УДК 517.9

Б. В. Базалий, д-р физ.-мат. наук, **А. Ф. Тедеев**, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

С помощью энергетических оценок изучено поведение решений задачи Дирихле и задачи Стефана при неограниченном возрастании времени для полулинейного уравнения $u_t - u_{xx} + u^\beta = 0$, $\beta \in (0,1)$, в случае одной геометрической переменной.

За допомогою енергетичних оцінок вивчено поведінку розв язків задачі Діріхле та задачі Стефана при нескінченному зростанні часу для напівлінійного рівняння $u_t - u_{xx} + u^\beta = 0$, $\beta \in (0,1)$, у випадку однієї геометричної змінної.

В работе изучается поведение решений нелинейных граничных задач для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени. Нелинейность задач связана как с нелинейностью уравнения, так и с наличием свободных (неизвестных) границ. В первой части работы устанавливаются оценки сверху и снизу стремления к стационарному решению задачи Дирихле для полулинейного уравнения вида $u_t - u_{xx} + u^\beta = 0$, $x \in R^1$, с неоднородным граничным условием на фиксированной границе интервала, где рассматривается решение. Во второй части устанавливается экспоненциальное стремление к стационарному решению задачи Стефана для аналогичного уравнения в случае одной геометрической переменной. Интерес к исследованию первой задачи связан с тем, что в случае $\beta \in (0, 1)$ решение задачи Коши для указанного уравнения с финитным начальным условием локализовано в пространстве и за конечное время стабилизируется к тривиальному решению [1]. Мы показываем что для задач Дирихле с неоднородным постоянным граничным условием на фиксированной части границы и финитным начальным условием разность между решением начально-краевой задачи и стационарным решением имеет сверху и снизу экспоненциальную оценку. В случае задачи Стефана экспоненциальное стремление начально–краевой задачи к стационарному решению в фиксированной области было изучено ранее в [2] методом, в основном опиравшимся на теорему сравнения. Здесь, как нам кажется, предлагается более простой энергетический метод получения соответствующих оценок.

1. *Задача Дирихле для полулинейного параболического уравнения.* Для уравнения с одной геометрической переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^\beta = 0, \quad x \in R^1_+, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $\beta \in (0, 1)$, рассмотрим начально–краевую задачу

$$u(0, t) = m = \text{const} > 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{3}$$

с финитной функцией $u_0(x)$, так что $u_0(x) = 0$ при $x \geq l_0$. Отметим, что нас интересуют неотрицательные решения $u(x, t)$ и что задача (1) – (3) — это задача со свободной границей $x = l(t)$, $l(t) = \sup\{x: u(x,t) > 0\}$, $l(0) = l_0$. Стационарное решение задачи (1), (2) имеет вид

$$w(x) = \begin{cases} c_\beta (l - x)^{2/(1-\beta)}, & x \in [0, l], \\ 0, & x > l, \end{cases} \tag{4}$$

$$c_\beta = \left[(1-\beta)/\sqrt{2(1+\beta)}\right]^{2/(1-\beta)}, \; l = \left(mc_\beta^{-1}\right)^{(1-\beta)/2}.$$

Если в определении функции $w(x)$ положить $l = \bar{l}$ столь большим, чтобы $w(x) \geq u_0(x)$ при $x \geq 0$, то теорема сравнения показывает, что носитель решения задачи (1) – (3) для всех $t > 0$ лежит в интервале $[0, \bar{l}\,]$. Будем предполагать, что решение задачи (1) – (3) существует для всех $t > 0$, причем

$$\int_0^t \int_0^{\bar{l}} u_t^2 dx dt + \int_0^{\bar{l}} u_x^2 dx \leq \text{const}. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$, которая является решением следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[(v+w)^\beta - w^\beta\right] = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$
$$v(0,t) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x). \tag{6}$$

Достаточно просто получить оценку сверху убывания функции $v(x, t)$ при $t \to \infty$. Для этого умножим уравнение в (6) на $v(x, t)$ и проинтегрируем по интервалу $(0, \bar{l}\,)$ с учетом граничных условий. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\bar{l}} v^2 dx + \int_0^{\bar{l}} v_x^2 dx + \int_0^{\bar{l}} \left[(v+w)^\beta - w^\beta\right] v dx = 0. \tag{7}$$

