УДК 517

**А.О.Игнатьев,** канд.физ.–мат.наук(Ин–т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

**Определены понятия устойчивости, притяжения и асимптотической устойчивости интегральных множеств систем обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием второго метода Ляпунова доказан ряд теорем об устойчивости интегральных множеств.**

**Визначені поняття стійкості, притягання і асимптотичної стійкості інтегральних множин систем звичайних диференціальних рівнянь. З використанням другого методу Ляпунова доведені теореми про стійкість інтегральних множин.**

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \tag{1}$$

где $x, X \in R^n$, $t \in I = [0, \infty)$, точка в левой части уравнений (1) означает дифференцирование по $t$. Предположим, что при

$$(t,x) \in \Gamma_{H_1} = I \times B_{H_1};\ B_{H_1} = \left\{x \in R^n : \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < H_1\right\} \tag{2}$$

выполнены условия существования и единственности решений системы (1). Введем ряд определений, аналогичных тем, которые использованы в работах [1 – 4].

**Определение 1.** *Множество $M$ пространства $(t, x)$ называется интегральным, если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ выполняется $(t, x(t)) \in M$, где $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0$.*

Пусть $M \subset I \times R^n$. Обозначим через $M_s$ пересечение этого множества с гиперплоскостью $t = s$, а $\rho(x, M_s)$ — расстояние от точки $x$ до множества $M_s$.

**Определение 2.** *Интегральное множество $M$ системы (1) называется устойчивым, если для любых $t_0 \in I$, $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(x_0, M_{t_0}) < \delta$ следует неравенство $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$ при $t \ge t_0$.*

**Определение 3.** *Интегральное множество $M$ системы (1) называется равномерно устойчивым, если в определении 2 число $\delta$ зависит только от $\varepsilon$.*

Обозначим $S(M_t, r) = \left\{x \in R^n : \rho(x, M_t) < r\right\}$.

**Определение 4.** *Интегральное множество называется притягивающим, если для всякого $t_0 \in I$ существует $\eta = \eta(t_0) > 0$ такое, что для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$ можно указать $\sigma = \sigma(t_0, \varepsilon, x_0) > 0$ такое, что $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, \varepsilon)$ для всех $t \ge t_0 + \sigma$. Область $S(M_{t_0}, \eta)$ называется областью притяжения интегрального множества $M$ в момент $t_0$.*

**Определение 5.** *Интегральное множество $M$ называется равномерно притягивающим, если для некоторого $\eta > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что справедливо неравенство $\rho(x(t, t_0, x_0), M_t) < \varepsilon$ для всех $t_0 \in I$, $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta)$, $t \ge t_0 + \sigma$.*

**Определение 6.** *Интегральное множество $M$ называется: асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и притягивающе; равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающе.*

Будем рассматривать, следуя А.М. Ляпунову, вещественные функции $v(t, x)$ переменных $t, x$, определенные и непрерывно дифференцируемые в области

$$U_H(M) = \{(t, x) \in R^{n+1}: t \in I, x \in S(M_t, H)\},$$

причем $U_H(M) \subset \Gamma_{H_1}$. Будем предполагать, если не оговорено противное, выполнение равенства

$$v(t, x) = 0 \quad \text{при} \quad t \in I, x \in M_t. \tag{3}$$

**Определение 7.** *Функция $v(t, x)$ называется знакопостоянной относительно $M$, если на множестве $U_H(M)$ она принимает значения одного знака и может обращаться в нуль, причем выполняется условие* (3).

**Определение 8**. *Функция $v(t, x)$ называется определенно–положительной относительно интегрального множества $M$ системы* (1), *если выполняются условия* (3) *и $v(t, x) \geq a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$, где $K$ — класс функций Хана* [4]. *Аналогично, функция $v(t, x)$ называется определенно–отрицательной относительно множества $M$, если $v(t, x) \leq -a(\rho(x, M_t))$, $a \in K$.*

**Определение 9.** *Функция $v(t, x)$ допускает в области $U_H(M)$ высший предел, бесконечно малый на множестве $M$ (или короче — бесконечно малый высший предел относительно $M$), если существует функция $b \in K$ такая, что $v(t, x) \leq b(\rho(x, M_t))$.*

**Теорема 1**. *Если дифференциальные уравнения* (1) *таковы, что возможно найти непрерывную знакоопределенную относительно интегрального множества $M$ функцию $v(t, x)$, производная которой в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией относительно $M$ противоположного знака с $v$, или тождественно равной нулю, то интегральное множество $M$ устойчиво.*

