УДК 517.54

В.В. Горяйнов, д-р физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк),
И. Ба, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

ПОЛУГРУППА КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В СЕБЯ С ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НОРМИРОВКОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Изучаются голоморфные однолистные в верхней полуплоскости функции, которые представляют собой комплексные потенциалы бесконечно глубоких течений над плоским дном с невозмущенным потоком на бесконечности. Выделяется полугруппа таких функций и дается ее инфинитезимальное описание.

Вивчаються голоморфні однолисті у верхній півплощині функції, які є комплексними потенціалами нескінченно глибоких течій над плоским дном з незбуреною течією на нескінченності. Вилучається півгрупа таких функцій і надається її інфінітезимальний опис.

Пусть f – голоморфная однолистная в $U = \{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ функция, удовлетворяющая условиям: $f(U) \subseteq U$ и $f(z) - z \to 0$ при $z \to \infty$ внутри каждой полуплоскости $U_\eta = \{z\colon \operatorname{Im} z > \eta\}$, $\eta > 0$. Тогда функцию f^{-1} можно рассматривать как комплексный потенциал бесконечно глубокого течения над плоским дном, обтекающего препятствие $U \setminus f(U)$. Требуемое поведение функции f на бесконечности, называемое гидродинамической нормировкой, означает невозмущенность потока на бесконечности. Каждая линия тока, образ прямой $\operatorname{Im} z = \text{const}$, должна мало отличаться в окрестности бесконечно удаленной точки от самой прямой, т.е. от линии тока невозмущенного потока.

Изучению класса однолистных в U функций с гидродинамической нормировкой посвящено большое количество работ (см., например, [1–3] и приведенную там библиографию). Большая часть исследований посвящена случаю, когда $U \setminus f(U)$ является ограниченным множеством. В этом случае функция f имеет разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки и теоретико-функциональный смысл гидродинамической нормировки сводится к виду этого разложения $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$, т.е. гидродинамическая нормировка является внутренним условием. С другой стороны, многие вопросы как теории конформного отображения, так и ее приложений приводят к необходимости изучения общего случая, когда гидродинамическая нормировка является существенно граничным условием.

В настоящей работе исследуется вопрос описания класса однолистных в верхней полуплоскости функций, когда гидродинамическая нормировка является существенно граничным условием. При этом используется интегральное представление функций Пика и развитый в [4] метод инфинитезимального описания полугрупп конформных отображений.

1. *Функции Пика с гидродинамической нормировкой.* Голоморфная в U функция f называется функцией Пика, если она имеет неотрицательную мнимую часть в U. Функции Пика возникают в различных задачах анализа и им посвящена обширная литература (см., например, [5, 6]). В той литературе, где они рассматриваются в связи с теорией операторов, их также называют $\mathfrak{R}$-функциями.

Класс Пика образует выпуклый конус в пространстве $\mathcal{H}(U)$ всех голоморфных в U функций. Кроме того, он замкнут относительно операции композиции и, следовательно, образует полугруппу. Как известно, необходимым и достаточным условием принадлежности голоморфной в U функции f классу

Пика является возможность представления ее в виде

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{x - z} - \frac{x}{1 + x^2} \right) d\mu(x), \tag{1}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, а μ – борелевская мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2} d\mu(x) < \infty.$$

Числа α, β и мера μ в формуле (1) однозначно определяются функцией f. Число β является угловой производной функции f в бесконечно удаленной точке (в терминологии Каратеодори [7, с.92]). Легко видеть, что выполнение для f гидродинамической нормировки влечет равенство $\beta = 1$. Кроме того, с учетом известного предельного соотношения

$$\lim_{y \nearrow \infty} y \operatorname{Im}[f(iy) - i\beta y] = \mu(\mathbb{R})$$

естественно выделение подмножества $\mathcal{P}$ функций Пика, допускающих следующее интегральное представление:

$$f(z) = z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} d\mu(x), \tag{2}$$

где μ — конечная борелевская мера на $\mathcal{P}$. Следующий результат показывает, в частности, что функции выделенного класса функций удовлетворяют гидродинамической нормировке.