Из неравенства $(a^\beta - b^\beta)(a-b) \geq c(\beta)(a+b)^{-1+\beta}(a-b)^2$ для неотрицательных a и b следует оценка

$$[(v+w)^\beta - w^\beta]v \geq c(\beta) v^2 (v+2w)^{-1+\beta}.$$

Для функции $u(x, t) = v + w$ имеем оценку сверху $|u(x,t)| \leq M = \max(m, \max\limits_x u_0(x))$, так что $(v+2w)^{1-\beta} \leq (2M)^{1-\beta}$ и, следовательно,

$$[(v+w)^\beta - w^\beta]v \geq c_1(\beta) v^2.$$

Теперь из (7), используя только лишь знак $\int_0^{\bar{l}} v_x^2 dx$, получаем

$$\frac{dE}{dt} \leq -c_2(\beta)E, \quad E(t) = \int_0^{\bar{l}} v^2(x,t)dx, \quad c_2(\beta) > 0. \tag{8}$$

Из решения дифференциального неравенства (8) находим

$$E(t) \leq E(0)\exp(-c_2(\beta)t). \tag{9}$$

Замечание 1. Если уравнение (6) умножить на $|v|^{p-1}v$ и провести выкладки, аналогичные приведенным выше, то получим неравенство

$$\|v\|_{L_{p+1}} \leq \|v_0\|_{L_{p+1}} e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \text{const} > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $p \to \infty$ с учетом непрерывности функции $v(x, t)$, находим

$$\sup_x |v(x,t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Пусть $v(x, 0) \leq 0$, тогда из принципа максимума получаем $v(x, t) \leq 0$. В этом случае покажем, что наряду с оценкой (9) для $E(t)$ имеется оценка снизу такого же типа.

Теорема 1. *Пусть* $v(x, t) \leq 0$ *и не обращается в нуль тождественно. Существуют положительные постоянные* N, k *такие, что*

$$E(t) \geq Ne^{-kt}. \tag{10}$$

Доказательство. Умножим уравнение в (6) на $v_t(x,t)$ и проинтегрируем по промежутку $(0, \bar{l})$. После интегрирования по частям получаем

$$\int_0^{\bar{l}} v_t^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{\bar{l}} v_x^2 dx + \frac{d}{dt}\int_0^{\bar{l}}\left[\frac{(v+w)^{\beta+1}}{\beta+1} - w^\beta v\right]dx = 0. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$I(t) = \int_0^{\bar{l}}\left\{v_x^2 + \left[(v+w)^\beta v - w^\beta v\right]\right\}dx = \int_0^{\bar{l}} v_x^2 dx + \int_0^{\bar{l}} \varphi(v)dx,$$

$$F(t) = \int_0^{\bar{l}}\left\{\frac{1}{2}v_x^2 + \left[\frac{(v+w)^{\beta+1}}{\beta+1} - w^\beta v - \frac{w^{\beta+1}}{\beta+1}\right]\right\}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{l}} v_x^2 dx + \int_0^{\bar{l}} \psi(v)dx.$$

Тогда соотношения (6), (11) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} = -I(t), \quad \frac{dF}{dt} = -\int_0^{\bar{l}} v_t^2 dx. \tag{12}$$

По неравенству Гельдера

$$-\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} = -\int_0^{\bar{l}} v v_t dx \leq \left(\int_0^{\bar{l}} v^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\bar{l}} v_t^2 dx\right)^{1/2},$$

что можно записать, используя первое соотношение в (12), в виде

$$\int_0^{\bar{l}} v_t^2 dx \geq E^{-1}\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}\right)^2 = E^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{dE}{dt}\right)I(t).$$