*Доказательство*. Пусть заданы $t_0 \in I$ и $\varepsilon > 0$. Так как $v(t, x)$ непрерывна и $v(t_0, x)$ для всех $x \in M_{t_0}$, то найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $v(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$ для всех $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$. Обозначим $x(t) = x(t, t_0, x_0)$. Для любых $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ и $t \geq t_0$ получаем

$$a(\rho(x(t), M_t)) \leq v(t, x(t)) \leq v(t_0, x_0) < a(\varepsilon).$$

Поскольку $a \in k$, то заключаем, что $\rho(x(t), M_t) < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

**Теорема 2**. *Если в условии теоремы* 1 *дополнительно потребовать, чтобы функция $v(t, x)$ допускала бесконечно малый высший предел относительно $M$, то интегральное множество $M$ системы* (1) *равномерно устойчиво.*

*Доказательство*. Действительно, в этом случае можно выбрать $\delta$ не зависящим от $t_0$. Для этого достаточно положить $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon))$. Здесь и в дальнейшем $b^{-1}$ — функция, обратная функции $b$.

**Теорема 3**. *Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $v: U_H(M) \to R$ такая, что для некоторых функций $a, b, c \in k$ и любых $(t, x) \in U_H(M)$ справедливы оценки*

$$a(\rho(x, M_t)) \leq v(t, x) \leq b(\rho(x, M_t)), \tag{4}$$

$$\dot{v}(t, x) \leq -c(\rho(x, M_t)). \tag{5}$$

*Тогда интегральное множество $M$ равномерно асимптотически устойчиво.*

*Доказательство*. Равномерная устойчивость $M$ следует из предыдущей теоремы. Покажем, что это множество – равномерно притягивающее. Пусть $\eta > 0$ – такое число, что $x(t) \in S(M_t, \eta)$ при $x_0 \in S(M_t, b^{-1}(a(\eta)))$. Возьмем произвольное $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < \eta)$. Оценим промежуток времени, в течение которого траектория $x(t)$ может находиться на множестве

$$x \in S(M_t, \eta) \setminus S(M_t, \delta), \tag{6}$$

где $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon))$. Производная $\dot{v}(t, x)$ в области (6) допускает оценку $\dot{v}(t, x) \leq \leq -c(\delta) < 0$. Выбирая

$$\sigma = \frac{b(\eta) - a(\delta)}{c(\delta)}, \tag{7}$$

заключаем, что если $x_0 \in S(M_t, b^{-1}(a(\eta)))$, то $x(t_0 + \sigma) \in S(M_t, \sigma)$, следовательно, $x(t) \in S(M_t, \varepsilon)$ при $t > t + \sigma$. Это означает, что множество $M$ – притягивающее. Тот факт, что $\delta$ в выражении (7) зависит лишь от $\varepsilon$, указывает на равномерность притяжения. Теорема доказана.

Наряду с уравнениями (1) рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x) + R(t, x), \tag{8}$$

в которой $R = (R_1, \dots, R_n)$. Предположим, что правые части системы (8) в области (2) непрерывны и удовлетворяют условиям существования единственного решения с заданными начальными условиями; решения систем (1), (8) определены для всех значений $(t, x) \in U_H(M)$. Здесь $M$, по-прежнему, обозначает интегральное множество системы (1), $M_{t_0}$ – его пересечение с гиперплоскостью $t = t_0$, а $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ – решение уравнений (8) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$.

**Определение 10.** *Интегральное множество $M$ назовем устойчивым при постоянно действующих возмущениях (п. д. в.), если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\eta_1(\varepsilon) > 0$ и $\eta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что всякое решение уравнений (8) с начальными значениями, удовлетворяющими условию $x_0 \in S(M_{t_0}, \eta_1)$ при произвольных $R_s$, которые удовлетворяют в области $t \geq t_0$, $x \in S(M_t, \varepsilon)$ неравенству $\|R(t, x)\| \leq \eta_2$, удовлетворяет при всех $t > t_0$ условию $x(t) \in S(M_t, \varepsilon)$.*

В этом определении предполагается, что п. д. в. и соответствующие им функции $R_s$ малы при всех $t \geq t_0$ в окрестности $M$. Однако, как указано в работах [5–7], интересны случаи, когда функции, характеризующие п. д. в., не будут малыми при всех $t \geq t_0$, а интервалы времени, когда они не малы, будут достаточно малыми. Введем следующее определение.

