УДК 517.956

Е.А. Калита, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О ПОРЯДКЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для эллиптических систем второго порядка с естественным энергетическим пространством W_2^1 рассматриваются решения с изолированной особенностью. Если скорость роста решения меньше предельной скорости, определяемой модулем эллиптичности системы, доказано, что или особенность устранима, или ее порядок совпадает с порядком особенности фундаментального решения уравнения Лапласа. Рассмотрены также системы с положительными нелинейными младшими членами, для которых получена полная классификация возможных порядков изолированных особенностей.

Для еліптичних систем другого порядку з природним енергетичним простором W_2^1 розглядаються розв'язки з ізольованою особливістю. Якщо швидкість зростання розв'язку менша за граничну швидкість, яка визначається модулем еліптичності системи, доведено, що або особливість усувна, або її порядок збігається з порядком особливості фундаментального розв'язку рівняння Лапласа. Розглянуто також системи з додатніми нелінійними молодшими членами, для яких одержана повна класифікація можливих порядків ізольованих особливостей.

Особым точкам и особым множествам решений эллиптических уравнений посвящено большое количество работ. Отметим [1], где достаточно полно изучено поведение решений эллиптических уравнений в окрестности особой точки. Переход от уравнений к системам связан с существенными трудностями. Один из подходов к изучению свойств решений эллиптических систем состоит в наложении определенных ограничений на модуль эллиптичности. На этом пути в [2] получены точные условия гельдеровости решений и справедливости теоремы Лиувилля. В данной работе этот подход используется при изучении изолированных особенностей решений. Для систем без младших членов устанавливаются ограничения на порядок роста решения в окрестности особой точки, при которых свойства решения совпадают со свойствами решения модельного уравнения. Эти ограничения зависят от модуля эллиптичности системы. Приведены примеры, показывающие их точность.

В последнее время интенсивно изучаются уравнения с положительными младшими членами вида

$$\Delta u - u\,|u|^{q-2} = 0,\ q > 2.$$

В [3, 4] показано, что уравнение с младшими членами такого типа не имеет изолированных особенностей при $q > 2(n-1)/(n-2)$, n – размерность. В [5] при $q < 2(n-1)/(n-2)$ получена классификация возможных порядков особенности. В данной работе рассмотрены эллиптические системы с такими младшими членами. Установлено несуществование особых точек при $q \geq q_0$, получена классификация возможных порядков особенности при $q \geq q_1$, где $q_0 \in (2(n-1)/(n-2);\ 2n/(n-2))$, $q_1 \in (2n/(n-1);\ 2n/(n-2))$ зависит от модуля эллиптичности системы.

1. *Системы типа главной части.* В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматривается эллиптическая система

$$D_k A_k(x,u,Du) = 0, \tag{1}$$

где A_k, u – N-мерные вектор-функции: $A_k = \left(A_k^1,\ldots,A_k^N\right)$, аналогично u. Предполагается выполненным условие

$$\exists K < 1,\ \kappa > 0 : \left[\sum_{i,k}\left(\xi_k^i - \kappa A_k^i(x,u,\xi)\right)^2\right]^{1/2} \leq K|\xi|. \tag{2}$$

Оно эквивалентно стандартной паре условий

$$A_k^i(x,u,\xi)\xi_k^i \ge d_1|\xi|^2,\ \sum_{i,k}\left(A_k^i\right)^2 \le d_2|\xi|^2, \tag{3}$$

но форма (2) предпочтительнее тем, что для нас существенна величина K. Действительно, из (2) находим

$$\left(1-K^2\right)|\xi|^2+\kappa^2\sum_{i,k}\left(A_k^i\right)^2 \le 2\kappa A_k^i\,\xi_k^i,$$

откуда следует первое из условий (3). Второе следует из (2) по неравенству треугольника. В обратную сторону, по (3)

$$\sum_{i,k}\left(\xi_k^i-\kappa A_k^i\right)^2 = |\xi|^2-2\kappa A_k^i\,\xi_k^i+\kappa^2\left(A_k^i\right)^2 \le \left(1-2\kappa d_1+\kappa^2 d_2\right)|\xi|^2,$$

откуда при $0<\kappa<d_1/d_2$ получаем (2). В случае дифференцируемых коэффициентов выражение K через собственные числа $\partial A_k^i/\partial\xi_l^j$ как матрицы $Nn\times$ $\times Nn$ получено в [2, с. 59].