Лемма 1. *Пусть f – функция Пика. Тогда эквивалентны следующие два утверждения:*

а) $f \in \mathcal{P}$;

б) $f(z) - z \to 0$ *при* $z \to \infty$ *внутри каждой полуплоскости* U_η, $\eta > 0$, *и существует конечный угловой предел*

$$\lim_{z \to \infty} z[f(z) - z] = c;$$

в) *выполняются соотношения*

$$\lim_{y \nearrow \infty} [f(iy) - iy] = 0, \ \sup_{y > 0} y[\operatorname{Im} f(iy) - y] < \infty.$$

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Пусть f имеет представление (2). Поскольку $\mu(E_r) \to 0$ при $r \to \infty$, где $E_r = \mathbb{R} \setminus (-r, r)$, то для любых $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ можно выбрать $r_0 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(E_{r_0}) < \varepsilon\eta / 2$. Далее, выберем M так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(\mathbb{R}) < \varepsilon(M - r_0)/2$. Но тогда при $|z| > M$, $z \in U_\eta$ будем иметь

$$|f(z) - z| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(x)}{|x - z|} = \int_{E_{r_0}} \frac{d\mu(x)}{|x - z|} + \int_{(-r_0, r_0)} \frac{d\mu(x)}{|x - z|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\eta} \mu(E_{r_0}) + \frac{1}{M - r_0} \mu(\mathbb{R}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, f удовлетворяет гидродинамической нормировке.

Допустим теперь, что $\varepsilon > 0$ и $\Delta_\theta = \{z \in U : |\operatorname{Re} z| / (\operatorname{Im} z) < \operatorname{ctg}\theta\}$, $\theta \in (0, \pi/2)$, фиксированы произвольным образом. Выберем $r_1 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(E_{r_1}) < (\varepsilon \sin\theta)/2$. Тогда для $z \in \Delta_\theta$ получаем

$$\left|\mu(\mathbb{R}) + z(f(z) - z)\right| = \left|\mu(\mathbb{R}) + \int_{\mathbb{R}} \frac{z}{x - z} \partial\mu(x)\right| \le$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{|x - z|} \partial\mu(x) \le \frac{\mu(E_{r_1})}{\sin\theta} + \int_{(-r_1, r_1)} \frac{|x|}{|x - z|} \partial\mu(x).$$

Первое слагаемое в последней части неравенства не превышает $\varepsilon > 2$, а второе слагаемое можно сделать меньше $\varepsilon > 2$, выбирая $z \in \Delta_\theta$ достаточно большим по модулю. В результате получаем

$$\lim z[f(z) - z] = -\mu(\mathbb{R}) \tag{3}$$

при $z \to \infty$, $z \in \Delta_\theta$.

Импликация б) $\Rightarrow$ в) очевидна, а в) $\Rightarrow$ а) легко устанавливается, если воспользоваться соответствием между функцией Пика и параметрами в ее интегральном представлении (см., например, [5]). Лемма доказана.

Основным объектом наших исследований будет класс $\mathfrak{S}$, который образует все однолистные функции из $\mathfrak{P}$. Важную роль в наших исследованиях играет неотрицательный функционал $l: \mathfrak{P} \to \mathbb{R}^+$, определенный по формуле $l(f) = \mu(\mathbb{R})$, где μ – мера из интегрального представления (2). Заметим, что в силу соотношения (3) вычисление функционала l на функции f из $\mathfrak{P}$ можно свести к вычислению углового предела. Отметим также, что функционал l не является непрерывным в топологии локально равномерной сходимости. Действительно, пусть f – произвольная функция из $\mathfrak{P}$, для которой $l(f) > 0$. Рассмотрим семейство функций $f_\alpha(z) = f(z + \alpha) - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Из интегрального представления (2) функции f видно, что $f_\alpha \in \mathfrak{P}$ и $l(f_\alpha) = l(f)$ для всех α. С другой стороны, из леммы 1 следует, что $f_\alpha(z) \to z$ при $\alpha \to \infty$, локально равномерно в U. Остается заметить, что значение функционала l на тождественном преобразовании обращается в нуль.

Принципиальным моментом в дальнейших исследованиях является то, что $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{S}$ представляют собой полугруппы относительно операции композиции.