**Определение 11.** *Интегральное множество $M$ назовем устойчивым при п. д. в., ограниченных в среднем, если для любой пары положительных чисел $\varepsilon$, $T$ можно указать два таких числа $\delta > 0$ и $\eta > 0$, что при выполнении неравенства*

$$\int_t^{t+T} \varphi(s)\, ds < \eta, \tag{9}$$

*где $\varphi(t)$ – какая-либо непрерывная функция, удовлетворяющая условию*

$$\|R(t,x)\| \leq \varphi(t) \quad \text{при } x \in S(M_t, \varepsilon), \tag{10}$$

*каждое решение $x(t, t_0, x_0)$ с начальными данными $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ удовлетворяет условию $x(t) \in S(M_t, \varepsilon)$ при всех $t \geq t_0$.*

*Замечание.* Из определений 10, 11 следует, что решение, устойчивое при п. д. в., ограниченных в среднем, будет тем более устойчивым при п. д. в. (малых). Число $\eta$ из определения 11 связано с числом $\eta_2$ из определения 10 соотношением $T_{\eta_2} = \eta$.

**Теорема 4**. *Пусть интегральное множество $M$ системы* (1) *равномерно асимптотически устойчиво, причем эта устойчивость доказана методом построения функции $v\ (t,\ x)$, имеющей в некоторой окрестности $M$ ограниченные частные производные и удовлетворяющей условиям теоремы* 3. *Тогда интегральное множество $M$ устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем..*

*Доказательство.* Воспользуемся методом доказательства из работ [5, 6]. Пусть в области $t \in I$, $x \in S\,(M_t,\ h)$, где $h < H$, существует функция $v\ (t,\ x)$ со свойствами, указанными в условии теоремы. Кроме того, пусть, $\varepsilon$ — достаточно малое положительное число. Во всяком случае считаем $\varepsilon < h$. В силу оценок (4) имеем

$$\inf v\ (t,\ x) \geq a(\varepsilon) = 2\alpha, \tag{11}$$

$$\rho(x,\ N_t) = \varepsilon,$$

$$\sup v\ (t,\ x) \leq b(\varepsilon) = \frac{\alpha}{e^2},\ \ x \in S(M_t,\ \delta), \tag{12}$$

где $\delta = b^{-1}(e^{-2}\alpha)$. Рассмотрим область

$$t \in I,\ \ x \in S(M_t,\ \varepsilon) \setminus S(M_t,\ \delta). \tag{13}$$

Построим в этой области функцию $V(t,\ x) = v\ (t,\ x)\exp\beta(t)$, где $\beta(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Ее производная в силу уравнений (8) имеет вид

$$\dot{V}(t,\ x)\Big|_{(8)} = V(t,x)\left[\dot{\beta}(t) + \frac{1}{v}\dot{v}\Big|_{(1)} + \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}R_i\right].$$

Обозначим через $N$ положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\left|\frac{\partial v}{\partial t}\right| \leq N,\ \ \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leq N,\ \ i = 1,2,\ldots,n. \tag{14}$$

Пользуясь неравенствами (10), (4), (5), (14), получаем в области (13) оценку

$$\dot{V}(t,x)\Big|_{(8)} \leq V(t,x)\left[\dot{\beta}(t) - \frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)} + \frac{nN}{a(\delta)}\varphi(t)\right]. \tag{15}$$

Пусть $q \in (0,1)$. Определим непрерывную функцию $\psi(t)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\int_{kT}^{(k+1)T}\psi(t)\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T}\left[(1-q)\,\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)} - \frac{nN}{a(\delta)}\varphi(t)\right]dt,\ \ k = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

Из условия (9) заключаем, что интеграл в правой части равенства (16) неотрицателен, если $\eta$ удовлетворяет условию

$$\eta \leq \frac{(1-q)a(\delta)c(\delta)T}{nNb(\varepsilon)}. \tag{17}$$

При выполнении соотношения (17) функцию $\psi(t)$ можно подобрать неотрицательной. В дальнейшем предполагаем, что выпоняется равенство (16) и $\psi(t) \geq$

$\geq 0$. Определим теперь функцию $\beta(t)$:

$$\beta(t) = \int_0^t \left[ -\psi(s) + (1-q)\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)} - \frac{nN}{a(\delta)}\varphi(s) \right] ds. \tag{18}$$

Подставляя выражение (18) в правую часть неравенства (15), получаем оценку

$$\dot{V}(t,x)\Big|_{(8)} \leq V(t,x)\left[ -\psi(t) - q\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)} \right] \leq -q\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)} V(t,x). \tag{19}$$