Обозначим $a_0=(n-2)\sqrt{1-K^2}$, $a_1=\left(1-K^2\right)^{-1/2}\left(\sqrt{n^2-K^2(n-2)^2}-2K\sqrt{n-1}\right)$. Отметим, что $a_1\in(0,n)$, $a_1\to n$ при $K\to 0$, $a_1\to 0$ при $K\to 1$. Обозначим $E_R=\{x\colon R<r<2R\}$, $r=|x|$, $\|u\|_E=\|u;\,L_2(E)\|$.

Теорема 1. *Пусть* $u\in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega\setminus 0)$ *–решение* (1) *с особенностью в нуле, такое, что*

$$\liminf_{R\to 0} R^{\alpha-2}\|u\|^2_{E_R}=0 \tag{4}$$

с некоторым $a<a_1$ *при* $0<K<\min\left(1,2\dfrac{\sqrt{n-1}}{n-2}\right)$ *и с* $a=a_0$ *при* $2\dfrac{\sqrt{n-1}}{n-2}\le$ $\le K<1$. *Тогда или особая точка устранима, или*

$$R^{\varepsilon}<R^{\frac{n}{2}-2}\|u\|_{E_R}<R^{-\varepsilon} \tag{5}$$

при $R\to 0$ *и произвольно малом* $\varepsilon>0$.

При доказательстве теоремы 1 используются оценки решения в пространствах, отличающихся от основного энергетического пространства W_2^1. Возможность выбора пробной функции в других пространствах количественно описывают следующие две леммы. Обозначим $DuDv=\sum_{i,k}D_k u^i D_k v^i$.

Лемма 1. *Пусть* u *– дифференцируемая почти всюду вектор-функция,* $v=$ $=u\,|\,u\,|^s$, $-1<s<+\infty$. *Тогда*

$$|Du||Dv|\le\mu(s)^{1/2}DuDv,\ \mu(s)=1+\frac{s^2}{4(1+s)}.$$

Доказательство. Обозначая $I=|\,Du\,|^2\,|\,u\,|^s$, $J=|u^i\,Du^i\,|^2\,|\,u\,|^{s-2}$, имеем

$$Du\,Dv=I+sJ,\ |u|^{-s}|Dv|^2=I+(2s+s^2)J.$$

По неравенству Коши $I\ge J$, так что $DuDv\ge 0$ при $s\ge -1$, и утверждение леммы следует из равенства

$$\mu(s)(DuDv)^2-|Du|^2|Dv|^2=\left(\mu(s)-1\right)(I-(2+s)J)^2\ge 0.$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(E)$ пространство с нормой $\| u \|_{\omega, E} = \| \omega^{1/2}u; L_2(E) \|$, при $\omega \equiv 1$ соответствующий индекс опускаем. При $\omega = r^a$ будем писать $L_{2,a}$, а также $\| u \|_a$. Обозначим $\omega(r) = \begin{cases} r^a, r \le 1, \\ r^b, r \ge 1. \end{cases}$

Лемма 2. *Пусть* $u \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $u = 0$ *в окрестности* $0, \infty$,

$$\left(\max(0, n^2 - 8n + 8)\right)^{1/2} < a < n,\ \max(0, a - \delta(a)\varepsilon) \le b < a,$$