Теорема 1. *Класс $\mathfrak{P}$ замкнут относительно операции композиции, а $l: \mathfrak{P} \to$ $\to \mathbb{R}^+$ — аддитивный функционал на полугруппе $\mathfrak{P}$, т.е. $l(f \circ g) = l(f) + l(g)$ для любых f, g из $\mathfrak{P}$.*

Доказательство. Пусть f_1, f_2 – две произвольные функции из $\mathfrak{P}$. Очевидно, что композиция $f = f_1 \circ f_2$ определена и представляет собой функцию Пика. Обозначим $h_1(z) = f_1(z) - z$, $h_2(z) = f_2(z) - z$. Тогда

$$z[f(z) - z] = zh_2(z) + f_2(z)h_1 \circ f_2(z) - h_2(z)h_1 \circ f_2(z). \tag{4}$$

В силу гидродинамической нормировки функции f_2 ее значения $f_2(z)$ остаются в некотором угле $\Delta_{\theta'}$, когда $z \to \infty$ внутри Δ_θ, $0 < \theta' < \theta < \pi/2$. Но тогда по лемме 1 имеем равенство для углового предела

$$\lim_{z\to\infty} f_2(z)h_1\circ f_2(z) = -l(f_1).$$

Замечая также, что $h_2(z)h_1\circ f_2(z)\to 0$ при $z\to\infty$ внутри Δ_θ, из (4) получаем

$$\lim z[f(z)-z] = -(l(f_1)+l(f_2))$$

при $z\to\infty$ в Δ_θ. Таким образом, для f выполнены условия б) из леммы 1 и она принадлежит $\mathfrak{P}$. Кроме того, доказанное выше соотношение для углового предела эквивалентно равенству $l(f) = l(f_1) + l(f_2)$. Теорема доказана.

2. *Однопараметрические полугруппы.* Рассматривая $\mathbb{R}^+$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{P}$ будем понимать непрерывный гомоморфизм $t\to f^t$, действующий из $\mathbb{R}^+$ в $\mathfrak{P}$. Другими словами, семейство $\{f^t\}_{t\geq 0}$ должно удовлетворять условиям:

а) $f^0(z)\equiv z$;

б) $f^{t+s} = f^t\circ f^s$ при $s, t\geq 0$;

в) $f^t(z)\to z$ при $t\to 0$, локально равномерно в U.

В действительности, однопараметрическая полугруппа $t\to f^t$ в $\mathfrak{P}$ является бесконечно дифференцируемой по t и вполне характеризуется своей инфинитезимальной образующей

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} f^t(z)\right|_{t=0} = v(z).$$

Функция v, которую мы также будем называть инфинитезимальным преобразованием полугруппы $\mathfrak{P}$, является аналитической в U.

Введем в рассмотрение подмножество $\mathfrak{R}$ функций Пика, которые имеют представление

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z}\, d\mu(x),$$

где μ – неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\mu(\mathbb{R})\leq 1$.

Теорема 2. *Для того чтобы голоморфная в U функция v являлась инфинитезимальным преобразованием полугруппы $\mathfrak{P}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление вида $v(z) = \alpha h(z)$, где $\alpha\geq 0$ и $h\in\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Пусть $t\to f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$ и v — соответствующая ей инфинитезимальная образующая. Через μ_t обозначим меру, соответствующую (по формуле (2)) функции f^t, $t\geq 0$. В силу аддитивности функционала $l\colon \mathfrak{P}\to\mathbb{R}^+$ и свойства б) из определения однопараметрической полугруппы имеем $l(f^{t+s}) = l(f^t) + l(f^s)$ для всех $s, t\geq 0$. Отсюда следует (см., например, [8, с. 153]), что $l(f^t)\equiv \alpha t$ при некотором $\alpha\geq 0$. Случай $\alpha = 0$ тривиален, поскольку он отвечает однопараметрической полугруппе $f^t(z)\equiv z$. Поэтому будем считать, что $\alpha > 0$. Но тогда представление (2) для функций f^t можно записать в виде

$$f^t(z) = z + \alpha t h_t(z),$$

где $h_t \in \mathfrak{R}$. Поскольку совокупность мер, выделяющих класс $\mathfrak{R}$, образует компактное относительно слабой сходимости мер множество, то сам класс $\mathfrak{R}$ представляет собой компактное подмножество в пространстве $\mathcal{H}(U)$, наделенном топологией локально равномерной сходимости. Следовательно, найдутся последовательность $t_n \searrow 0$ и функция $h \in \mathfrak{R}$ такие, что $h_{t_n}(z) \to h(z)$ при $n \to \infty$, локально равномерно в U. Но тогда

$$v(z) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f^t(z) - z) = \alpha \lim_{n\to\infty} h_{t_n}(z) = \alpha h(z),$$

и необходимость доказана.

