УДК 517.5

Л. Г. Шах, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

# ОБ АППРОКСИМАЦИОННОМ УСЛОВИИ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Для пространства функций $C^\alpha$, имеющих непрерывную дробную производную Маршо порядка $\alpha > 0$ на отрезке $[0, 1]$, и класса функций $H_r[\bar{\varepsilon}] = \{f : E_n(f) \le \varepsilon_n, n \in N, f^{(i)}(1) = 0, j = \overline{0,r}\}$ доказано, что $H_r[\bar{\varepsilon}] \subset C^\alpha$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i i^{2\alpha-1} < \infty$.

Для простору функцій $C^\alpha$, які мають неперервну дробову похідну Маршо порядку $\alpha > 0$ на відрізку $[0, 1]$, та класу функцій $H_r[\bar{\varepsilon}] = \{f : E_n(f) \le \varepsilon_n, n \in N, f^{(i)}(1) = 0, j = \overline{0,r}\}$ доведено, що $H_r[\bar{\varepsilon}] \subset C^\alpha$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i i^{2\alpha-1} < \infty$.

**Введение.** Пусть $I = [0, 1]$; $C = C^0$ — пространство непрерывных функций $f: I \to R^1$; $\|f\| := \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$; $C^r$, $r \in N$,— класс $r$ раз непрерывно дифференцируемых на $I$ функций $f$; $E_n(f) := \inf\limits_{p\in P_n} \|f - p\|$ — величина наилучшего приближения функций $f \in C^0$ многочленами $p \in P_n$; $P_n$ — пространство алгебраических многочленов степени $\le n$, $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_n\}$ — убывающая последовательность положительных чисел;

$$H[\bar{\varepsilon}] = \{f : E_n(f) \le \varepsilon_n, n \in N\}.$$

В работах Е. П. Долженко и Е. А. Севастьянова [1] (для $r = 1$), И. А. Шевчука [2] (для $r > 1$) (см. также M. Hasson [3], T. Xie [4], И. А. Шевчука [5]) показано, что условие

$$\sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i i^{2r-1} < \infty \tag{1}$$

необходимо и достаточно для

$$H[\varepsilon] \subset C^r. \tag{2}$$

Е. П. Долженко высказал предположение, что способ доказательства в [1] позволяет установить аналогичное утверждение для пространства функций, имеющих непрерывную производную дробного порядка $\alpha$. В настоящей работе дается положительный ответ на это предложение.

**1.** Воспользуемся определениями и обозначениями из [6, с. 180].

**Определение 1.** *Пусть* $\alpha > 0$, $\alpha \overline{\in} N$, $r = [\alpha]$, $\beta = \{\alpha\}$, *где* $[\alpha]$ — *целая часть* $\alpha$, $\{\alpha\}$ — *дробная часть* $\alpha$, *а значит,* $0 < \beta < 1$.

1. *Дробной производной Маршо функции* $f \in C^0$ *порядка* $\alpha \in (0, 1)$ *называется выражение*

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(1-x)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{1-x} \frac{f(x) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt, \tag{3}$$

*где* $\Gamma(1 - \alpha)$ — *гамма-функция.*

2. *Дробной производной Маршо функции* $f \in C^r$ *порядка* $\alpha > 1$ *называется выражение*

$$(D^{\alpha} f)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{r}(D^{\beta} f)(x)=\frac{(-1)^{r} f^{(r)}(x)}{\Gamma(1-\beta)(1-x)^{\beta}}+$$

$$+\frac{(-1)^{r}}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{j=0}^{r-1} \frac{f^{(j)}(1)}{(1-x)^{\beta+r-j}} \prod_{j=0}^{r-1}(\beta+j)+\frac{(-1)^{r} \beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_{0}^{1-x} \frac{f^{(r)}(x)-f^{(r)}(x+t)}{t^{1+\beta}} dt. \quad (4)$$

В точке $x=1$ положим

$$(D^{\alpha} f)(1)=\lim_{x \to 1}(D^{\alpha} f)(x), \quad (5)$$

если предел в (5) существует.