$\varepsilon > 0$, $\delta(a)$ – *положительная невозрастающая функция. Найдется функция* v *такая, что* $Dv \in L_{2,\,1/\omega}$, $Dv \not\equiv 0$, *и выполнено*

$$\| Du \|_\omega \| Dv \|_{1/\omega} \le \left(M_1(a) + \varepsilon\right)^{1/2} \int DuDvdx, \tag{6}$$

$$M_1(a) = 1 + a^2(n-1)\left(\frac{n^2 - a^2}{4}\right)^{-2}.$$

Доказательство. Представим u в виде $u(x) = u_0(r) + u_1(x)$, $\int u_1(r,\theta)d\theta = 0$ $\forall r > 0$, (r,θ) – полярные координаты, и положим $v = v_0 + v_1$, $v_0(r) = -\int_r^\infty u_0'(t) \times$ $\times\, \omega(t)\, dt$, $v_1 = u_1\omega$, штрих обозначает дифференцирование по r.

Обозначая $z = u_1\omega^{1/2}$, $z_0' = u_0'\omega^{1/2}$, имеем

$$\omega^{1/2}D_k u = z_0' r_k + D_k z - \frac{\tilde a}{2}\frac{z}{r} r_k,\ \omega^{-1/2}D_k v = z_0' r_k + D_k z + \frac{\tilde a}{2}\frac{z}{r} r_k,$$

$$r_k = \frac{x_k}{r},\ \tilde a \equiv \frac{r\omega'}{\omega} = \begin{cases} a, r < 1, \\ b, r > 1. \end{cases}$$

Обозначая

$$I = \int\left(z_0'^2 + |Dz|^2\right)dx,\ J = \int\left(\frac{\tilde a}{2}\right)^2 z^2 r^{-2}dx,\ S = \int\limits_{r=1} z^2 d\theta$$

и учитывая ортогональность на сферах z и константы, находим

$$\int DuDvdx = I - \frac{a^2}{4}J,\ \| Du \|_\omega^2 = I + \frac{a^2}{4}J + \frac{n-2}{2}\int \tilde a \frac{z^2}{r^2}dx - \frac{a-b}{2}S,$$

$$\| Dv \|_{1/\omega}^2 = I + \frac{a^2}{4}J - \frac{n-2}{2}\int \tilde a \frac{z^2}{r^2}dx + \frac{a-b}{2}S.$$

Оценим снизу I:

$$I \ge \int\left(z'^2 + r^{-2}\left|\nabla_\theta z\right|^2\right)r^{n-1}drd\theta \ge \left(\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + n - 1\right)\int \frac{z^2}{r^2}dx,$$

где z' оценено по неравенству Харди, а для $\nabla_\theta z$, учитывая ортогональность на сферах z и константы, а также то, что первое отличное от нуля собственное число оператора Бельтрами на сфере равно $n - 1$, имеем

$$\int\left|\nabla_\theta z(r,\theta)\right|^2 d\theta \ge (n-1)\int |z(r,\theta)|^2 d\theta. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\int DuDvdx = I - \frac{a^2}{4}J \ge \frac{n^2 - a^2}{4}J \ge 0 \tag{8}$$

при $a \le n$. Поэтому для получения (6) достаточно сравнить квадраты правой и левой части. Находим

$$M_1(a)\left(\int DuDvdx\right)^2 - \|Du\|_\omega^2 \|Dv\|_{1/\omega}^2 = \left(I - \frac{n^2}{4}J\right)\left\{(M_1-1)I + \right.$$

$$\left. + \left((M_1-1)\frac{n^2}{4} - (M_1+1)\frac{a^2}{2}\right)J\right\} + \left(\frac{n-2}{2}\int \tilde{a}\frac{z^2}{r^2}dx - \frac{a-b}{2}S\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{n-2}{2}aJ\right)^2 \ge -\frac{a-b}{2}S(n-2)a\int \frac{z^2}{r^2}dx, \tag{9}$$

поскольку

$$(M_1-1)I + \left((M_1-1)\frac{n^2}{4} - (M_1+1)\frac{a^2}{4}\right)J =$$

$$= (M_1-1)\left(I - \frac{n^2}{4}J\right) + \frac{a^2}{n^2-a^2}\left(8n-8-n^2+a^2\right)J \ge 0$$