Докажем теперь достаточность условия теоремы. Пусть $h(z) \not\equiv 0$ — функция класса $\mathfrak{R}$ и $\alpha > 0$. Нам нужно показать, что существует такая однопараметрическая полугруппа $t \to f^t$ в $\mathfrak{P}$, для которой $v(z) = \alpha h(z)$ является инфинитезимальной образующей.

Определим в U функцию F с помощью условий $F(i) = i$, $F'(z) = 1/v(z)$. Поскольку v не обращается в нуль в U, то функция F определена корректно. Кроме того, из условия $\operatorname{Im} v(z) > 0$ при $z \in U$ следует однолистность функции F. Для изучения отображения $w = F(z)$ рассмотрим образы прямых $z = x + iy$, $-\infty < x < \infty$. Поскольку

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Im} F(x+iy) = -\frac{\operatorname{Im} v(x+iy)}{|v(x+iy)|^2} < 0,$$

то кривая $w = F(x+iy)$, $-\infty < x < \infty$, пересекает прямую $\operatorname{Im} w = \text{const}$ не более чем в одной точке.Следовательно, вместе с каждой точкой $w \in F(U)$ области $F(U)$ принадлежат также и все точки $w + t$, $t \ge 0$. Это свойство позволяет определить функции $f^t(z) = F^{-1}(F(z)+t)$ при всех $t \ge 0$. Легко видеть, что для $\{f^t\}_{t\ge 0}$ выполняются условия а) – в) определения однопараметрической полугруппы. Кроме того, дифференцирование соотношения

$$F(f^t(z)) = F(z) + t$$

с учетом равенства $F'(z) = 1/v(z)$ показывает, что v – инфинитезимальная образующая однопараметрической полугруппы $t \to f^t$. Остается показать, что $f^t \in \mathfrak{P}$ при всех $t > 0$. Заметим прежде всего, что f^t является функцией Пика при каждом $t > 0$. Поэтому принадлежность функций f^t полугруппе $\mathfrak{P}$ будет следовать (см. лемму 1) из соотношения

$$\sup_{y>0} y\left|f^t(iy) - iy\right| < \infty. \tag{5}$$

Для его доказательства воспользуемся тем, что $w = f^t(z)$ является решением уравнения $dw/dt = v(w)$ с начальным условием $w|_{t=0} = z$. Отсюда, в частности, следует

$$y\left|f^t(iy) - iy\right| = y\left|\int_0^t v\left(f^s(iy)\right)ds\right| \le \alpha \int_0^t y\left|h\left(f^s(iy)\right)\right|ds.$$

Далее, поскольку

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Im} f^t(z) = \operatorname{Im} v\left(f^t(z)\right) > 0,$$

имеем $\operatorname{Im} f^t(iy) \ge y$ при всех $t \ge 0$. Используя также очевидное неравенство $(\operatorname{Im} z)\,|h(z)| \le 1$, которое следует из интегральной формулы класса $\mathfrak{R}$, получаем

$$y\left|h\left(f^s(iy)\right)\right| \le \left(\operatorname{Im} f^s(iy)\right)\left|h\left(f^s(iy)\right)\right| \le 1.$$

Отсюда и из неравенства, приведенного выше, получаем

$$y\left|f^t(iy) - iy\right| \le \alpha t.$$

Тем самым соотношение (5), а вместе с ним и теорема доказаны.

3. *Эволюционные семейства.* Следуя работе [4], рассмотрим понятие однопараметрической полугруппы. Вначале заметим, что из теоремы единственности для уравнения $dw/dt = v(w)$, которому удовлетворяет функция $w = f^t(z)$, следует однолистность f^t, $t \ge 0$, членов однопараметрической полугруппы $t \to f^t$ в $\mathfrak{P}$. Другими словами, если $t \to f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то $\left\{f^t\right\}_{t\ge 0} \subset \mathfrak{S}$.