Обозначим

$$H_r[\bar{\varepsilon}]=\{f: E_n(f) \leq \varepsilon_n,\, n \in N, f^{(j)}(1)=0,\, j=\overline{0, r}\},\, r+1 \in N;$$

$$C^{\alpha}:=\{f: f \in C^{r}, D^{\alpha} f \in C^{0}, f^{(j)}(1)=0,\, j=\overline{0, r}\}.$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i i^{2\alpha-1}=\infty, \quad (6)$$

*то найдется функция* $f \in H_r[\bar{\varepsilon}]$, *но* $f \,\overline{\in}\, C^{\alpha}, \alpha>0$.

**Теорема 2.** *Если*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i i^{2\alpha-1}<\infty, \quad (6')$$

*то* $H_r[\bar{\varepsilon}] \subset C^{\alpha}$.

**Теорема 3.** *Условие*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i i^{2\alpha-1}<\infty,$$

*необходимо и достаточно для* $H_r[\bar{\varepsilon}] \subset C^{\alpha}$.

***Замечание.*** Производная $D^{\alpha} f$, определенная по формулам (3), (4), называется правой дробной производной. Аналогичные утверждения справедливы и для левой дробной производной.

**2. Доказательство теоремы 1.** Воспользуемся определениями и обозначениями из [2]. Пусть $x \in I$, $m=r+1$, $\tau=\tau(x)$ — какая-нибудь непрерывная и возрастающая функция на $I$ такая, что $\tau(1/n^2)=\varepsilon_n$;

$$T_n(x):=\sin^{2(m+2)}\left(\left[\frac{n}{m+2}\right] \arcsin \sqrt{x}\right)$$

— алгебраический многочлен степени $\leq n$,

$$\beta(x):=\sum_{i=1}^{\infty} i^{-3} \varepsilon_i T_i(x),$$

$$P_n(x):=\sum_{i=1}^{n} i^{-3} \varepsilon_i T_i(x)$$

— алгебраический многочлен степени $\leq n$;

$$F(x)=\frac{1}{(m-1)!} \int_{x}^{1} u^{-m-2} x \beta(u)(x-u)^{m-1} du.$$

В [2] показано, что $F \in H[\bar{\varepsilon}]$. Поскольку, очевидно, $F^{(j)}(1) = 0$ при всех $j = \overline{0,r}$, то $F \in H_r[\bar{\varepsilon}]$. Пусть $F \in C^r$. Докажем, что $F \bar{\in} C^\alpha$. Предположим от противного, что функция $F \in C^\alpha$. Тогда из (4) следует

$$(D^\alpha F)(0) = \frac{(-1)^r F^{(r)}(0)}{\Gamma(1-\beta)} + \frac{(-1)^{r+1}\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{F^{(r)}(t) - F^{(r)}(0)}{t^{1+\beta}} dt :=$$

$$:= (-1)^{r+1}\left( L + \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 \frac{F^{(r)}(t) - F^{(r)}(0)}{t^{1+\beta}} dt \right).$$

Поскольку (см. [2], (2.13))

$$F^{(r)}(t) - F^{(r)}(0) \geq (r+1)t \int_t^1 \beta(u)\, u^{-r-3}\, du,$$

то для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_\varepsilon^1 \frac{F^{(r)}(t) - F^{(r)}(0)}{t^{1+\beta}} dt \geq \frac{\beta(r+1)}{\Gamma(1-\beta)} \int_\varepsilon^1 \frac{\int_t^1 \beta(u)\, u^{-r-3}\, du}{t^{1+\beta}}\, dt =$$

$$= \frac{\beta(r+1)}{\Gamma(1-\beta)\cdot(1-\beta)} \int_\varepsilon^1 \frac{\beta(u)}{u^{\alpha+2}} \left(1 - \frac{\varepsilon^{1-\beta}}{u^{1-\beta}}\right) du \geq$$

$$\geq \frac{\beta(r+1)}{\Gamma(1-\beta)\cdot(1-\beta)} \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\beta(u)}{u^{\alpha+2}} \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\beta}\right) du := c(r,\beta) \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\beta(u)}{u^{\alpha+2}}\, du.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и неравенства $\beta(x) > c\, x\, \tau(x)$, $c = c(r)$ (см. [2], лемма 1) имеем

$$(-1)^{r+1} (D^\alpha F)(0) - L \geq c(r,\beta) \int_0^1 \frac{\beta(u)}{u^{\alpha+2}}\, du \geq c(r,\beta) \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i\, i^{2\alpha-1} = \infty,$$