при $a^2 \ge n^2 - 8n + 8$. Используя неравенство Харди в виде

$$\int_\alpha^\beta z'^2 r^{n-1}dr \ge e(n-2-e)\int_\alpha^\beta z^2 r^{n-3}dr - ez^2r^{n-2}\Big|_\alpha^\beta,$$

$e \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha < \beta \le +\infty$. Применяя его на $(0,1)$ с $e = \frac{1}{2}\left(n-2-\sqrt{n^2-a^2}\right)$ и на $(1,\infty)$ с $e = \frac{1}{2}\left(n-2+\sqrt{n^2-a^2}\right)$ и учитывая (7), находим

$$\int DuDvdx \ge \sqrt{n^2-a^2}\,S.$$

Вместе с (8), (9) это доказывает (6).

Доказательство теоремы 1. Запишем систему (1) в виде

$$\Delta u = \Delta u - \kappa D_k A_k(x,u,Du).$$

Из соответствующего интегрального тождества по (2) находим

$$\int DuDv_0dx \le K\int |Du||Dv_0|dx,\ v_0 \in \mathring{W}_2^1. \tag{10}$$

1. Пусть $K \ge 2\frac{\sqrt{n-1}}{n-2}$ $(n > 6)$. Положим $v = u\min(1, \tau^s|u|^s)$, $-1 < s < 0$, $\tau > 0$ – константа. Введем срезающую функцию $\varphi \in \mathring{C}^1\left(F_{R\rho}\right)$, $\varphi = 1$ при $\frac{7}{4}R < r < \frac{5}{4}\rho$, $|D\varphi| \le c/R$ в F_R и аналогично в F_ρ, $F_R = \left\{x: \frac{5}{4}R < r < \frac{7}{4}R\right\}$, $F_{R\rho} = \left\{x: \frac{5}{4}R < r < \frac{7}{4}\rho\right\}$, $2R < \rho$, ρ столь малое, что решение определено в шаре радиуса 2ρ. Буквой c будем обозначать различные несущественные константы. Полагая $v_0 = v\varphi$, из (10) по лемме 1 получаем

$$\left(\mu(s)^{-1/2} - K\right)\int_{\Omega_0}\varphi|Du||Dv|dx + (1-K)\int_{\Omega_1}\varphi|Du|^2dx \le cR^{-1}\int_{F_R}|Du||v|dx + \mathrm{idem}_\rho,$$

$$\Omega_0 = \left\{x: |u(x)| > \tau^{-1}\right\},\ \Omega_1 = \left\{x: |u(x)| < \tau^{-1}\right\}.$$

Полагая $s = s_* \equiv -2((1-K^2)^{-1/2}+1)^{-1}$, имеем $\mu(s)^{-1/2} = K$, и, следовательно,

$$\int_{\Omega_1} \varphi |Du|^2 dx \le c\tau^s R^{-1} \int_{F_R} |Du||u|^{1+s} dx + c\rho^{-1} \int_{F_\rho} |Du||u| \, dx. \tag{11}$$

По неравенству Гельдера

$$R^{-1} \int_{F_R} |Du||u|^{1+s} dx \le cR^{-1-ns/2} \|Du\|_{F_R} \|u\|_{F_R}^{1+s}.$$

Учитывая стандартную оценку $\|Du\|_{F_R} \le cR^{-1}\|u\|_{E_R}$, по (4) получаем

$$\liminf_{R\to 0} R^{-1} \int_{F_R} |Du||u|^{1+s} dx = 0.$$

Из (11) при $R \to 0$ и $\tau \to 0$ получаем $Du \in L_2$.