Подмножество $\{w_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\} \subset \mathfrak{S}$ будем называть эволюционным семейством в $\mathfrak{S}$, если выполняются следующие три условия:

а) $w_{t,t}(z) \equiv z$ при $0 \le t \le T$;

б) $w_{t,s} = w_{t,\tau} \circ w_{\tau,s}$ при $0 \le s \le \tau \le t \le T$;

в) $w_{t,s}(z) \to z$ при $s, t \to \tau$, локально равномерно в U.

Отметим, что если $t \to f^t$ – однопараметрическая полугруппа в $\mathfrak{P}$, то $\{w_{t,s} = f^{t-s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ — эволюционное семейство в $\mathfrak{S}$.

С каждым эволюционным семейством в $\mathfrak{S}$ будем связывать функцию $\lambda(t) = l(w_{t,0})$, $0 \le t \le T$. Из условия б) и аддитивности функционала $l\colon \mathfrak{P} \to \mathbb{R}^+$ следует, что $\lambda(t)$ – неубывающая функция. Кроме того, условие $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$, $t_1 < t_2$, влечет равенство $w_{t,s}(z) = z$ при $t_1 \le s \le t \le t_2$. Оказывается, что $\lambda(t)$ отражает дифференциальные свойства эволюционного семейства.

Теорема 3. *Пусть $\{w_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ – эволюционное семейство в $\mathfrak{S}$ такое, что $\lambda(t) = l(w_{t,0})$ — абсолютно непрерывная функция на $[0,T]$. Тогда при всех $s \in [0,T)$ и $z \in U$ функция $w = w_{t,s}(z)$, $s \le t \le T$, является абсолютно непрерывным решением уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = \alpha(t) H(w,t) \tag{6}$$

с начальным условием $w|_{t=s} = z$, где $\alpha(t) = \lambda'(t)$ для п.в. t, а $H(w,t)$ – функция, определенная на $U \times [0,T]$, измеримая по t, голоморфная по w и такая, что $H(\cdot, t) \in \mathfrak{R}$ для п.в.t.

Доказательство. Заметим вначале, что из аддитивности функционала l и соотношения $w_{t,0} = w_{t,s} \circ w_{s,0}$ следует равенство $l(w_{t,s}) = \lambda(t) - \lambda(s)$, $0 \le s \le t \le T$.

Фиксируем теперь $z \in U$ и $s \in [0,T)$. Пусть $s \le t' \le t'' \le T$ и $\lambda(t') \ne \lambda(t'')$. Тогда, обозначая через $w_{t'',t'}$ меру, которая соответствует по формуле (2) функции $w_{t'',t'}$, получаем

$$w_{t'',s}(z)-w_{t',s}(z)=w_{t'',t'}\circ w_{t'',s}(z)-w_{t',s}(z)=\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-w_{t',s}(z)}\,d\mu_{t'',t'}(x).$$

Из приведенного выше замечания следует

$$\mu_{t'',t'}(\mathbb{R})=l\left(w_{t'',t'}\right)=\lambda(t'')-\lambda(t').$$

Поэтому функция

$$h_{t'',t'}(z)=\frac{1}{\lambda(t'')-\lambda(t')}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-z}\,d\mu_{t'',t'}(x)$$

принадлежит классу $\mathfrak{R}$. При этом

$$w_{t'',s}(z)-w_{t',s}(z)=\left(\lambda(t'')-\lambda(t')\right)h_{t'',t'}\left(w_{t',s}(z)\right). \tag{7}$$

Очевидно, что (7) выполняется и в предположении $\lambda(t')=\lambda(t'')$.

Далее, из интегральных представлений классов $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$ следуют неравенства

$$\operatorname{Im} w_{t',s}(z)\ge \operatorname{Im} z,\quad \left|h_{t'',t'}(z)\right|\le\frac{1}{(\operatorname{Im} z)},$$

используя которые, из (7) получаем

$$\left|w_{t'',s}(z)-w_{t',s}(z)\right|\le\frac{1}{\operatorname{Im} z}\left(\lambda(t'')-\lambda(t')\right).$$

Отсюда и из абсолютной непрерывности $\lambda(t)$ следует абсолютная непрерывность функции $w=w_{t,s}(z)$, $s\le t\le T$. Стандартные рассуждения с использованием теоремы Витали (см., например, [9, с. 160]) показывают, что для почти всех t существует производная

$$\frac{\partial}{\partial t}w_{t,s}(z)=V(z,t),$$

которая является голоморфной по z и измеримой по t функцией. Из равенства (7) и компактности класса $\mathfrak{R}$ следует также вид функции V:

$$V(z,t)=\lambda'(t)H\left(w_{t,s}(z),t\right),$$

где $H(\,\cdot\,,t)\in\mathfrak{R}$. Теорема доказана.

