УДК 517.947

В. П. Бурский, канд.физ.-мат.наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КРУГЕ

Изучаются эллиптические системы 2×2 второго порядка, которые можно записать в виде одного уравнения с комплексными коэффициентами. В произвольной ограниченной области с гладкой границей получены необходимые и достаточные условия связи следов решения, которые применяются в случае круга. Для не собственно эллиптического уравнения доказаны теоремы существования и единственности решения из соболевского пространства. Показано, в частности, что свойства задачи определяет угол между бихарактеристиками. Если он π-рационален, то нет единственности, если же он π-иррационален, то от степени его приближения π-рациональными числами зависит гладкость решения задачи Дирихле; если же он невеществен, то свойства задачи обычны для эллиптического случая.

Вивчаються еліптичні системи 2×2 другого порядку, які можна записати у вигляді одного рівняння з комплексними коефіцієнтами. У довільній обмеженій області з гладкою межею одержані необхідні та достатні умови зв'язку слідів розв'язку, які застосовуються у випадку кола. Для не власно еліптичного рівняння доведені теореми існування та єдиності розв'язку з соболевського простору. Показано, зокрема, що властивості задачі визначає кут між біхарактеристиками. Якщо він π-раціональний, то єдиності немає, а якщо він π-ірраціональний, то від порядку його наближення π-раціональними числами залежить гладкість розв'язку задачі Діріхле; якщо ж він комплексний, то властивості задачі такі ж, як у власно еліптичному випадку.

В настоящей работе изучаются эллиптические системы 2×2 второго порядка, которые можно записать в виде одного уравнения с комплексными коэффициентами. Рассмотрен случай простых (комплексных) характеристик, имеющих угол наклона. Это соответствует тому, что корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения различны и не равны $\pm i$. Провести исследования задачи Дирихле в круге в других случаях, а также второй и третьей краевых задач не позволяет недостаток места; это можно сделать с помощью доказанных ниже теорем 1, 2 и методики, изложенной в работе [1]. Сопоставление результатов работы [1] и настоящей дает основание полагать, что эллиптическая система с вещественным углом между бихарактеристиками порождающего ее одного уравнения по отношению к граничным задачам имеет все свойства гиперболического уравнения, за исключением разве что на 1/2 увеличенной гладкости решения. При этом системы с невещественным углом имеют привычные свойства эллиптической граничной задачи даже если уравнение не собственно эллиптично.

1. *Теоремы о следах решения.* Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается задача

$$Lu = au''_{x^1x^1} + bu''_{x^1x^2} + cu''_{x^2x^2} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi, \ u'_\nu|_{\partial\Omega} = \chi \tag{2}$$

в соболевском пространстве $H^m(\Omega)$, $m \ge 2$, $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\chi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$, коэффициенты $a, b, c \in \mathbb{C}$ постоянны, ν – единичный вектор внешней нормали.

К уравнению (1) сводятся системы вида

$$\begin{pmatrix} L_1 & -L_2 \\ L_2 & L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{3}$$

где L_1, L_2 – однородные дифференциальные операторы второго порядка с постоянными вещественными коэффициентами. Нетрудно видеть, что и наоборот, уравнение (1) влечет равенство (3) для $L_1 = \operatorname{Re} L$, $L_2 = \operatorname{Im} L$, $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$, так что уравнение (1) можно записать также в виде

$$\langle\nabla,a^1\rangle\langle\nabla,a^2\rangle u=0,$$

где $a^j=\left(a_1^j,a_2^j\right), j=1,2,$— единичные комплексные векторы. (Напомним, что в $\mathbb{C}^2$ $\langle a,b\rangle=a\cdot\overline{b}=a_1\overline{b}_1+a_2\overline{b}_2$.)

Будем считать уравнение (1) эллиптическим, т.е. $l(\xi)=a\xi_1^2+b\xi_1\xi_2+c\xi_2^2\neq 0$ при $\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Это, в частности, означает, что для каждого $j=1,2$ векторы $\operatorname{Re}a^j$ и $\operatorname{Im}a^j$ линейно независимы. Следующие теоремы задают условие связи следов (2) решения уравнения (1).