Отметим, что в силу соотношения (16) функция $\beta(t)$ обращается в нуль при $t = kT$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Тогда для любого положительного $t$ существует натуральное число $k$ такое, что $kT \leq t < (k+1)T$, следовательно, из вида функции $\beta(t)$ вытекает

$$|\beta(t)| = \left| \int_{kT}^t \left[ -\psi(s) + (1-q)\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)} - \frac{nN}{a(\delta)}\varphi(s) \right] ds \right| \leq$$

$$\leq (1-q)\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)}T + \int_{kT}^{(k+1)T} \left[ \psi(s) + \frac{nN}{a(\delta)}\varphi(s) \right] ds = 2(1-q)\frac{c(\delta)}{b(\varepsilon)}T.$$

Выберем такое значение $q$, чтобы выполнялось неравенство $2(1-q)c(\delta)T \leq b(\varepsilon)$; при этом в области (13) выполнены соотношения $|\beta(t)| \leq 1$ и

$$e^{-1}\, v\,(t, x) \leq V(t, x) \leq e\, v\,(t, x). \tag{20}$$

Таким образом, построенная функция $V(t, x)$ удовлетворяет (19) и согласно условиям (11), (12), (20) неравенствам

$$\begin{aligned} &\inf V(t, x) \geq 2\alpha\, e^{-1}, && \sup V(t, x) \leq \alpha\, e^{-1}, \\ &\rho(M_t, x) = \varepsilon, && x \in S(M_t, \delta). \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим какую-нибудь траекторию $x(t, t_0, x_0)$, проходящую в момент времени $t_0$ через точку $x_0$. Пусть $x_0 \in S(M_t, \delta)$. Из оценок (19), (21) следует, что в этом случае траектория остается в области $S(M_t, \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

**Теорема 5**. *Пусть при условиях теоремы* 4 *выполнено равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+T} \varphi(s) ds = 0. \tag{22}$$

*Тогда наряду с устойчивостью интегрального множества $M$ при п.д.в., ограниченных в среднем, выполняется соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \rho(M_t, x(t, t_0, x_0)) = 0. \tag{23}$$

*Если предельное соотношение* (22) *выполнено равномерно относительно $T$, то предел в равенстве* (23) *является равномерным по $t_0, x_0$ из области $U_\delta(M)$.*

*Доказательство*. Рассмотрим произвольную траекторию $x(t, t_0, x_0)$ такую, что $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$. Тогда, как показано в теореме 4, во все время движения $x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, \varepsilon)$. Выберем теперь произвольное сколь угодно малое $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1 < \varepsilon$) и покажем, что существует момент времени $t_1$ такой, что

$$x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, \varepsilon_1) \text{ при } t > t_1. \tag{24}$$

Пусть $p$ – такое натуральное число, что при $k \geq p$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} \varphi(t)dt \leq \frac{(1-q_1)a(\delta_1)c(\delta_1)T}{nNb(\varepsilon_1)}, \ 0 < q_1 < 1,$$

$$1 - q_1 > \min\left\{\frac{b(\varepsilon_1)}{2c(\delta_1)T}; \frac{b(\varepsilon_1)}{2b(\varepsilon)}\right\}. \tag{25}$$

Рассмотрим функции $\psi_1(t) \geq 0$ и $\beta_1(t)$, задаваемые равенствами

$$\int\limits_{kT}^{(k+1)T} \psi_1(t)\,dt = \int_{kT}^{(k+1)T} \left[(1-q_1)\frac{c(\delta_1)}{b(\varepsilon_1)} - \frac{nN}{a(\delta_1)}\varphi(t)\right]dt,$$

$$\beta_1(t) = \int_{pT}^{t} \left[-\psi_1(s) + (1-q_1)\frac{c(\delta_1)}{b(\varepsilon_1)} - \frac{nN}{a(\delta_1)}\varphi(s)\right]ds.$$

Теперь с помощью функции $V_1(t, x) = v\,(t, x)\exp\beta_1(t)$ можно показать, что если при $t \geq p\,T$ траектория находится на множестве $S(M_t, \delta_1)$, то во все последующее время движения она не выйдет из области $S(M_t, \varepsilon_1)$. Докажем, что действительно при достаточно большом значении $t$ траектория попадает в область $S(M_t, \delta_1)$. Предположим противное: при любом $t > Tp$ выполняется условие

$$x(t, t_0, x_0) \in S(M_t, \varepsilon) \setminus S(M_t, \delta_1). \tag{26}$$

При выполнении включения (26) имеем оценку

$$\dot{V}_1(t,x)\Big|_{(8)} \leq V_1(t,x)\left[\dot{\beta}_1(t) - \frac{c(\delta_1)}{b(\varepsilon)} + \frac{nN}{a(\delta_1)}\varphi(t)\right] \leq V_1(t,x)\left[-\psi_1(t) - \frac{c(\delta_1)}{2b(\varepsilon)}\right], \tag{27}$$

полученную с использованием (25). В то же время из набора функций $\omega_1(t)$, $\beta_1(t)$ следуют неравенства $|\beta_1(t)| < 1$, $a(\delta_1)e^{-1} \leq e^{-1}\,v(t, x) \leq V_1(t, x) \leq e v\,(t, x) \leq$ $\leq eb(\varepsilon)$, которые совместно с неравенствами (27) противоречат исходному предположению, а это и доказывает соотношение (24).