Полученный результат имеет обобщение.

Теорема 4. *Пусть $H(w,t)$ – функция, определенная на $U\times[0,T]$, голоморфная по z, измеримая по t и такая, что $H(\,\cdot\,,t)\in\mathfrak{R}$ для п.в. t. Тогда для всех $s\in[0,T)$ и $z\in U$ существует и единственно абсолютно непрерывное решение $w=(t,z,s;H)$, $s\le t\le T$, уравнения*

$$\frac{dw}{dt}=H(w,t) \tag{8}$$

с начальным условием $w|_{t=s}=z$. При этом отображение $w_{t,s}^{H}:z\to w(t,z,s;H)$, $s\le t\le T$, принадлежит классу $\mathfrak{S}$, а $\{w_{t,s}^{H}:0\le s\le t\le T\}$ – эволюционное семейство в $\mathfrak{S}$.

Доказательство. Из голоморфности функции $H(z,t)$ по z следует выполнимость для уравнения (8) условий локальных теорем существования и единственности в цилиндрическом множестве $U \times [0,T]$. Возможность продолжения решений следует из неравенств

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} H(w,t) > 0$$

и

$$|w - z| \le \int_s^t |H(w,t)|d\tau \le \int_s^t \frac{d\tau}{\operatorname{Im} w} \le \frac{t-s}{\operatorname{Im} z}.$$

Голоморфность отображений $w_{t,s}^H$ следует из голоморфности функции $H(z,t)$ по z. Из теоремы единственности для уравнения (8) следует также однолистность этих отображений. Остается показать, что $w_{t,s}^H$ принадлежит классу $\mathfrak{P}$. Для этого заметим, что

$$(\operatorname{Im} z)\left|w_{t,s}^H(z) - z\right| = (\operatorname{Im} z)\left|\int_s^t H(w,t)d\tau\right| \le$$

$$\le \int_s^t (\operatorname{Im} z)|H(w,t)|d\tau \le \int_s^t (\operatorname{Im} w)|H(w,t)|d\tau \le t - s.$$

Тогда принадлежность функции $w_{t,s}^H$ классу $\mathfrak{P}$ следует из леммы 1.

Отметим, наконец, что для $\{ w_{t,s}^H : 0 \le s \le t \le T\}$ выполняются условия а) – в) эволюционных семейств. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует также неравенство $l(w_{t,s}^H) \le$ $\le t - s$.

В терминологии работы [4] (8) называется эволюционным уравнением полугруппы $\mathfrak{S}$. Так же, как и в [4], устанавливается, что если функции H, H_n, $n =$ $=1, 2,\ldots$, удовлетворяют условиям теоремы 4 и $H_n \to H$ слабо в $\mathfrak{F}(U, [0,T])$ (см. [4]), т.е для любой измеримой ограниченной функции η

$$\int_0^T H_n(z,t)\eta(t)dt \to \int_0^T H(z,t)\eta(t)dt$$

при $n \to \infty$, локально равномерно в U, то $w_{t,s}^{H_n} \to w_{t,s}^H$ при $n \to \infty$, локально равномерно в U, $0 \le s \le t \le T$.

4. *Инфинитезимальное описание полугруппы* $\mathfrak{S}$. Покажем теперь, что любую функцию f из $\mathfrak{S}$ можно представить в виде $f = w_{T,0}^H$, где H удовлетворяет условиям теоремы 4. Заметим, прежде всего, что это легко показать в случае, когда $U \setminus f(U)$ — ограниченное множество. Действительно, поскольку в этом случае гидродинамическая нормировка является внутренним условием, то (см., например, [9], гл.6) можно построить семейство функций $F_t \in \mathfrak{S}$, $0 \le$ $\le t \le T = l(f)$, удовлетворяющее условиям $F_s(U) \subseteq F_t(U)$, $s \le t$, $F_0 = f$, $F_T(z) \equiv z$, $l(F_t) = T - t$. Но тогда $\{ w_{t,s} = F_t^{-1} \circ F_s : 0 \le s \le t \le T\}$ – эволюционное семейство в $\mathfrak{S}$, для которого $\lambda(t) = l(w_{t,0}) = t$ и $w_{T,0} = f$, и по теореме 3 его можно получить как решение эволюционного уравнения.