2. Пусть $K < \min\left(1, 2\frac{\sqrt{n-1}}{n-2}\right)$. Положим $\omega(r) = \begin{cases} r^a \tau^{b-a}, r \le \tau \\ r^b, r \ge \tau \end{cases}$, $2R < \tau < \rho$, $0 \le$ $\le b < a < n$, и определим v по функции $u_0 = u\varphi$ так, как в лемме 2 определяли по u, с нормировкой $\| Dv \|_{1/\omega} = \| Du_0 \|_\omega$. Положим $v_0 = (v - c_v)\varphi$, константу c_v выберем ниже. В (10) имеем

$$\int Du_0 Dv dx \le K\|Du_0\|_\omega \|Dv\|_{1/\omega} + cR^{-1}\left(\|Du\|\|v - c_v\| + \|u\|\|Dv\|\right)_{F_R} + \mathrm{idem}_\rho,$$

При $a < a_1$, учитывая неравенство $M_1(a)^{-1/2} > K$ для $a < a_1$, по лемме 2 получаем

$$\|Du_0\|_\omega^2 \le cR^{-1}\left(\|Du\|\|v - c_v\| + \|u\|\|Dv\|\right)_{F_R} + \mathrm{idem}_\rho.$$

Оценивая $\|Dv\|_{F_R}$ через $\|Dv\|_{1/\omega, F_{R\rho}}$ и учитывая нормировку v, получаем

$$\|Du_0\|_\omega^2 \le c\|u\|_{\omega, F_R}^2 + c\|Du\|_{\omega, F_R \cup F_\rho} \|r^{-1}(v - c_v)\|_{1/\omega, F_{R\rho}} + c_\rho. \tag{12}$$

Пусть отрезок $[b, a]$ не содержит точку $n - 2$. Используем неравенство Ха́рди в виде

$$\int_R^{2\rho} z'^2 \omega r dr \ge e^2 \int_R^{2\rho} z^2 \omega r^{-1} dr - \begin{cases} e(e+1)\rho^{-1} \int_\rho^{2\rho} z^2 \omega dr, \frac{r\omega'}{\omega} \ge 2e, \\ \mathrm{idem}_R, \frac{r\omega'}{\omega} \le -2e, \end{cases}$$

где $e > 0$ – произвольная константа, ω – неотрицательный вес (в нашем случае вес имеет вид $r^{n-2}\omega^{-1}$). При $a < n - 2$, полагая $e = (n - 2 - a)/2$, находим

$$\|r^{-1}(v - c_v)\|_{1/\omega, F_{R\rho}} \le c\|Dv\|_{1/\omega} + c\|r^{-1}(v - c_v)\|_{1/\omega, F_\rho},$$

а при $b > n - 2$, $e = (b + 2 - n)/2$ –

$$\|r^{-1}(v - c_v)\|_{1/\omega, F_{R\rho}} \le c\|Dv\|_{1/\omega} + c\|r^{-1}(v - c_v)\|_{1/\omega, F_R}.$$

Константу c_v определим условием $\int_{F_\rho} (v - c_v) dx = 0$ при $a < n - 2$, $\int_{F_R} (v - c_v) dx =$ $= 0$ при $b > n - 2$. Применяя неравенство Пуанкаре, из (12) получаем

$$\|Du_0\|_\omega^2 \le cR^a \tau^{b-a}\left(R^{-2}\|u\|_{F_R}^2 + \|Du\|_{F_R}^2\right) + c_\rho.$$

Учитывая стандартную оценку $\| Du \|_{F_R} \le cR^{-1}\| u \|_{E_R}$, по (4) при $R \to 0$ находим $\|Du_0\|_\omega \le c_\rho$, где c_ρ не зависит от τ. Отсюда при $\tau \to 0$ следует $Du \in L_{2,\,b}$, $b < a$. По неравенству Харди получаем $u \in L_{2,\,b-2}$, откуда по абсолютной непрерывности интеграла вытекает (4) с $a = b$. Повторим описанную процедуру, учитывая, что ограничения леммы 2 на $a - b$ ослабляются с уменьшением a. Если исходное $a > n - 2$, мы получим $Du \in L_{2,\,b}$ с произвольным $b > n - 2$. Если исходное $a < n - 2$, за конечное число шагов или приходим к $b = 0$, или (при $n > 6$) к некоторому $b < (n^2 - 8n + 8)^{1/2}$. Тогда по пункту 1 доказательства получаем $Du \in L_2$. Отметим еще, что если (4) выполнено с $a > n - 2$, и (5) не выполнено, то в (5) не выполнена оценка снизу, так что (4) справедливо с некоторым $a < n - 2$.