Теорема 1. *Для того чтобы задача* (1), (2) *имела решение в пространстве* $H^m(\Omega)$, *необходимо, чтобы*

$$P=-l(\nu(x))\psi(x)\in H^{m-1/2}(\partial\Omega),$$

$$C=l(\nu)\chi(x)=\left[b(\nu_1^2-\nu_2^2)-2(a-c)\nu_1\nu_2\right]\psi'_s+ \tag{4}$$
$$+k\left[(a-c)(\nu_1^2-\nu_2^2)+2b\nu_1\nu_2\right]\psi\in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$$

и, кроме того,

$$\forall\xi\in\Lambda\ \int\limits_{\partial\Omega}\left[P(x(s))(-i\langle\nu,\overline{\xi}\rangle)+C(x(s))\right]\exp(-i\langle x,\overline{\xi}\rangle)ds=0, \tag{5}$$

где s – натуральный параметр, возрастающий в направлении вектора $\tau=(-\nu_2,\nu_1)$, $\Lambda=\{\xi\in\mathbb{C}^2\mid l(\xi)=0\}$, k *– кривизна кривой* $\partial\Omega$.

Доказательство. Запишем для оператора L формулу Грина для $u,v\in H^2(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega Lu\cdot\overline{v}dx-\int\limits_\Omega u\cdot\overline{L^+v}\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\left[L_{(0)}u\cdot\overline{v}'_\nu-L_{(1)}u\cdot\overline{v}\right]ds_x \tag{6}$$

где $L^+v=\overline{a}v''_{x^1x^1}+bv''_{x^1x^2}+cv''_{x^2x^2}=\langle a^1,\nabla\rangle\langle a^2,\nabla\rangle v$, и подсчитаем выражения для $L_{(0)}u, L_{(1)}u$:

$$\int\limits_\Omega Lu\cdot\overline{v}dx=\int\limits_\Omega\langle\nabla,a^1\rangle\langle\nabla,a^2\rangle u\cdot\overline{v}\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\langle\nu,a^1\rangle\langle\nabla,a^2\rangle u\cdot\overline{v}\,ds_x-$$

$$-\int\limits_\Omega\langle\nabla,a^2\rangle u\cdot\overline{\langle a^1,\nabla\rangle v}\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\langle\nu,a^1\rangle\langle\nabla,a^2\rangle u\cdot\overline{v}-\langle\nu,a^2\rangle u\cdot\overline{\langle a^1,\nabla\rangle v}\right]ds_x+\int\limits_\Omega u\overline{L^+v}dx$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[l(\nu)u\overline{v}'_\nu+l(\nu)u'_\nu\overline{v}+\langle\nu,a^1\rangle\langle\tau,a^2\rangle u'_s\overline{v}-\langle\nu,a^2\rangle\langle\tau,a^1\rangle u\overline{v}'_s\right]ds+\int\limits_\Omega u\overline{L^+v}\,dx.$$

Мы воспользовались тем, что $\nabla\varphi=\nu\varphi'_\nu=\tau\varphi'_s$, поэтому

$$\langle\nu,a^1\rangle\langle\nabla,a^2\rangle u=\langle\nu,a^1\rangle\left[\langle\nu,a^2\rangle u'_\nu+\langle\tau,a^2\rangle u'_s\right]=l(\nu)u'_\nu+\langle\nu,a^1\rangle\langle\tau,a^2\rangle u'_s,$$

$$\langle\nu,a^2\rangle\overline{\langle a^1,\nabla\rangle v}=\langle\nu,a^2\rangle\left[\langle\nu,a^1\rangle v'_\nu+\langle\tau,a^1\rangle\overline{v}'_s\right]=l(\nu)v'_\nu+\langle\nu,a^2\rangle\langle\tau,a^1\rangle\overline{v}'_s.$$