Теперь из второго соотношения в (12) имеем

$$E\frac{dF}{dt} \leq \frac{1}{2}\frac{dE}{dt}I(t). \tag{13}$$

Покажем теперь, что при сделанных предположениях $I(t) \geq 2F(t)$. Действительно, пусть

$$\Phi(v) = 2\psi(v) - \varphi(v) = \frac{2(v+w)^{\beta+1}}{\beta+1} - w^\beta v - 2\frac{w^{\beta+1}}{\beta+1} - (v+w)^\beta v.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$. Заметим, что величина $v+w = u(x, t)$ неотрицательна. Следовательно, при отрицательных $v(x, t)$ имеем $\Phi(v) \leq 0$ и, таким образом, выполняется неравенство $I(t) \geq 2F(t)$. Но тогда, учитывая отрицательность dE/dt, неравенство (13) можно продолжить и получить неравенство

$$E\frac{dF}{dt} \le F\frac{dE}{dt},$$

откуда после интегрирования имеем $F(t) \le cE(t)$. Оценка $I(t) \le c_1 F(t)$ очевидна, но тогда из первого соотношения в (12) получим

$$\frac{dE}{dt} \ge -c_2 F(t) \ge -c_3 E(t).$$

Интегрируя это неравенство, находим $E(t) \ge c_4 e^{-c_3 t}$, что и требовалось доказать.

Замечание 2. При $v(x, 0) \ge 0$ оценка вида (10), как показывает следующее рассуждение, неверна. Пусть $v(x, 0) = 0$ при $x \in (0, r)$, где r намного больше l, $v(x, 0) > 0$ при $x > r$ и финитна, причем $\max v(x, 0)$ достаточно мало. При этих предположениях с помощью теоремы сравнения можно показать, что $v(x, t) \equiv 0$ при $x \in (0, l)$ и совпадает с решением задачи Коши на (l, ∞), причем носитель этого решения принадлежит, например, $(l + 1, \infty)$ при достаточно большом r. Известно, что решение указанной задачи Коши стабилизируется к нулю за конечное время, что и оправдывает наше замечание.

2. *Задача Стефана для полулинейного параболического уравнения.* В области $G = \{(x,t)\colon\ x > 0,\ t > 0\}$ требуется отыскать кривые $\gamma_1 : x = r(t)$, $\gamma_2 : x = s(t)$, выделяющие из G подобласти G_i, $i = 1, 2, 3$, и функцию $u(x, t)$, определенную в G, по условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^\beta = 0 \quad \text{в} \quad G_1 \cup G_2 \cup G_3,$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ u(0, t) = m = \text{const} > 1, \tag{14}$$

$$u(r(t), t) = 1, \quad \lambda\frac{dr}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_- - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ \quad \text{на } x = r(t),\ \lambda = \text{const} > 0,$$

$$G_1 = \{(x,t)\colon 0 < x < r(t), t > 0\},\ G_2 = \{(x,t)\colon r(t) < x < s(t), t > 0\},\ G_3 = G/(G_1 \cup G_2),$$

где $u_0(x)$ — финитная функция, $(\partial u/\partial x)_+, (\partial u/\partial x)_-$ — предельные значения производных со стороны больших и меньших значений $u(x,t)$ в $x = r(t)$, $u > 1$ в G_1, $u < 1$ в $G_2 \cup G_3$, $s(t) = \sup\{x\colon u(x,t) > 0\}$, $\beta \in (0,1)$. Будем предполагать, что данные задачи (14) таковы, что существует классическое решение в том смысле, что все соотношения в (14) выполняются в обычном смысле. С другой стороны, как известно [3], классическое решение является обобщенным решением следующей задачи:

$$\frac{\partial e(u)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^\beta = 0 \quad \text{в } G,\ \ u(x,0) \doteq u_0(x),\ \ u(0,t) = m, \tag{15}$$

где функция $e(u)$ определяется следующим образом:

$$e(u) = \begin{cases} u - 1 & \text{при} \quad u > 1, \\ u - 1 - \lambda & \text{при} \quad u < 1. \end{cases}$$

Такая форма записи задачи со свободными границами позволяет в некоторых случаях проводить эвристические рассуждения, приводящие к результатам, полученным в этой работе.

Сначала мы покажем, что решение задачи (14) имеет равномерную по оценку носителя решения. С этой целью используем лемму сравнения следующего вида.