Осталось проверить выполнение интегрального тождества для решений из W_2^1. Достаточно рассмотреть пробные функции $v \in \mathring{W}_2^1 \cap L_\infty(\Omega)$. Введем срезающую функцию $\psi \in \mathring{C}^1(B_R)$, $B_R = \{x\colon r < R\}$ – шар радиуса R, $\psi = 1$ в $B_{R/2}$, $| D\psi | \le c/R$. Представляя единицу в виде $1 = (1 - \psi) + \psi$, находим

$$\left| \int A_k D_k v dx \right| = \left| \int A_k D_k (v\psi) dx \right| \le c \| Du \|_{B_R} \Big(\| Dv \|_{B_R} +$$

$$+ R^{-1} \| v \|_{B_R} \Big) \le c \| Du \|_{B_R} \left(\| Dv \|_{B_R} + R^{\frac{n}{2}-1} \right) \to 0$$

при $R \to 0$ по абсолютной непрерывности интеграла.

Примеры неустранимых особенностей. Установим, что показатель a_1 точный. А именно, при всех $K \in (0, 1)$ построим пример системы вида (1), имеющей решение такое, что $R^{a_1 - 2} \| u \|^2_{E_R} \asymp \mathrm{const}$ при $R \to 0$. На плоскости $(n = 2)$ показатель a_1 точен также для одного уравнения.

Рассмотрим систему

$$\Delta u^i + D_k \left(B_{ik} B_{jl} D_l u^j \right) = 0,$$

$B_{ik} = c\delta_{ik} + dx_i x_k |x|^{-2}$, $i, j, k, l = 1,\dots,n$, по повторяющимся индексам идет суммирование. Непосредственными вычислениями проверяется, что система имеет решение $u(x) = x\,|x|^\alpha$, $\alpha = -\frac{1}{2}n - \left(\frac{1}{4}n^2 - (n-1)d(nc+d)\left(1 + (c+d)^2\right)^{-1} \right)^{1/2}$.

Матрица коэффициентов системы симметрическая (в том смысле, что $A_{kl}^{ij} = A_{lk}^{ji}$), поэтому $K = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ [2, с. 61], где λ – модуль эллиптичности системы (отношение наибольшего собственного числа матрицы коэффициентов к наименьшему). В данном случае $\lambda = 1 + c^2(n - 1) + (c + d)^2$ [2, с.152]. Обозначим $c + d = \rho\cos\varphi$, $c\sqrt{n-1} = \rho\sin\varphi$, так что $K = (1 + 2\rho^{-2})^{-1}$. При $\cos 2\varphi = n^{-2}\left[2 \times \sqrt{n-1}\,(n^2 - (n-2)^2 K^2)^{1/2} - (n-2)^2 K\right]$, $\sin 2\varphi \ge 0$, непосредственными вычислениями проверяется, что

$$\alpha = -\frac{n}{2} - \left[\frac{n^2}{4} - 2\frac{n-1}{\cos 2\varphi + 1 + \rho^{-2}} \left(\cos 2\varphi + \frac{n-2}{2\sqrt{n-1}} \sin 2\varphi \right) \right]^{1/2} =$$

$$= -\frac{n}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1-K^2}}\left[\left(n^2-(n-2)^2K^2\right)^{1/2} - 2K\sqrt{n-1}\right] = -\frac{n+a_1}{2}.$$

Следовательно, $R^{a_1-2}\|u\|^2_{E_R} \asymp \mathrm{const}$ при $R \to 0$.

При $n = 2$ рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \left(\gamma^2 - 1\right)D_k\left(x_k x_l |x|^{-2} D_l u\right) = 0,$$

$\gamma > 1$ $k, l = 1, 2$. Оно имеет решение $u(x) = x_1|x|^{\alpha}$, $\alpha = -1 - 1/\gamma$. Матрица коэффициентов симметрическая, поэтому, как и выше, $K = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, где $\lambda = \gamma^2$. Подставляя это K в формулу для a_1, находим $a_1 = 2/\gamma$. Следовательно, $R^{a_1-2}\|u\|^2_{E_R} \asymp$ $\asymp \mathrm{const}$ при $R \to 0$.