Покажем теперь справедливость второго утверждения теоремы. Если условие (23) выполняется равномерно по $T$, то

$$\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(t)dt = L < \infty.$$

Пусть $T > 0$ — произвольное число, а $\delta$ и $\eta$ — такие положительные числа, что при выполнении условий $x_0 \in S(M_{t_0}, \delta)$ и (9) $x(t, t_0, x_0)$ принадлежит области $S(M_t, \varepsilon)$ при $t > t_0 \geq 0$. Существование таких чисел установлено теоремой 4. Докажем что для любого сколь угодно малого $\sigma > 0$ $(\sigma < \varepsilon)$ существует $\tau = \tau(\sigma)$ такое, что при любых $t_0 \geq 0$, $t \geq \tau$

$$x(t_0 + t, t_0, x_0) \in S(M_{t_0+t}, \sigma). \tag{28}$$

Обозначим через $\tau_1 = \tau_1(\sigma) > 0$ такое число, что

$$\int\limits_{\tau_1}^{\infty} \varphi(t)dt \leq \frac{(1-q)a(\rho)c(\rho)T}{nNb(\sigma)}, \tag{29}$$

где $\rho = b^{-1}\left[\frac{1}{2}e^{-2}a(\sigma)\right]$, а $q \in (0; 1)$ удовлетворяет неравенству $2(1-q)\,c(\rho)T < b(\sigma)$. Из доказательства теоремы 4 следует: если траектория $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ при $t \geq \tau_1$ попадает в область $S(M_t, \rho)$, то в дальнейшем она не покидает области $S(M_t, \sigma)$. Оценим время, в течение которого она может находиться во множестве

$$S(M_t, \varepsilon) \setminus S(M_t, \rho). \tag{30}$$

В области (30)

$$\dot{v}(t, x)\big|_{(8)} = \dot{v}(t,x)\big|_{(1)} + \frac{\partial v}{\partial x}R \leq -c(\rho) + N n \varphi(t),$$

откуда $v(t, x(t)) - v(t_0, x_0) \leq -c(\rho)(t - t_0) + LN n$. Из последнего неравенства заключаем, что промежуток времени, в течение которого траектория $x(t)$ может быть расположена в области (30), не превышает $\tau_2$, где

$$\tau_2 = \frac{1}{c(\rho)}\left[LNn + b(\varepsilon) - a(\rho)\right]. \tag{31}$$

При фиксированном значении $\varepsilon$ величина $\rho$ зависит лишь от $\sigma$, следовательно, $\tau_2$ зависит только от $\sigma$. Таким образом, справедливость включения (28) установлена для любого $t \geq \tau(\sigma)$, где $\tau(\sigma) = \tau_1(\sigma) + \tau_2(\sigma)$, а $\tau_1$ и $\tau_2$ определены соответственно выражениями (29) и (31). Теорема доказана.

В качестве примера можно рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{1}{2}x\left(2 + \sin t + \frac{\cos t}{2 + \sin t} - x^2 - y^2\right), \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{2}y\left(2 + \sin t + \frac{\cos t}{2 + \sin t} - x^2 - y^2\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Множество

$$x^2 + y^2 = 2 + \sin t \tag{33}$$

является интегральным для уравнений (32). В качестве функции $v$ рассмотрим $v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2 - \sin t)^2$. Ее производная в силу системы (32) равна

$$\dot{v} = (x^2 + y^2 - 2 - \sin t)^2\left(-(x^2 + y^2) + \frac{\cos t}{2 + \sin t}\right).$$

При этом она определенно-отрицательна в окрестности интегрального множества (33). Следовательно, множество (33) равномерно асимптотически устойчиво и устойчиво при п. д. в., ограниченных в среднем.


1. *Плисс В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.–М.: Наука, 1977.–304с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.–М.: Наука, 1987.– 304с.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.–М.: Наука,1973.–512с.
4. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.– М.: Мир, 1980.– 300с.
5. *Гермаидзе В. Е., Красовский Н. Н.* Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика.– 1957.– **21**,№6.– С.769–774.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.–М.: Физматгиз, 1959.– 211с.
7. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем.- Киев: Наук. думка, 1989.–208с.


Получено 01. 04. 92