Воспользовавшись тем, что $\int_{\partial\Omega}w'_sds=0$, а также тем, что по формулам Френе $\tau'_s=k\nu$, $\nu'_s==-k\tau$, $k=|\tau'_s|=|\nu'_s|$ – кривизна $\partial\Omega$, получим

$$L_{(0)}u=-l(\nu)u,\ L_{(1)}u=l(\nu)u'_\nu+\left[\langle\nu,a^1\rangle\langle\tau,a^2\rangle+\langle\nu,a^2\rangle\langle\tau,a^1\rangle\right]u'_s+k[l(\nu)-l(\tau)]u=$$
$$=l(\nu)u'_\nu+\left[b(\nu_1^2-\nu_2^2)-2(a-c)\nu_1\nu_2\right]u'_s+k\left[(a-c)(\nu_1^2-\nu_2^2)+2b\nu_1\nu_2\right]u.$$

Подставляя теперь в формулу (6) вместо u решение задачи (1), (2), вместо v функцию $v=\exp\left(i\langle x,\xi\rangle\right)$, являющуюся решением уравнения $L^+v=0$ при $\xi\in$

$\in \Lambda$, а вместо $L_{(0)}u$ и $L_{(1)}u$ их выражения с учетом замены $u'_\nu|_{\partial\Omega} = \chi$, $u|_{\partial\Omega} = \psi$, получаем соотношение (5). Принадлежность $P \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $C \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ очевидна.

Теорема 2. *Пусть функции* $P \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$ *и* $C \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ $(m \geq 2)$ *удовлетворяют соотношению* (5). *Тогда существует единственное решение* $u \in H^m(\Omega)$ *задачи* (1), (2), *граничные данные* ψ, χ *которого связаны с функциями* P *и* C *равенствами* (4).

Доказательство. 1. Поскольку $l(\nu) \neq 0$, то из равенств (4) однозначно находим сначала функцию $\psi \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, а затем функцию $\chi \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$. Далее по этим функциям построим функцию $w(x) \in H^m(\Omega)$ с граничными данными ψ и χ: $w|_{\partial\Omega} = \psi$, $w'_\nu|_{\partial\Omega} = \chi$. Это можно сделать стандартным образом (см., например, [2]).

Будем теперь искать решение $U \in H^m(\Omega)$ задачи

$$LU = -Lw, \ U|_{\partial\Omega} = 0, \ U'_\nu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

2. Сначала решим уравнение

$$L_0 U_0 = f\,(= -Lw) \tag{8}$$

с минимальным оператором L_0 в $L_2(\Omega)$, порожденным операцией L. Напомним, что минимальным оператором L_0 с областью определения $\mathfrak{D}(L_0)$ называется замыкание оператора L, первоначально определенного на $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2$; при этом уравнение (8) разрешимо для тех $f \in L_2(\Omega)$, для которых

$$\int_\Omega f(x)\overline{v}(x)dx = 0 \ \ \forall\, v \in L_2(\Omega), L^+v = 0. \tag{9}$$

Это следует из того, что в силу оценки $\|u\|_{L_2(\Omega)} + C\|Lu\|_{L_2(\Omega)}$ $\forall u \in C_0^\infty(\Omega)$ (см. [3]) область значений $\operatorname{Im} L_0$ оператора L_0 замкнута, кроме того, как известно, она ортогональна в $L_2(\Omega)$ ядру сопряженного оператора, которым по определению является максимальный оператор $\tilde{L}^+$, так что условие (9) необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (8). При этом, очевидно, решение уравнения (8) единственно.

3. Для проверки выполнения условия (9) подставим в равенство (6) вместо функции u функцию w, а вместо v функцию $\exp(i\langle x,\xi\rangle)$, $\xi \in \Lambda$, принадлежащую ядру $\ker \tilde{L}^+$. При этом функции $P = L_{(0)}w \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $C = L_{(1)}w \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$ в силу условия (5) таковы, что правая часть в равенстве (6) обращается в ноль. Остается равенство

$$\int_\Omega Lwe^{-i\langle x,\overline{\xi}\rangle}dx = 0. \tag{10}$$

4. В силу эллиптичности оператора L^+ область Ω является L^+-выпуклой для носителей ([4], следствие 10.8.2), что (в силу следствий 10.6.10 и 10.5.3) влечет плотность линейных комбинаций экспоненциальных решений $\exp(i\langle x,\xi\rangle)$, $\xi \in \Lambda$ в $\ker \tilde{L}^+$ с нормой пространства $L_2(\Omega)$. Переходя к пределу в равенстве (10), получаем условие (9), которое означает разрешимость уравнения (8).

