УДК 512.64

Б. З. Шаваровський, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

ПРО РОЗКЛАДНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ З КОЕФІЦІЄНТАМИ КВАЗІПРОСТОЇ СТРУКТУРИ

Досліджується розкладність на регулярні множники матричних многочленів з комутуючими коефіцієнтами квазіпростої структури та розв'язність відповідних матричних многочленних односторонніх рівнянь.

Исследуется разложимость на регулярные множители матричных многочленов с коммутирующими коэффициентами квазипростой структуры и разрешимость соответствующих матричных многочленных односторонних уравнений.

В роботі [1] побудована теорія, яка дала можливість розв'язати проблему виділення регулярного множника з неособливого матричного многочлена. Однак для окремих класів матричних многочленів розроблена загальна теорія є занадто громіздкою і мало придатною для практичного користування. До того ж в багатьох часткових випадках виникають додаткові деталі і питання, на які немає відповіді. Тому виникає необхідність встановити умови розкладності матричних многочленів для певних класів за їх зовнішними досить наглядними ознаками.

Нехай $\mathbb{C}_n$ — кільце $n \times n$–матриць над полем $\mathbb{C}$. Розглянемо многочлен

$$A(x) = Ex^s + A_1x^{s-1} + \ldots + A_s \tag{1}$$

над $\mathbb{C}_n$ і відповідні йому многочленні матричні односторонні рівняння

$$X^s + X^{s-1}A_1 + \ldots + A_s = 0, \tag{2}$$

$$X^s + A_1X^{s-1} + \ldots + A_s = 0. \tag{3}$$

Будемо припускати, що $A_iA_j = A_jA_i$ і всі коефіцієнти мають квазіпросту структуру, тобто кожний характеристичний корінь матриці A_i, $i, j = 1,\ldots, s$, з нелінійними елементарними дільниками має рівно 2-у кратність. В даній роботі даються умови розкладності на множники матричного многочлена (1) та умови існування повних наборів розв'язків рівнянь (2) та (3). Надалі потрібна буде така лема.

Лема. *Для матричного многочлена* (1) *існує матриця* $S \in GL(n, \mathbb{C})$ *така, що*

$$SA(x)S^{-1} = \overline{A}_1(x) \oplus \ldots \oplus \overline{A}_k(x) \oplus b_1(x) \oplus \ldots \oplus b_m(x), \tag{4}$$

де $\overline{A}_i(x)$, $i = 1,\ldots, s$, *— верхній трикутний блок порядку 2 з рівними діагональними елементами,* $b_j(x) \in \mathbb{C}[x]$, $j = 1,\ldots, m$, $0 \le k \le n/2$.

Д о в е д е н н я. Якщо всі коефіцієнти A_i мають просту структуру, то вірність леми випливає із леми 1 §17 [2]. Тому припустимо, що деякий коефіцієнт A_t матричного многочлена $A(x)$ має хоч би один квадратичний елементарний дільник. Застосуємо індукцію по n. Легко переконатися у вірності леми для $n = 2$. Робимо індуктивне припущення для $n - 1$. Існує матриця $T \in GL(n, \mathbb{C})$ така, що

$$TA_tT^{-1} = \begin{Vmatrix} J & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix},$$

де J — клітка Жордана порядку 2. Оскільки спектри матриць J і B не перетинаються, то

$$TA(x)T^{-1} = \left\| \begin{matrix} \overline{A}_1(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{matrix} \right\|, \quad \overline{A}_1(x) = \left\| \begin{matrix} a_0(x) & a_1(x) \\ 0 & a_0(x) \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки блок $B(x)$, як матричний многочлен, має попарно комутуючі коефіцієнти і всі вони квазіпростої структури, то в силу припущення індукції перетворенням подібності він зводиться до квазідіагонального вигляду (4). Лема доведена.

Теорема 1. *Степені елементарних дільників матричного многочлена* $A(x)$ *не перевищують* $2s$.

Д о в е д е н н я випливає з леми і того факту, що система елементарних дільників квазідіагональної матриці утворюється об'єднанням системи елементарних дільників діагональних блоків.

Теорема 2. *Матричний многочлен* $A(x)$, *степені елементарних дільників якого не перевищують* 3, *розкладний у добуток унітальних попарно комутуючих множників, степені елементарних дільників яких не перевищують* 2.

Д о в е д е н н я. Досить показати, що кожний діагональний блок порядку 2 матриці (4) розкладається в добуток попарно комутуючих множників вигляду

$$\overline{A}_i(x) = \left\| \begin{matrix} a_0^{(i)}(x) & a_1^{(i)}(x) \\ 0 & a_0^{(i)}(x) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x-\alpha_{i1} & \beta_{i1} \\ 0 & x-\alpha_{i1} \end{matrix} \right\| \ldots \left\| \begin{matrix} x-\alpha_{is} & \beta_{is} \\ 0 & x-\alpha_{is} \end{matrix} \right\|, \; i = 1,\ldots,k..$$

Для цього застосуємо індукцію по s. Для $s = 2$ теорема справедлива, оскільки жоден з блоків $\overline{A}_i(x)$ не може бути нерозкладною матрицею вигляду

$$\left\| \begin{matrix} (x-\alpha)^2 & a(x) \\ 0 & (x-\alpha)^2 \end{matrix} \right\|,$$