Для доказательства утверждения в общем случае заметим вначале, что, следуя схеме доказательства теоремы Каратеодори о сходимости к ядру с использованием компактности множества $\{f \in \mathfrak{P}: l(f) \le M\}$, легко получить следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $f, f_n \in \mathfrak{S}$ *и* $l(f_n) \le M$, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $f_n \to f$ *локально равномерно в* U *в том и только в том случае, если* $f_n(U) \to f(U)$ *в смысле сходимости к ядру.*

Установим тепеpь следующий важный аппроксимационный результат.

Лемма 3. *Для любой функции* f *из* $\mathfrak{S}$ *найдется такая последовательность* $\{f_n\} \subset \mathfrak{S}$, *что* $U \setminus f_n(U)$ *является ограниченным множеством для каждого* $n = 1, 2, \ldots$, $f_n \to f$ *локально равномерно в* U *и* $l(f_n) \nearrow l(f)$ *при* $n \to \to \infty$.

Доказательство. Для $\alpha > 0$ обозначим $f_a(z) = f(z + i\alpha) - i\alpha$. Из неравенства $\operatorname{Im} f(z) \ge \operatorname{Im} z$ следует, что f_a является функцией Пика при каждом $\alpha > 0$. Далее, из равенства

$$y \operatorname{Im}[f_\alpha(iy) - iy] = y \operatorname{Im}[f(i(y+\alpha)) - i(y+\alpha)] =$$
$$= (y+\alpha)\operatorname{Im}[f(i(y+\alpha)) - i(y+\alpha)] - \alpha \operatorname{Im}[f(i(y+\alpha)) - i(y+\alpha)],$$

принадлежности функции f классу $\mathfrak{S}$ и леммы 1 следует, что $f_a \in \mathfrak{P}$ и $l(f_a) = l(f)$. Из однолистности f следует однолистность функций f_a, т.е $f_a \in \mathfrak{S}$. Кроме того, $f_a(z) \to f(z)$ локально равномерно в U при $\alpha \to 0$.

Заметим теперь, что f_a отображает верхнюю полуплоскость U на область D_α, расположенную над аналитической кривой Λ_α. Поскольку $f(z) - z \to 0$ и $f'(z) \to 1$ при $z \to \infty$ внутри U_α, то найдется такое $r_0 = r_0(\alpha)$, что при $r \ge r_0$

$$D_{\alpha,r} = D_\alpha \cup \{w \in U: \operatorname{Re} w < -r\} \cup \{w \in U: \operatorname{Re} w > r\}$$

являются односвязными областями. Очевидно, что $D_{\alpha,r} \to D_\alpha$ как к ядру при $r \to \infty$.

Пусть $f_{\alpha,r}$ – однолистная в U функция, отображающая конформное отображение U на $D_{\alpha,r}$ и удовлетворяющая гидродинамической нормировке. Покажем, что $l(f_{\alpha,r}) \le l(f)$. Для этого рассмотрим $g_{\alpha,r} = f_{\alpha,r}^{-1} \circ f_\alpha$, которая, очевидно, является функцией Пика. Поскольку

$$\lim_{w\to\infty} w\left[f_{\alpha,r}^{-1}(w) - w\right] = \lim_{z\to\infty} f_{\alpha,r}(z)\left[z - f_{\alpha,r}(z)\right] = l(f_{\alpha,r})$$

и $f_\alpha(z)/z \to 1$ при $z \to \infty$ внутри Δ_θ, $0 < \theta < \pi/2$, то выполняются соотношения для угловых пределов

$$\lim_{z\to\infty} z\left[g_{\alpha,r}(z) - z\right] = \lim_{z\to\infty} f_\alpha(z)\left[f_{\alpha,r}^{-1} \circ f_\alpha(z) - f_\alpha(z)\right] +$$
$$+ \lim_{z\to\infty} z\left[f_\alpha(z) - z\right] = l(f_{\alpha,r}) - l(f_\alpha).$$

Таким образом, $g_{\alpha,r} \in \mathfrak{S}$ и $l(g_{\alpha,r}) = l(f_\alpha) - l(f_{\alpha,r})$. Учитывая неотрицательность функционала l, получаем неравенство $l(f_{\alpha,r}) \le l(f_\alpha) = l(f)$.