5. В силу эллиптичности оператора L имеем неравенство $\exists\, C_0 > 0$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$

$C_0|\xi|^2 \le |l(\xi)| \le C_0^{-1}|\xi|^2$, откуда следует эквивалентность нормы графика $\|u\|_L$ и нормы $\|u\|_{H^2(\Omega)}$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$. С учетом того, что область определения $\mathfrak{D}(L_0)$ оператора L_0 есть замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega)$ в норме графика, получаем $\mathfrak{D}(L_0) = \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$. Поэтому найденное решение U уравнения (8) является решением задачи (7), но пока что $U_0 \in \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$.

6. Теперь следует повысить гладкость функции U_0. Проиллюстрируем наш способ доказательства простым примером. Если бы, скажем, $L = \Delta$, то рассматривая, например, задачу Дирихле $\Delta u = f, u|_{\partial\Omega} = 0$ при $f \in H^{m-2}(\Omega)$, мы бы получили $u \in H^m(\Omega)$, и в силу единственности решения $u = U_0$ все доказано. Те же соображения с задачей Дирихле годятся, если L – собственно эллиптичен [5]. Но в общем случае задача Дирихле не накрывает оператор L. Однако, как следует из общей теории [3], для уравнений с постоянными коэффициентами имеется корректная граничная задача, порождающая разрешимое расширение L_B: $\mathfrak{D}(L_B) \to L_2(\Omega)$, имеющее двусторонний обратный $E = L_B^{-1}: L_2(\Omega) \to \mathfrak{D}(L_B)$. Если предположить, что $D^\alpha E = ED^\alpha$, то функция $u = E(f)$ удовлетворяет задаче $Lu = f$, $u \in \mathfrak{D}(L_B)$, которая имеет единственное решение. В силу того, что $\mathfrak{D}(L_0) \subset \mathfrak{D}(L_B)$, и уравнения (8) имеем $u = U_0$. При этом $D^\alpha u = D^\alpha E(f) = E(D^\alpha f) \in$ $\in \mathfrak{D}(L_B) \subset \mathfrak{D}(L_0)$, а так как $u = U_0 \in \mathfrak{D}(L_0) = \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$, то $U_0 \in H^m(\Omega) \cap \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$, что и требовалось.

Осталось найти разрешимое расширение L_B с обратным $E: L_2(\Omega) \to \mathfrak{D}(L_B)$, коммутирующим с D_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. В качестве такого расширения подходит $L|_{E(L_2(\Omega))}$, где E – ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$, порожденный регулярным фундаментальным решением ([4], теорема 10.3.7) и имеющий свойства $LE =$ $= 1_{L_2(\Omega)}$, $EL = 1_{C_0^\infty(\Omega)}$, которые влекут $EL_0 = 1_{\mathfrak{D}(L_0)}$. При этом D_jE – ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$. Тогда на $C^\infty(\overline{\Omega})$ имеем $ED_j Lu = D_j ELu$, а так как в силу L^+-выпуклости для носителей области Ω уравнение $Lu = f$ разрешимо для любой функции $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, то $ED_j = D_j E$ на $C^\infty(\overline{\Omega})$, откуда следует, что $E(H^m(\Omega)) \subset H^m(\Omega)$ и $D^\alpha E = ED^\alpha$, $|\alpha| \le m$ на $H^m(\Omega)$. Теорема доказана.