де $a(\alpha) \neq 0$ (така матриця має елементарний дільник степеня 4). Розглянемо блок $\overline{A}_i(x)$ степеня s в припущенні, що для $s-1$ теорема справедлива. Нехай α_{i1} — корінь $a_0^{(i)}(x)$. Його кратність, очевидно, не перевищує 3. Позначимо через ν_0 і ν_1 кратності кореня α_{i1} в многочленах $a_0^{(i)}(x)$ і $a_1^{(i)}(x)$ відповідно. Тут можливі такі випадки: 1) $\nu_0 = 3, \nu_1 \geq 3$; 2) $\nu_0 = 2, \nu_1 \geq 1$; 3) $\nu_0 = 1, \nu_1 \geq 0$. У кожному з них дістанемо розклад

$$\overline{A}_i(x) = \left\| \begin{matrix} x-\alpha_{i1} & \beta_{i1} \\ 0 & x-\alpha_{i1} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \overline{a}_0^{(i)}(x) & \overline{a}_1^{(i)}(x) \\ 0 & \overline{a}_0^{(i)}(x) \end{matrix} \right\|.$$

Згідно з індуктивним припущенням одержуємо потрібний розклад для 2×2-матриці $\overline{A}_i(x)$. Теорема доведена.

Теорема 3. *Якщо матричний многочлен* $A(x)$ *має елементарний дільник степеня* $2s$, *взаємно простий з решта його елементарними дільниками, то він нерозкладний на регулярні множники нижчих степенів.*

Д о в е д е н н я. При виконанні умов теореми в прямій сумі (4) існує нерозкладний доданок вигляду

$$\overline{A}_l(x) = \left\| \begin{matrix} (x-\alpha)^s & a(x) \\ 0 & (x-\alpha)^s \end{matrix} \right\|,$$

де $a(\alpha) \neq 0$, причому $|\overline{A}_i(\alpha)| \neq 0$, $b_j(\alpha) \neq 0$, $i \neq l$, $j = 1,\ldots, m$. Згідно з теоремою 3 [3] матриця (4), а значить, і матриця $A(x)$ нерозкладні.

Матричний многочлен називається регулярним, якщо його старший коефіцієнт є оборотною матрицею.

Означення 1. *Матричний многочлен, який перетворенням подібності зводиться до квазідіагонального вигляду з регулярними блоками на головній діагоналі, називається блочно–регулярним.*

Теорема 4. *Матричний многочлен* $A(x)$, *степені* k_i *елементарних дільників якого задовольняють нерівність* $3 < k_i < 2s$, *розкладний в добуток блочно–регулярних множників.*

Д о в е д е н н я. Для доведення досить показати, що кожний із блоків другого порядку матриці (4) розкладний на регулярні множники. Дійсно, серед таких блоків не існує нерозкладних блоків вигляду

$$\left\| \begin{matrix} a_0(x) & a_1(x) \\ 0 & a_0(x) \end{matrix} \right\|,$$

де $a_0(x) = (x - \alpha)^s$, $a_1(\alpha) \neq 0$, бо така матриця має елементарний дільник степеня $2s$. Значить, можливі такі ситуації:

1) многочлен $a_0(x)$ має не менше 2–х коренів;

2) якщо $a_0(x) = (x - \alpha)^s$, то $a_1(\alpha) = 0$.

В кожному із цих випадків існує, як легко переконатися, розклад на регулярні множники. Теорема доведена.

Означення 2. *Набір розв'язків* $B_1, \ldots, B_s$ *рівняння* (2) ((3)) *називається повним, якщо*

$$\prod_{i=1}^{s} \det(Ex - B_i) = \det A(x),$$

причому у випадку рівності $B_{i_1} = \ldots = B_{i_r} = B$ *матричний многочлен* $A(x)$ *ділиться зліва (справа) на* $(Ex - B)^r$.

Теорема 5. *Кожне з рівнянь* (2) *і* (3) *має повний набір попарно комутуючих розв'язків, степені елементарних дільників яких не перевищують* 2, *якщо тільки степені елементарних дільників відповідного матричного многочлена* $A(x)$ *не перевищують* 3.

Д о в е д е н н я випливає з теореми 2 та узагальненої теореми Безу [4].

Теорема 6. *Кожне з рівнянь* (2) *і* (3) *не має розв'язків, якщо тільки відповідний матричний многочлен* $A(x)$ *має елементарний дільник степеня* $2s$, *взаємно простий з рештою його елементарними дільниками.*

Д о в е д е н н я випливає з теореми 3 та узагальненої теореми Безу [4].

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. — К.: Наук. думка, 1981.- 224с.
2. *Супруненко Д. А.* Группы матриц.– М.: Наука, 1972.– 352с.
3. *Петричкович В. М.* Клеточно–треугольная и клеточно–диагональная факторизации клеточно–треугольных и клеточно–диагональных матриц // Мат. заметки.–1985.– **37**, №6.– С.789-796.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1970.–576с.

Одержано 17.06.92