Лемма. *Пусть в области G существуют решения задачи Стефана $(r_1(t), s_1(t), u_1(x,t))$ и $(r_2(t), s_2(t), u_2(x,t))$, удовлетворяющие условиям* (14) *(за исключением граничного условия для $u_2(x, t)$ при $x = 0$). Пусть*

$$u_2(x,0) > u_1(x,0) \quad \textit{при} \qquad x \le r_1(t), x \ge r_2(t),$$
$$u_2(0,t) > u_1(0,t) \quad \textit{при всех} \quad t,$$

и существует такое t_0, что $r_1(t) \le r_2(t)$ при $t \in (0, t_0)$. Тогда $r_1(t) \le r_2(t)$ для всех t.

Для доказательства леммы достаточно предположить, что множество $\{t\colon t > t_0, r_1(t) > r_2(t)\}$ не пусто, и применить строгий принцип максимума.

На основании этой леммы в качестве функции сравнения возьмем функцию $u_2(x, t)$ вида (4) с $l = \left(Mc_\beta^{-1}\right)^{(2-\beta)/2}$, где число M настолько велико, что выполнены неравенства

$$m < M, \quad u_0(x) < w(x).$$

Указанная функция $w(x)$ является стационарным решением задачи Стефана и, следовательно, $r(t) \le r_2 = \text{const}$, где r_2 находится из условия $w(r_2) = 1$. Имея эту оценку, нетрудно получить оценку сверху для $s(t)$, равномерную по t. Отсюда следует, что носитель функции $u(x,t)$ ограничен единой постоянной L при всех t.

Задача (14) имеет стационарное решение, совпадающее с функцией $w(x)$ из (4), при этом равенство $w(x) = 1$ определяет свободную границу $r_0 = l - c_\beta^{(\beta-1)/2} = \text{const}$.

Введем функцию $v(x, t) = u(x, t) - w(x)$. Отметим, что функция $w(x)$ на всем промежутке $(0, L)$ удовлетворяет уравнению в (14). Относительно функции $v(x,t)$ из (15) получим следующую задачу:

$$\frac{\partial e(v+w)}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (v+w)^\beta - w^\beta = 0 \quad \text{в} \quad (0, L) \times (0, T),$$
$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0. \tag{16}$$

Теорема 2. *Существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что*

$$\left|r(t) - r_0\right| \le c_1 \exp(-c_2 t), \quad \int_0^L v_x^2 dx \le c_1 t^{-1} \exp(-c_2 t) \quad \forall t > 0.$$

Доказательство. Умножим уравнение в (16) на функцию $v(x, t)$ и проинтегрируем по промежутку $(0, L)$. Этой же операции соответствует сначала интегрирование по области $(0, r(t))$, а затем по области $(r(t), L)$. В результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{r(t)} v^2 dx - \frac{1}{2}\frac{dr}{dt} v^2(r(t), t) - v(r(t), t)(v_x(r(t), t))_+ + \int_0^{r(t)} v_x^2 dx + \int_0^{r(t)} \varphi(v) dx = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{r(t)}^{L} v^2 dx + \frac{1}{2}\frac{dr}{dt} v^2(r(t), t) + v(r(t), t)(v_x(r(t), t))_- + \int_{r(t)}^{L} v_x^2 dx + \int_{r(t)}^{L} \varphi(v) dx = 0.$$

Складывая эти соотношения с учетом соотношений на свободной границе $x = r(t)$ для функции $v(x, t)$, получаем первое энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v^2 dx + \lambda \frac{dr}{dt} v(r(t),t) + \int_0^L v_x^2 dx + \int_0^L \varphi(v) dx = 0. \tag{17}$$

Введем функцию $R(r(t))$ так, чтобы $\dfrac{dr}{dt} v(r(t),t) = \dfrac{dR}{dt}$. Тогда при $r(t) < l$

$$R(r) = r + \frac{1-\beta}{3-\beta} c_\beta (l-r)^{(3-\beta)/(1-\beta)} - r_0 - \frac{1-\beta}{3-\beta} c_\beta (l-r_0)^{(3-\beta)/(1-\beta)}, \tag{18}$$

