, $h \in H$. Пусть $V(D)$ обозначает универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли D. Положим $M^k(\lambda, P) = U(L_k) \otimes_{U(L_p \oplus H)} \mathbb{C}$.

Предложение 1. 1) $M^k(\lambda, P) = \sum_{\mu \in H^*} M^k(\lambda, P)_\mu$;

2) $M^k(\lambda, P)$ *— свободный* $U(L_{-P})$ *- модуль, порожденный* P *- примитивным элементом* $1 \otimes 1$;

3) $M^k(\lambda, P)$ *имеет единственный максимальный* L_k *- подмодуль* N;

4) *Пусть* V *— некоторый весовой* L_k *- модуль, порожденный* P *- примитивным элементом* v *веса* λ*; тогда существует единственный сюрьективный гомоморфизм* $f: M^k(\lambda, P) \to V$ *такой, что* $f(1 \otimes 1) = v$.

Доказательство предложения стандартно и проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичных утверждений для модулей Верма [4].

Обозначим $L^k(\lambda, P) = M^k(\lambda, P)/N$. Тогда из п.4 предложения получаем такое следствие.

Следствие. *Если* V *— некоторый неприводимый* L_k *- модуль, содержащий* P *— примитивный элемент веса* λ *то* $V \cong L^k(\lambda, P)$.

Предложение 2. *Пусть* $\lambda, \lambda' \in H^*$. *Любой ненулевой элемент пространства* $\mathrm{Hom}_{L_k}(M^k(\lambda, P), M^k(\lambda', P))$ *инъективен.*

Доказательство. Рассмотрим ненулевой L_k - гомоморфизм $f: M^k(\lambda, P) \to M^k(\lambda', P)$. Пусть $M^k(\lambda, P)$ (соответственно $M^k(\lambda', P)$) порожден P - примитивным элементом $v \in M^k(\lambda, P)_\lambda$ (соответственно $v' \in M^k(\lambda', P)_{\lambda'}$). Тогда $f(v) \in M^k(\lambda', P)_\lambda$ и, значит, $f(v) = u'v'$ для некоторого $0 \neq u' \in U(L_{-P})$. Предположим теперь, что существует $0 \neq v'' \in M^k(\lambda, P)$ такой, что $f:(v'') = 0$. Но, $v'' = uv$ для некоторого $u \in U(L_{-P})$. Тогда $f(v'') = uf(v) = uu'v' = 0$. Следовательно, $uu' = 0$ в силу п. 2 предложения 1. Значит, $u = 0$ и $v'' = 0$, что влечет инъективность отображения f. Предложение доказано.

1. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. — М.:Мир, 1972. — 331 с.
2. *Futorny V.M.* Parabolic partitions of root systems and corresponding representations of the affine Lie algebras // Root systems, representations and geometries . – Kiev, 1990. – P. 29 – 39. – (Prepr. / Acad. Sci. Ukr. Inst. Math. ; 90. 8).
3. *Futorny V.M.* On imaginary Verma modules over the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. – Oslo, 1991. – 13p. – (Prepr. / Univ. Oslo; 9).
4. *Kac V.G.* Infinite dimensional Lie algebras. – Boston: Birkhäuser, 1983.
5. *Овсиенко С.А.* Квадратичные формы в теории представлений: Дис.…канд. физ. - мат. наук. – Киев, 1978. – 128 с.

Получено 30.10.91