УДК 517.54

В.Я. Гутлянский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т прикл.математики и механики АН Украины, Донецк),
С.А.Копанев, канд. физ.-мат. наук (Том. ун–т)

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ КРУГА НА ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ

Доказан ряд точных неравенств для конформных отображений круга на выпуклые области, связывающих между собой кривизну, уклонение, шварциан и другие характеристики линий уровня и ортогональных траекторий.

Доведено ряду точних нерівностей для конформних відображень круга на опуклі області. Ці нерівності зв'язують між собою кривину, відхилення, шварціан та інші характеристики ліній рівня та ортогональних траєкторій.

1. *Введение.* Пусть D – единичный круг с центром в начале координат в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через S^c множество всех конформных отображений

$$g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots \tag{1}$$

круга D на выпуклые области. Как известно, образ окружности $|z| = r$, $0 \le r < 1$, называется линией уровня, а образ радиуса $\arg z = \theta$, $0 \le \theta < 2\pi$, — ортогональной траекторией для отображения g. Среди геометрических характеристик этих кривых выделим *кривизну* и *уклонение* (см., например, [1]).

Работа посвящена доказательству ряда точных неравенств в классе S^c, связывающих между собой кривизну, уклонение, производную Шварца, скорость вращения касательной и другие характеристики линий уровня и ортогональных траекторий.

2. *Определения и предварительные результаты.* Пусть $f \in S^c$. Тогда для кривизны K_f линии уровня в точке $f(z)$, $z = re^{it}$, справедлива формула

$$K_f = K_f(z) = T_f(z)/|zf'(z)|,$$

где $T_f = T_f(z) = 1 + \Re\left(zf''(z)/f'(z)\right)$ — величина, характеризующая скорость вращения касательной к линии уровня.

Из работы [1, с. 262] следует, что уклонение $A\,b$ плоской кривой $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, τ – параметр, в произвольной точке $x(\tau), y(\tau)$ вычисляется по формуле

$$A\,b = \tan\delta = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds},$$

где ρ – радиус кривизны, а s – длина кривой. Подставляя сюда известные выражения для ρ и s, получим

$$Ab = \frac{x'x'' + y'y''}{x'y'' - x''y'} - \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)\left(x'y''' - x'''y'\right)}{3\left(x'y'' - x''y'\right)^2}.$$

Если в качестве кривой рассмотреть линию уровня

$$x(\tau) + iy(\tau) = f(re^{i\tau}),\ 0 \le r \le 2\pi,$$

то для уклонения Ab_f в точке $f(z)$, $z = re^{it}$, получим формулу

$$Ab_f = Ab_f(z) = \tfrac{1}{3}\,\Im(z^2\{f, z\})\left(T_f(z)\right)^{-2},$$

где

$$\{f,z\} = f'''(z)/f'(z) - \frac{3}{2}\left(f''(z)/f'(z)\right)^2$$

— производная Шварца отображения f в точке z.

Если обозначить через $K_f^{\perp}$, $Ab_f^{\perp}$ и $T_f^{\perp}$ соответственно кривизну, уклонение и скорость вращения касательной ортогональных траекторий, то формулы примут вид

$$K_f^{\perp} = T_f^{\perp} / \left|zf'(z)\right|,$$

$$Ab_f^{\perp} = -\frac{1}{3}\Im\left(z^2\{f,z\}\right)\left(T_f^{\perp}\right)^{-2},$$

$$T_f^{\perp} = \Im\left(zf''(z)/f'(z)\right).$$

Пусть Γ – группа конформных автоморфизмов круга D. Класс S^c линейно инвариантен относительно действия элементов этой группы. Другими словами, формула

$$\operatorname{Aut} S^c : g \to f = \frac{g \circ \gamma - g(\gamma(0))}{g'(\gamma(0))\gamma'(0)}, \gamma \in \Gamma, \tag{2}$$

устанавливает автоморфизм класса S^c.