Из леммы 2 имеем теперь, что $f_{\alpha,r} \to f_\alpha$ локально равномерно в U при $r \to \to \infty$. Но тогда из функций $f_{\alpha,r}$ можно выделить последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющую условиям $f_n \to f$ локально равномерно в U при $n \to \infty$ и $l(f_n) \leq l(f)$. Остается показать, что $l(f_n) \to l(f)$ при $n \to \infty$. Допустим противное. Тогда найдется подпоследовательность $\left\{f_{n_k}\right\}$, для которой $l(f_{n_k}) \to \beta < l(f)$ при $n \to \infty$. Если μ, μ_k – меры, представляющие по формуле (2) функции f, f_{n_k} соответственно, то использование слабой компактности семейства мер, ограниченных константой, приводит к неравенству

$$\mu(\mathbb{R}) \leq \underline{\lim}_{k \to \infty} \mu_k(\mathbb{R}) \leq \beta.$$

Полученное неравенство противоречит условию $\mu(\mathbb{R}) = l(f) > \beta$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Для того чтобы голоморфная в U функция f принадлежала классу $\mathfrak{S}$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде $f = w_{T,0}^{H}$, где функция H удовлетворяет условиям теоремы 4.*

Доказательство. Достаточность утверждения следует из теоремы 4.

Пусть $f \in \mathfrak{S}$ и $l(f) = T > 0$. В случае $l(f) = 0$ имеем $f(z) \equiv z$. Выбираем последовательность $\{f_n\}$ как в лемме 3. Из рассуждений, приведенных в начале пункта, следует существование функций H_n, удовлетворяющих условиям теоремы 4 и таких, что $w_{T_n,0}^{H_n} = f_n$, $T_n = l(f_n)$. Доопределим функции H_n на $U \times\times [0,T]$, полагая $H_n(z, t) = 0$ при $t \in (T_n, T]$. Тогда соответствующие эволюционные семейства будут определены над общим интервалом $[0,T]$ и $w_{t,s}^{H_n}(z) \equiv z$ при $T_n \leq s \leq t \leq T$. Следовательно, $w_{T,0}^{H_n} = f_n$. Поскольку $\mathfrak{R}$-значные функции образуют в $\mathfrak{J}(U, [0,T])$ компактное относительно слабой сходимости множество (см. [4]), то найдется последовательность $\left\{H_{n_k}\right\}$, слабо сходящаяся в $\mathfrak{J}(U, [0, T])$ к некоторой $\mathfrak{R}$-значной функции H. Но тогда $w_{t,s}^{H_{n_k}} \to w_{t,s}^{H}$ локально равномерно в U при $k \to \infty$ и всех $0 \leq s \leq t \leq T$. Следовательно,

$$w_{T,0}^{H}(z) = \lim_{k \to \infty} w_{T,0}^{H_{n_k}}(z) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(z) = f(z),$$

и теорема доказана.

1. *Куфарев П. П , Соболев В. В,, Спорышева Л.В.* Об одном методе исследования экстремальных задач для функций, однолистных в полуплоскости // Вопросы геометр. теории функций: Тр. Томск.ун-та.– 1968. – **200**, вып. 5. – С. 142 – 164.
2. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.
3. *Александров И. А., Александров С.Т. , Соболев В.В.* Экстремальные свойства отображений полуплоскости в себя// Complex analysis. Banach center publications.– 1983.– **11**.–P. 7 –32.
4. *Горяйнов В.В.* Полугруппы конформных отображений// Мат. сб.– 1986.– **129**, №4.– С. 451 – 472.
5. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 750 с.
6. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.–543 с.
7. *Валирон Ж.*Аналитические функции.– М.: Гостехтеоретиздат., 1957.– 236 с.
8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы.–М.: Изд-во иностр. лит., 1962.– 829 с.
9. *Pommerenke Ch.* .Univalent functions.– Göttingen: Vandenoeck and Ruprecht, 1975.– 376 p.

Получено 01.04.92