что противоречит предположению $F \in C^\alpha$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2, по-видимому, известна, во всяком случае ее можно доказать стандартным способом — разложением функции в телескопический ряд Бернштейна и применением аналога неравенства Маркова

$$\| D^\alpha P_n \| < C\, n^{2\alpha} \| P_n \|, C = C(\alpha) = \mathrm{const}, \tag{7}$$

в котором $P_n$ — алгебраический многочлен степени $\leq n$ такой, что $P_n(1) = P_n'(1) = \ldots = P_n^{(r)}(1)$.

Приведем краткое доказательство неравенства (7). Согласно (4) имеем

$$(D^\alpha P_n)(x) = \frac{(-1)^r P_n^{(r)}(x)}{\Gamma(1-\beta)\cdot(1-x)^\beta} + \frac{(-1)^r \beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_x^1 \frac{P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(t)}{(t-x)^{1+\beta}}\, dt.$$

Воспользуемся классическим неравенством Маркова $\| P_n^{(r)} \| \leq n^{2r} \| P_n \| / 2^r$, положим $h = 1/n^2$, $M = \| P_n \|$ и для $x \in [0, 1-h]$ получим

$$\left|(D^\alpha P_n)(x)\right| \leq \left|\frac{P_n^{(r)}(x)}{\Gamma(1-\beta)(1-x)^\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_x^1 \frac{P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(t)}{(t-x)^{1+\beta}}\, dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(1)}{\Gamma(1-\beta)(1-x)^\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_{x+h}^1 \left(P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(t)\right) \frac{dt}{(t-x)^{1+\beta}}\right| +$$

$$+ \left|\frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_x^{x+h} \frac{P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(t)}{t-x} \frac{dt}{(t-x)^\beta}\right| \leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left|\frac{P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(1)}{1-x}\right|^\beta \times$$

$$\times \left|P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(1)\right|^{1-\beta} + \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_{x+h}^1 \left|P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(t)\right| \frac{dt}{|t-x|^{1+\beta}} +$$

$$+ \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_x^{x+h} \left|\frac{P_n^{(r)}(x) - P_n^{(r)}(t)}{t-x}\right| \frac{dt}{|t-x|^\beta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{1}{2}\right)^{(r+1)\beta} (n^2)^{(r+1)\beta} M^\beta \left(\frac{1}{2}\right)^{r(1-\beta)} (n^2)^{r(1-\beta)} M^{1-\beta} +$$

$$+ \frac{2}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1} (n^2)^{\beta+r} M + \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{1}{2}\right)^r M n^{2r} \cdot n^{2\beta} \frac{1}{1-\beta} =:$$

$$=: C n^{2\alpha} M, \;\; C = C(\alpha).$$

Аналогично для $x \in [1-h, 1]$. Неравенство (7) доказано.


1. *Долженко Е. П., Севастьянов Е. А.* О зависимости свойств функций от скорости их приближения многочленами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978.—**42**, №2.— С. 270–304.
2. *Shevchuk I. A.* On the sharpness of an approximation criterion of smoothness for functions a segment //Approximation and function spaces Banach Center publ.— Warsaw: PWN, 1989.— **22**.— P. 401–411.
3. *Hasson M.* The sharpness of Timan's theorem on differentiable functions //J. Approxim. Theory.— 1982.— **35**, №3.— P. 137–144.
4. *Xie T.* On two problems of Hasson // Ibid.— 1985.— **1**, №2.— P. 264–274.
5. *Шевчук И. А.* К равномерному приближению функций на отрезке // Мат. заметки.— 1986.— **40**, 1.— С. 36–48.
6. *Самко С.Г., Килбас А. А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.



Получено 22.11.91