Если в (2) положить

$$\gamma(\zeta) = e^{-i \arg z}(z - \zeta)/(1 - \bar{z}\zeta),$$

то формулы для рассматриваемых геометрических характеристик линий уровня и ортогональных траекторий отображения f в точке $f(z)$, $z = re^{it}$, примут вид

$$1 + zf''(z)/f'(z) = (1+r^2)/(1-r^2) - 2ra_2/(1-r^2),$$

$$\{f,z\} = 6e^{-2it}\left(1-r^2\right)^{-2}\left(a_3 - a_2^2\right), \tag{3}$$

$$Ab_f = 2\Im\left(a_3 - a_2^2\right)\left(r - 2\Re a_2 + r^{-1}\right)^{-2}, \tag{4}$$

$$Ab_f^{\perp} = \frac{1}{2}\Im\left(a_2^2 - a_3\right)(\Im a_2)^{-2}, \tag{5}$$

где a_n – коэффициенты разложения (1).

Пусть C — класс Каратеодори голоморфных отображений в круге D с неотрицательной вещественной частью и разложением в ряд Тейлора вида

$$p(z) = 1 + 2\alpha_1 z + 2\alpha_2 z^2 + \ldots. \tag{6}$$

Из теоремы Каратеодори–Шура (см., например, [2]), устанавливающей необходимые и достаточные условия в терминах коэффициентов α_n принадлежности отображения p классу C, следует предложение.

Предложение 1. *Множество значений системы* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ *коэффициентов на классе C имеет параметрическое представление*

$$\alpha_1 = \nu,$$

$$\alpha_2 = \alpha_1^2 + \eta\left(1 - |\nu|^2\right),$$

где комплексные параметры ν *и* η *принимают любые значения из замкнутого круга* $\overline{D}$. *При этом, если* $|\nu| = 1$, *то* $p(z) = \left(1 + e^{i\theta}z\right)/\left(1 - e^{i\theta}z\right)$, *если же* $|\nu| < 1$, *а* $|\eta| = 1$, *то*

$$p(z) = \lambda\left(1+e^{i\theta}z\right)/\left(1-e^{i\theta}z\right) + (1-\lambda)\left(1+e^{i\tau}z\right)/\left(1-e^{i\tau}z\right),$$

где $0 < \lambda < 1$, $0 \le \theta, \tau \le 2\pi$.

Хорошо известно, что формула

$$p(z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \tag{7}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между отображениями классов C и S^c. Это позволяет редуцировать поставленные выше задачи в классе S^c к соответствующим задачам в классе Каратеодори.

3. *Основные неравенства.* Первая группа результатов связывает между собой $\{f, z\}$, T_f и Ab_f. Всюду ниже $R^- = R^-(r) = (1-r)/(1+r)$, $R^+ = R^+(r) = (1+r)/(1-r)$.

Теорема 1. *В классе* S^c *при фиксированном* T_f, $R^- \le T_f \le R^+$, *справедливы точные оценки*

$$\left|\{f,z\}\right| \le \left(2R^+(|z|)^2 T_f(z) - T_f^2(z) - 1\right)\Big/2|z|^2 \tag{8_1}$$

$$\left|\{f,z\}\right| \le \frac{1}{2|z|^2}\left(2R^+(|z|)^2\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| - \left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|^2 - 1\right). \tag{8_2}$$

Доказательство. Пусть $f \in S^c$ и $\{f, z\}$ – ее шварциан. Учитывая формулу (3) и отмеченную выше связь между классами S^c и C, запишем шварциан в терминах коэффициентов разложения (6) отображения $p \in C$:

$$\{f,z\} = 2e^{-2it}(1-r^2)^{-2}(\alpha_2 - \alpha_1^2). \tag{9}$$

Отметим, что в этих терминах

$$T_f(z) = R^+(r^2) - 2r(1-r^2)^{-1}\Re\alpha_1. \tag{10}$$

Отсюда и из предложения 1, в частности, следует, что при фиксированном $z = re^{it} \in D$ функционал $T_f(z)$ на классе S^c принимает все значения из промежутка $[R^-, R^+]$. Для того чтобы найти точные оценки модуля шварциана на классе S^c при фиксированном значении T_f, нужно в соответствии с формулами (9) и (10) решить следующую экстремальную задачу на классе C: при фиксированном значении $\Re\alpha_1$ из $[-1, 1]$ найти точные оценки для $|\alpha_2 - \alpha_1^2|$. Эта задача может быть решена с использованием предложения 1. Действительно, при фиксированном значении $\Re\alpha_1$ из $[-1, 1]$ параметр ν связан ограничением $\Re\alpha_1 \le |\nu| \le 1$. Следовательно, $|\alpha_2 - \alpha_1^2| \le 1 - \Re^2\alpha_1$. При этом, если $\Re\alpha_1 = \pm 1$, то $|\nu| = 1$. Если же $-1 < \Re\alpha_1 < 1$, то $|\nu| < 1$, а $|\eta| = 1$. Отсюда и из формул (2), (7), (9) и (10) следуют точные оценки (8_1) и вид этих экстремальных отображений. Оценки (8_2) находятся аналогично.

Замечание 1. В классе S^c при фиксированном T_f, $R^- \le T_f \le R^+$, справедлива точная оценка

$$\left|\{f,z\}\right| \le \frac{1}{2|z|^2}\left(2R^+(|z|)^2 T_f(z) - \left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|^2 - 1\right). \tag{8_3}$$

Действительно, из (2), (3) и предложения 1 следует точная оценка

$$\left|\alpha_2-\alpha_1^2\right|\le 1-\left|\alpha_1^2\right|,$$

что эквивалентно неравенству (8_3). Из (8_3) элементарно следуют неравенства (8_1) и (8_2).

Теорема 2. *В классе* S^c *при фиксированном* T_f, $R^- \le T_f \le R^+$, *справедлива точная оценка*

$$6\left|Ab_f(z)\right|\le 2R^+\left(|z|^2\right)T_f^{-1}(z)-T_f^{-2}(z)-1. \tag{11}$$

Доказательство. Для того чтобы найти точные оценки модуля уклонения на классе S^c при фиксированном значении T_f, нужно в соответствии с формулами (4), (7) и (10) решить следующую экстремальную задачу на классе C. При фиксированном значении $\Re\alpha_1$ из [-1, 1] найти точные оценки для $\Im(\alpha_2-\alpha_1^2)$ Эта задача может быть решена с помощью предложения 1. Действительно, как и при доказательстве предыдущей теоремы, устанавливаются точные оценки $\Im(\alpha_2-\alpha_1^2)\le 1-\Re^2\alpha_1$ и экстремальные отображения. Отсюда обычным путем следует оценка (11).

Следствие 1. *В классе* S^c *справедлива точная оценка*

$$\left|Ab_f(z)\right|\le\frac{2}{3}\left(|z|^2/\left(1-|z|^2\right)\right)^2.$$

Экстремальными являются отображения

$$f(\zeta)=\frac{k}{2\gamma}\left(\left[\frac{k+\zeta}{k-\zeta}\right]^{\gamma}-1\right),$$

где $k=z\left(1+r^2\pm i\left(1-r^2\right)\right)\left[2r^2\left(1+r^4\right)\right]^{-1/2}$, $\gamma=-r\left[2/\left(1+r^4\right)\right]^{1/2}$ *и ветвь выбрана из условия* $1^{\gamma}=1$.

Задача о точных оценках уклонения линий уровня при конформных отображениях круга была впервые поставлена и исследована на классе S^c одним из авторов [3]. Однако в доказательстве теоремы 6 из [3] имеется легко устранимая неточность.

Прежде чем сформулировать следующий результат, условимся о терминологии.

Пусть $\mu\colon \mathbb{C}\to D$ – произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию $\|\mu\|_\infty=\operatorname{ess\,sup}|\mu|\le k<1$ и $Q=(1+k)/(1-k)$.

Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f плоскости $\mathbb{C}$ называется Q-квазиконформным с комплексной характеристикой μ, если он удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$f_{\bar z}=\mu(z)f_z$$

почти везде в $\mathbb{C}$.

Пусть f — квазиконформный автоморфизм плоскости $\mathbb{C}$. Окружность $|z|=1$ переходит при этом отображении в некоторую замкнутую кривую Жордана Λ, которую называют *квазиконформной кривой* или *квазиокружностью*. Альфорс [5] дал изящную геометрическую характеристику квазиконформных кривых. Именно он доказал, что кривая Жордана Λ является квазиконформной тогда и только тогда, когда

$$\max_{w\in\Lambda(w_1,w_2)} \frac{|w_2-w|+|w-w_1|}{|w_2-w_1|}$$

ограничен. Здесь $\Lambda(w_1, w_2)$ – меньшая дуга Λ (относительно диаметра) между w_1 и w_2. Ясно, что если f – конформное отображение круга на область с квазиконформной границей, то его всегда можно продолжить до квазиконформного автоморфизма $\mathbb{C}$ с некоторым Q.