2. *Условия разрешимости задачи Коши.* Представим полученные в предыдущем пункте условия (5) в удобном виде. Введем векторы $\tilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\tilde{a}^2 =$ $(-\overline{a}_2^2, a_1^2)$ – направляющие векторы бихарактеристик $\Lambda^j = \left\{\lambda \tilde{a}^j \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}$, $j = = 1$, 2, $\left\langle \tilde{a}^j, a^j \right\rangle = 0$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$. Разложим в равенстве (5) функцию $\exp(-ix\cdot\xi)$ при $\xi = \lambda \tilde{a}^j$ в ряд по λ. Коэффициенты ряда будут удовлетворять условиям

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \int\limits_{\partial\Omega} \left[N \cdot P(x(s)) \cdot (\nu(s) \cdot \tilde{a}^j)(x \cdot \tilde{a}^j)^{N-1} + C(x)(x \cdot \tilde{a}^j)^N\right] ds = 0,\ j = 1, 2,$$

складывая которые, получаем

$$\forall\, Q \in \mathbb{C}[z],\ j = 1,2,\ \int\limits_{\partial\Omega} \left[P(x)(\nu \cdot \tilde{a}^j) Q'(x \cdot \tilde{a}^j) + C(x) Q(x \cdot \tilde{a}^j)\right] ds_x = 0. \qquad (11)$$

Это же условие можно было получить из формулы (6) подстановкой $v = Q(x \cdot \tilde{a}^j)$. Доказано следующее утверждение.

Предложение 1. *Условие* (11) *эквивалентно условию* (5), *т.е. необходимо и достаточно для разрешимости задачи* (1), (2).

Пусть λ_1, λ_2 – корни уравнения $l(1, \lambda) = 0$. Углом наклона бихарактеристики, отвечающей корню λ_1, назовем любое решение φ_1 уравнения $\operatorname{tg}\varphi_1 = \lambda_1 \neq \pm i$. Аналогично определяем угол φ_2 через корень λ_2, $\varphi_0 := \varphi_1 - \varphi_2$. Нетрудно показать, что $\sin\varphi_0 = \det(a^1\, a^2)$, где a^1, a^2 – столбцы, $\operatorname{tg}^2\varphi_0 = (b^2 - 4ac)/(a + c)^2$.

Рассмотрим случай круга $\Omega = K = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 < 1\right\}$. В этом случае $\nu(x) = x$, $x \cdot a^j = -\cos(\tau + \varphi_j)$, $x = (\cos\tau, \sin\tau)$, $\tau = s$ – угловая координата. Обозначим через $\tilde{T}_n, Q_n$ полиномы Чебышева: $\tilde{T}_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$, $Q_{n-1}(\cos\alpha) = \sin n\alpha / \sin\alpha$ и введем функции $T_n(\tau) = \tilde{T}_n(\cos(\tau + \varphi_j)) = \tilde{T}_n(-x \cdot \tilde{a}^j), U_n = -(x \cdot \tilde{a}^j)'_\tau \cdot Q_{n-1}(-x \cdot \tilde{a}^j)$. Нетрудно видеть, что система функций $\{T_n, U_n\}_{n=0}^\infty$ ортогональна и полна в каждом пространстве $H^l(K)$, поскольку таковой является система $\{\cos n\tau, \sin n\tau\}$, кроме того $f = \sum_{n=0}^\infty f_n T_n + g_n U_n \in H^l(\partial K)$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_n (1 + n^2)^l (|f_n|^2 + |g_n|^2) < \infty$ (см. [6]).

Подставим в условие (11) разложение функции $P(\tau) = P(x(\tau))$

$$P(\tau) = \frac{1}{2}P_0^T + \sum_{n=1}^\infty \left[P_n^T T_n(\tau) + P_n^U U_n(\tau)\right]$$

и аналогичное разложение функции $C(\tau)$, а в качестве полинома возьмем полином Чебышева $\tilde{T}_n$. Тогда условия (11) запишутся в виде

$$-C_l^T = l\left\{\alpha(l)P_0^T + \sum_{n=1}^l P_n^T\left[-\delta_{ln} + 2\alpha(l - n)\right]\right., \tag{12}$$

$$-\left[\cos l\varphi_0 C_l^T + \sin l\varphi_0 C_l^U\right] = l\left\{\alpha(l)P_0^T + \sum_{n=1}^l P_n^T\left[-\delta_{ln} + 2\alpha(l - n)\right] \times\right.$$
$$\left.\times\left[\cos n\varphi_0 P_n^T + \sin n\varphi_0 P_n^U\right]\right\}, \; l = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Здесь δ_{ln} – символ Кронекера, $\alpha(2l) = 1$, $\alpha(2l+1) = 0$.