а при $r(t) \geq l$

$$R(r) = r - r_0;$$

при этом мы воспользовались тем, что $v(r(t), t) = 1 - w(r(t))$. Теперь (17) принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L v^2 dx + \lambda \frac{dR}{dt} + \int_0^L v_x^2 dx + \int_0^L \varphi(v) dx = 0. \tag{19}$$

Интегрируя это выражение по t, имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^L v^2 dx + \int_0^t\int_0^L v_x^2 dx dt + \int_0^t\int_0^L \varphi(v) dx dt = \frac{1}{2}\int_0^L v_0^2 dx - \lambda R(r(t)).$$

Поскольку $r(t) < L$, то правая часть в этом равенстве ограничена некоторой постоянной, не зависящей от t. Таким образом, каждое из слагаемых справа ограничено этой постоянной c_3.

Второе энергетическое равенство получим умножением уравнения в (16) в каждой из фаз ($u > 1$ и $u < 1$) на функцию $v_t(x, t)$, интегрированием по соответствующей области и сложением полученных результатов:

$$\int_0^L v_x^2 dx + \frac{1}{2}\frac{dr}{dt}\left[(v_x^2(r(t),t))_+ - (v_x^2(r(t),t))_-\right] +$$

$$+ \frac{dr}{dt} w_x(r(t))\left[(v_x(r(t),t))_+ - (v_x(r(t),t))_-\right] + \frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2} v_x^2 dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \psi(v) dx = 0. \tag{20}$$

Замечая, что $w_x \leq 0$, используя второе условие на свободной границе $x = r(t)$ в (14) и свойства решения $u \geq 1$ в G_1, $u \leq 1$ в G_2, можно утверждать, что три первых слагаемых слева в (20) неотрицательны и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2} v_x^2 dx + \frac{d}{dt}\int_0^L \psi(v) dx \leq 0. \tag{21}$$

Таким образом, величина

$$M(v) \equiv \frac{1}{2}\int_0^L v_x^2 dx + \int_0^L \psi(v) dx$$

не возрастает с ростом времени. Более того, укажем сейчас и порядок убывания величины $M(v)$. Для этого умножим неравенство (21) на t и проинтегрируем результат по t:

$$t\left\{\frac{1}{2}\int_0^L v_x^2 dx + \int_0^L \psi(v) dx\right\} \leq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^L v_x^2 dx dt + \int_0^t\int_0^L \psi(v) dx dt. \tag{22}$$

Ранее мы показали, что $\psi(v) \le \varphi(v)/2$ при отрицательных v; при положительных v, как нетрудно видеть, $\psi(v) \le \varphi(v)$. Таким образом, $M(v) \le c_3 t^{-1}$. Отсюда и из равенства $v(x,t) = \int_0^x v_x dx$ следует, что

$$\sup_x |v(x,t)| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty, \tag{23}$$

и, следовательно, $|r(t) - r_0| \to 0$ при $t \to \infty$.

Из полученного результата можно заключить, что, начиная с некоторого t_0, $r(t) < l - \delta$, где δ – некоторая положительная постоянная, при всех $t \ge t_0$. Это позволит теперь получить экспоненциальную оценку скорости стабилизации решения задачи Стефана. В самом деле, функцию $R(r(t))$ из (18) можно представить в виде

$$R(r(t)) = \frac{2}{1-\beta} c_\beta [l - \rho(t)]^{\frac{1+\beta}{1-\beta}} (r(t) - r_0)^2, \; \rho(t) \in (0, l-\delta).$$

так что при $r(t) < l - \delta$

$$c_5 (r(t) - r_0)^2 \le R(r(t)) \le c_4 (r(t) - r_0)^2. \tag{24}$$

Далее,

$$1 - w(r(t)) = v(r(t), t) = \int_0^{r(t)} v_x dx.$$

Отсюда

$$|1 - w(r(t))| \le r^{1/2}(t) \left(\int_0^L v_x^2 dx \right)^{1/2}.$$

С другой стороны,

$$1 - w(r(t)) = w(r_0) - w(r(t)) = \frac{2}{1-\beta} c_\beta (l - \tilde{\rho}(t))^{\frac{1+\beta}{1-\beta}} (r_0 - r(t)), \quad \tilde{\rho} \in (0, l-\delta),$$