Из критерия Альфорса, в частности, следует, что квазиокружность не может иметь нулевых углов. Таким образом, не всякая функция из класса S^c может быть продолжена до квазиконформного гомеоморфизма плоскости $\mathbb{C}$.

Первыми охарактеризовали квазиконформные кривые в терминах внутренних свойств конформных отображений Альфорс и Беккер (см. [4-6]). Именно они доказали, что если f голоморфна и однолистна в D и

$$\left|(1-|z|^2)^2\{f,z\}\right| \le 2k,$$

либо

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{k}{1-|z|^2},$$

то f продолжается до Q–квазиконформного гомеоморфизма плоскости и, стало быть, $f(|z| = 1)$ — квазиконформная кривая. В этой связи сформулируем следующий результат.

Теорема 3. *Если отображение $f \in S^c$ и в круге D удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \ge \frac{2|z|}{1-|z|^2}(1-k)^{1/2}, \tag{12}$$

то оно допускает Q–квазиконформное продолжение в $\mathbb{C}\setminus D$ с $Q = (1 + k)/(1 - k)$, $0 \le k < 1$.

Доказательство. Если $f \in S^c$, то по теореме 1 для ее шварциана справедлива точная оценка (8_2). С другой стороны, если выполнено неравенство (12), то $|\{f, z\}| \le 2k(1 - r^2)^{-2}$. По теореме Альфорса [6] отображение f Q–квазиконформно продолжается до гомеоморфизма $\mathbb{C}$.

Рассмотрим пример. Пусть $p = (1 - k^2)^{1/2}$ и $\lambda = (1 - p)/2$. Определим функцию класса S^c из уравнения

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \lambda\frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda)\frac{1-z}{1+z}.$$

Легко проверить, что для этой функции всюду в круге D выполняется неравенство (12). С другой стороны,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{2|z|(|z|-p)}{1-|z|^2}$$

и, следовательно, при $|z|$, близких к единице, и $0 < p < 1/2$, для нее не выполняется условие

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le \frac{1}{1-|z|^2}$$

при $0 \le l < 1$.

Вторая группа результатов связывает между собой Ab_f, K_f и T_f.

Предварительно сформулируем следующее утверждение, которое легко получить из соотношения (7) и известной формулы Риса–Герглотца об интегральном представлении функций класса Каратеодори (см. [7], теорема 6, следствие 4).

Предложение 2. *На классе* S^c *при заданных* z, $0 < |z| = r < 1$, *и* $\Re\left(zf''(z)/f'(z)\right)$ *для* $|f'(z)|$ *справедливы точные оценки*

$$\left(1-r^2\right)\left|f'(z)\right| \le 1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \le 2r\frac{\ln\left[\left(1-r\right)^2\left|f'(z)\right|\right]}{\left(1-r^2\right)\ln\dfrac{1+r}{1-r}}+\frac{1+r}{1-r}. \qquad (13)$$

Введем обозначения

$$K^- = \left(1-r^2\right)/r,\ K^* = K^- R^-(r^2)\left(R^+(r)\right)^{2r/(1+r^2)},$$

$$K^+ = \frac{2}{e}\left(R^+(r)\right)^{(1+r)^2/2r}\ln^{-1}R^+(r).$$

Теорема 4. *В классе* S^c *при фиксированном* K_f *справедливы точные оценки*

$$\min\left\{\Phi(\xi_1),\Phi(\xi_2)\right\} \le \left|Ab_f(z)\right| \le \frac{2}{3}\left(r/\left(1-r^2\right)\right)^2,$$

если $K_f \in [K^-, K^*]$,

$$\Phi(\xi_2) \le \left|Ab_f(z)\right| \le \Phi(\xi_1),$$

если $K_f \in [K^-, K^+]$, *где*

$$\Phi(x) = \left(2R^+(r^2)x^{-1} - x^{-2} - 1\right)/6. \qquad (14)$$

Здесь $\xi_{1,2}$, $\xi_1 \le \xi_2$ *–корни уравнения*

$$\frac{\left(1-r\right)^2}{r}\left(R^+(r)\right)^{\left(1-r\right)^2/2r}xe^{-x\frac{1-r^2}{2r}\ln R^+(r)} - K_f(z) = 0 \qquad (15)$$

относительно x.