3. *Рассмотрим задачу Дирихле в круге*

$$Lu = 0 \text{ в } K, \; u|_{\partial K} = \psi. \tag{14}$$

Пусть $\psi = 0$, тогда $P = 0$. Из условий (12), (13) получаем $C_l^T = 0$, $\sin l\varphi_0 C_l^U = 0$. Поэтому $C(\tau) \equiv 0$ при $\varphi_0/\pi \notin \mathbb{Q}$, и решение однородной задачи (14) имеет вид $u \equiv 0$. Если же $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$, то пара $P = 0$, $C = \sum\limits_k d_k \sin kq(\tau + \varphi_1)$, $\sum\limits_k k^{2m+1}|d_k|^2 < \infty$ порождает по теореме 2 решение однородной задачи (14) $u \in H^m(K)$. Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *При* $\lambda_j \neq \pm i$, $j = 1,2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *задача* (14) *имеет не более одного решения в любом пространстве* $H^m(K)$, $m \geq 2$, *тогда и только тогда, когда число* φ_0/π *иррационально. При выполнении условия* $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$ *в каждом про-*

странстве $H^m(K)$, $m \ge 2$, однородная задача (14) *имеет бесконечное число линейно независимых решений.*

Сформулируем теперь следующее очевидное утверждение.

Предложение 2. *Пусть* $k > 0$. *Неравенство для числа* $\rho \in \mathbb{R}$

$$\exists C_0 > 0, \forall l \in \mathbb{N}, \left|\sin \pi l \rho\right| > C_0 l^{-k+1}$$

эквивалентно неравенству

$$\exists C_1 > 0, \forall p / q \in \mathbb{Q}, |\rho - p / q| > C_1 q^{-k}. \tag{15}$$

Из теоремы Хинчина ([7], теорема 32) следует утверждение.

Предложение 3. *Для любого* $k > 2$ *множество тех* $\rho \in \mathbb{R}$, *для которых не выполнено свойство* (15), *имеет лебегову меру ноль.*

Оба эти предложения, равно как и следующие, понадобятся для доказательства теорем существования решения задачи (14).

Предложение 4. *Пусть* $z(\tau) \in H^{1/2}(\partial K)$ — *нечетная функция и* $y(\tau) = \sin\tau \cdot z(\tau)$, *а оператор* B^+ *действует по правилу*

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos n\tau \xrightarrow{B^+} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} y_k\right)\cos n\tau .$$

Тогда $\forall m \ge 1/2$ *принадлежность* $z \in H^m(\partial K)$ *влечет включение* $B^+ y \in H^m(\partial K)$.

Доказательство. Напомним, что преобразованием Абеля ряда называется формула

$$\sum_{n=0}^{l} \alpha_n \beta_n = \alpha_l \tilde{\beta}_l - \sum_{n=0}^{l-1}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\tilde{\beta}_n, \ \tilde{\beta}_l = \sum_{n=0}^{l} \beta_n .$$

Применим это преобразование к разложению функции $y(\tau)$, где $\alpha_n = \cos n\tau$,

$$y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \cos n\tau = \lim_{l \to \infty}\left(\cos l\tau \sum_{n=0}^{l} y_n\right) -$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} Y_n[\cos(n+1)\tau - \cos n\tau] = 2\sum_{n=0}^{\infty} Y_n \sin(n + \frac{1}{2})\tau \cdot \sin\frac{\tau}{2}.$$

Здесь $Y_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$, $\lim\limits_{l \to \infty} \sum_{n=0}^{l} y_n = y(0) = 0$, так как y непрерывна. Тогда $\cos\tau \cdot z(2\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \sin(2n+1)\tau$, откуда в силу принадлежности $z \in H^m(\partial K)$ получим $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2m}\left|Y_n\right|^2 < \infty$. Поэтому $B^+ y \in H^m(\partial K)$. Наоборот, $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2m}\left|y_n\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2m}\left|Y_n - Y_{n-1}\right|^2 \le C\sum_{n=0}^{\infty}(1+n^2)^m\left|Y_n\right|^2 = \|Y\|^2_{H^m(\partial K)} < \infty$. Легко видеть, что операторы B и $(B^+)^{-1}$ ограничены. Доказательство завершено.