поэтому $|r_0 - r(t)| \le c_6 |1 - w(r(t))|$. Отсюда и из (24) получаем оценку

$$R(r(t)) \le c_7 \int_0^L v_x^2 dx. \tag{25}$$

Из неравенств (17), (25) и неравенства $\varphi(v) \ge c_8 v^2$ получим

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \int_0^L v^2 dx + \lambda R \right] \le -\int_0^L v_x^2 dx - \lambda R + \lambda c_7 \int_0^L v_x^2 dx - c_8 \int_0^L v^2 dx.$$

Будем пока считать число λ столь малым, что $1 - \lambda c_7 = c_9 > 0$. Тогда с учетом неравенства

$$\int_0^L v_x^2 dx \ge c_{10} \int_0^L v^2 dx$$

всегда можно найти такую положительную постоянную c_{11}, что

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \int_0^L v^2 dx + \lambda R \right] \le -c_{11} \left[\frac{1}{2} \int_0^L v^2 dx + \lambda R \right].$$

Интегрируя это неравенство, получаем оценку

$$\int_0^L v^2 dx + \lambda R \le c_{12} \exp(-c_{11} t), \tag{26}$$

или с учетом первого неравенства в (24)

$$|r(t) - r_0| \le c_{13} \exp(-c_{11} t), \quad \int_0^L v^2 dx \le c_{12} \exp(-c_{11} t). \tag{27}$$

Для того чтобы избавиться в наших рассуждениях от условия малости числа λ, достаточно в условиях задачи сделать замену переменной $t = \gamma\tau$ с достаточно большим γ.

Для доказательства второго утверждения теоремы проинтегрируем неравенство (17) по t в пределах от t_1 до t_2:

$$\frac{1}{2}\int_0^L v^2(x, t_2) dx + \lambda R(t_2) + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L v_x^2 dx dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \varphi(v) dx dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L v^2(x, t_1) dx + \lambda R(t_1) \equiv f(t_1).$$

Вследствие неотрицательности первых двух слагаемых слева имеем

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[v_x^2 dx dt + 2\psi(v) \right] dx dt \le \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left[2\psi(v) - \varphi(v) \right] dx dt + f(t_1).$$

Воспользуемся теперь монотонностью $M(v)$ и положим $t_1 = t$, $t_2 = 2t$. Тогда

$$t\int_0^L \left[v_x^2(x, 2t) + 2\psi(v(x, 2t)) \right] dx \le \int_t^{2t}\int_0^L \left[2\psi(v) - \varphi(v) \right] dx dt + f(t). \tag{28}$$

Оценка второго слагаемого справа в (28) дается неравенством (26); что касается оценки первого слагаемого справа, то, например,

$$\int_t^{2t}\int_0^L \psi(v) dx dt = \int_t\int_0 \left[(\tilde{v} + w)^\beta - w^\beta \right] v dx dt \le$$

$$\le c_{14} \int_t^{2t}\int_0^L |v| dx dt \le c_{15} \int_t^{2t} \left(\int_0^L v^2 dx \right)^{1/2} dt \le c_{16} \exp(-c_{17} t),$$

причем мы воспользовались теоремой о среднем, равенством $\psi(0) = 0$ и неравенством в (27). Теперь при $t > 0$ из (28) легко следует

$$\int_0^L v_x^2 dx \le c_{18} t^{-1} \exp(-c_{19} t),$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

1. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.–М.: Наука, 1987.– 477с.
2. *Базалий Б. В., Шелепов В. Ю.* О стабилизации решения задачи Стефана для одного квазилинейного уравнения // Краевые задачи математической физики.–Киев: Наук. думка, 1979.– С. 24–39.
3. *Friedman A.* The Stefan problem in several space variables //Trans. Amer. Math. Soc.–1968.– **132**. – P.51–87.

Получено 01.04.92