Доказательство. Пусть $f \in S^c$ и $z = re^{it}$ — фиксированная точка круга D. Так как кривизна $K_f(z)$ определяется по формуле

$$K_f(z) = \frac{1+\Re\left(zf''(z)/f'(z)\right)}{\left|zf'(z)\right|},$$

то, учитывая неравенства (13) для $K_f(z)$, получаем точные оценки

$$K^- \le K_f(z) \le \frac{(1-r)^2}{r}\left(R^+(r)\right)^{(1+r)^2/2r}T_f(z)e^{-T_f(z)\frac{1-r^2}{2r}\ln R^+(r)}. \qquad (16)$$

Эти неравенства определяют область значений комплекснозначного функционала

$$T_f(z) + iK_f(z)$$

на классе S^c. Максимум правой части по T_f в формуле (16) достигается при

$$T_f(z)=\frac{2r}{1-r^2}\ln^{-1}R^+(r)=\frac{2r}{(1-r^2)\ln R^+(r)}$$

и равен (см. [8]) K^+. Обратно, при фиксированном K_f из промежутка $[K^-, K^+]$ для $T_f(z)$ справедливы точные двусторонние оценки

$$\xi_1 \le T_f(z) \le \xi_2,$$

где ξ_1, ξ_2 — корни уравнения (15). Имея теперь в виду неравенство (11) и отыскивая экстремум его правой части по $T_f(z)$ на промежутке $[\xi_1, \xi_2]$, получаем оценки модуля уклонения $Ab_f(z)$ линии уровня отображения f в точке $f(z)$ через значение кривизны $K_f(z)$ в этой точке.

Аналогичными рассуждениями можно получить точные неравенства, связывающие между собой $K_f^\perp$, $Ab_f^\perp$ и $T_f^\perp$. Приведем для примера следующий результат.

Теорема 5. *В классе S^c при фиксированном $T_{f,0}^\perp \le |T_f^\perp| \le 2r/(1-r^2)$, выполняются точные неравенства*

$$6\left|Ab_f^\perp(z)\right| \le \left(T_f^\perp(z)\right)^{-2} 4|z|^2\Big/\left(1-|z|^2\right)^2 - 1$$

и

$$\left|\left(1-|z|^2\right)^2 \Big/ |z| K_f^\perp(z) - \left(1+|z|^2\right)\Big/ T_f^\perp(z)\right| \le \left(4|z|^2 - \left(1-|z|^2\right)^2\left(T_f^\perp(z)\right)^2\right)^{1/2}.$$

1. *Schot S.H.* Aberrancy: geometry of the third derivative//Math. Mag. – 1987.– **51**, № 5.– P. 259–275.
2. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов. –М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.
3. *Черников В. В., Копанев Р. А.* Об уклонении линий уровня и их ортогональных траекторий при однолистных конформных отображениях//Сиб. мат. журн. –1986. – **27**, № 2, С. 193–201.
4. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. –М: Мир, 1966. – 136 с.
5. *Ahlfors L.* Sufficient conditions for quasiconformal extension//Ann. Math. Stud. – 1974. – **79**. – P. 23–29.
6. *Becker J.* Conformal mappings with quasiconformal extensions//Aspects of Contemporary Complex Analusis (Rroc. Conf. Dyrxam 1979).– London etc.: Acad. press, 1980. – p. 37–77.
7. *Гутлянский В.Я.* Об областях значений некоторых функционалов и свойствах линий уровня на классах однолистных функций// Вопросы геометр. теории функций: Тр. Томск. ун-та. – 1968. – **200**, вып.5. – С. 71–87.
8. *Зморович В.А.* О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций//Укр. мат. журн.–1952. – **4**, № 3. –С. 276–298.

Получено 01.04.92