Применим теперь предложение 6 [6] к функции $y^0(\tau) = y(\tau+\pi)$. Очевидно, что $y^0(\tau) = -\sin\tau \cdot z(\tau+\pi)$ с нечетной функцией z. Получим то же утверждение для оператора B^-, действующего по формуле

$$y(\tau) \to y(\tau+\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n \cos n\tau \to \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k y_n\right)\cos n\tau = Y^-(\tau).$$

Отсюда

$$B^+ y + B^- y = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]} 2y_{2k}\right)\cos n\tau \in H^m(\partial K),$$

а также

$$B^+y-B^-y=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]}2y_{2k+1}\right)\cos n\tau\in H^m(\partial K).$$

Поэтому функция $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n/2}2y_{n-2k}\right)\cos n\tau$ также принадлежит пространству $H^m(\partial K)$. Вычитая отсюда $y(\tau)$, получаем следующее утверждение.

Предложение 5. *Пусть* $z\in H^m(\partial K)$, $m\geq 1/2$, – *нечетная функция,* $y(\tau)=$ $=\sin\tau\cdot z(\tau)$ *и* $y=\sum_{n=0}^{\infty}y_n\cos n\tau$ – *разложение в ряд Фурье. Пусть оператор* B *действует по формуле*

$$y\xrightarrow{B}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_n y_0+\sum_{k=1}^{n}y_n(-\delta_{nk}+2\alpha(n-k))\right]\cos n\tau.$$

Тогда $By\in H^m(\partial K)$, *и оператор* B *ограничен на четной части* $H^m(\partial K)$.

Замечание. В предложениях 4 и 5 можно заменить $\cos n\tau$ на $T_n(\tau)$.

Поскольку $P(\tau)=-l(\nu)\psi$, $l(\nu)=\sin(\tau+\varphi_1)\sin(\tau+\varphi_2)$, то из предложения 5 и условия (12) получаем $C^T(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^T\cdot T_k(\tau)\in H^{m-3/2}(\partial K)$, если $\psi\in$ [$H^{m-1/2}(\partial K)$. Поэтому из условия (13) следует

$$\forall l\in\mathbb{N},\ \sin l\varphi_0 C_l^U=g_l,\ \sum_{l=1}^{\infty}l^{2m-3}|g_l|^2<\infty. \qquad (16)$$

Применяя предложение 2, устанавливаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть число* $\rho=\varphi_0/\pi$ *вещественно и таково, что для некоторого* $k\geq 2$ *выполнено неравенство* (15), *и пусть* $\psi\in H^{m-1/2}(\partial K)$, $m\geq k+2$. *Тогда решение задачи* (14) *существует, единственно и принадлежит пространству* $H^{m-k}(K)$. *Если число* ρ *не вещественно, то решение задачи* (14) *существует, единственно и принадлежит пространству* $H^m(K)$.

Выберем теперь последовательность $\varepsilon_n\to+0$. Множество чисел ρ, удовлетворяющих неравенству (15) с $k=2+\varepsilon_n$ обозначим M_n. Пусть $M=\bigcap_n M_n$. В силу предложения 3 это множество полной меры в $\mathbb{R}$. Из равенств (16) следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для почти всех углов* φ_0 *для каждой функции* $\psi\in H^{5/2+\varepsilon}(\partial K)$ *существует единственное решение* $u\in H^2(K)$ *задачи* (14).

1. *Бурский В.П.* Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге // Изв. вузов. Математика.–1987.–№ 2.–С.22–29.
2. *Никольский С.М.* Приближения функций многих переменных и теоремы вложения.– М.: Наука, 1979.– 456 с.
3. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.–132 с.
4. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: В 4-х т.–М.: Мир, 1986. – Т.2.– 456 с.
5. *Лионс Ж.-Л., Мандженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.– М.: Мир, 1971.– 372 с.
6. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.–М.: Мир, 1966.– 352 с.
7. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби.–М.: Наука, 1961.– 112 с.

Получено 01. 04. 92