2. *Системы с положительными нелинейными младшими членами.* В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассматривается система

$$D_k A_k(x, u, Du) - A(x, u, Du) = 0, \tag{13}$$

A_k, a, u – N-мерные вектор-функции. Предполагается выполненным (2), а также

$$A^i(x,u,\xi)u^i \geq |u|^q, \left|A^i(x,u,\xi)\right| \leq c_1|u|^{q-1}, \; q > 2. \tag{14}$$

Решения (13) предполагаются принадлежащими пространству $W_2^1 \cap L_q$.

Обозначим $q_j = q_j(K) = 2\dfrac{n+a_j}{n+a_j-2}$, $j = 0, 1$, $a_0 = (n-2)\sqrt{1-K^2}$, $a_1 = (1-$ $-K^2)^{-1/2}\left(\sqrt{n^2-K^2(n-2)^2} - 2K\sqrt{n-1}\right)$. Отметим, что $q_0 \in \left(2\dfrac{n-1}{n-2};\ \dfrac{2n}{n-2}\right)$, q_0 стремится к нижнему концу интервала при $K \to 0$, и к верхнему при $K \to 1$; $q_1 \in \left(\dfrac{2n}{n-1};\ \dfrac{2n}{n-2}\right)$, поведение q_1 при $K \to 0$ и $K \to 1$ аналогично.

Теорема 2. *Пусть* $n > 2$, $q \geq q_0(K)$. *Тогда решение* (13) *не может иметь изолированных особых точек.*

Теорема 3. *Пусть* $0 < K < \min\left(1, 2\dfrac{\sqrt{n-1}}{n-2}\right)$, $q_1(K) \leq q < q_0(K)$, $u \in \left(W_2^1 \cap L_q\right)_{\mathrm{loc}}(\Omega \setminus 0)$ – *решение* (13) *с существенной особенностью в нуле. Тогда* $Du \in L_{2,a}$ *при* $a > b$, $Du \notin L_{2,a}$ *при* $a < b$, *где* $b \in \left\{n-2, \dfrac{2q}{q-2} - n\right\}$, *причем равенство* $b = n - 2$ *возможно только при* $q \leq 2\dfrac{n-1}{n-2}$.

Замечание. Для справедливости теоремы 2 второе из условий (14) не требуется.

Доказательства теорем используют то свойство эллиптических систем с младшими членами вида (14), что их решения допускают оценку сверху, зависящую только от расстояния до множества особенностей и параметров системы. Для одного уравнения это свойство установлено в [3-5] в различных вариантах. Следующая лемма доказывается аналогично [3]. Обозначим

$$U(x) = |Du(x)|^2 + |u(x)|^q, \; U(E) = \int_E U(x)dx, \; B_R = B(y, R)$$

– шар радиуса R с центром y.

Лемма 3. *Пусть* $u \in W_2^1 \cap L_q(B_R)$ *– решение* (13) *в шаре* B_R. *Тогда*

$$U\left(B_{R/2}\right) \le cR^{n-2q/(q-2)},$$

где константа c *зависит только от параметров системы и* n.

Доказательство. Запишем систему (13) в виде

$$\Delta u - \kappa A(x,u,Du) = \Delta u - \kappa D_k A_k(x,u,Du). \tag{15}$$

Подставим в соответствующее интегральное тождество пробную функцию $u\psi^t$, $t \ge \dfrac{2q}{q-2}$, $\psi \in \overset{\circ}{C}{}^1(B_R)$ – срезающая функция: $\psi = 1$ в $B_{R/2}$, $|D\psi| \le c / R$. По (2), (14) имеем

$$\int\left(|Du|^2 + \kappa|u|^q\right)\psi^t dx \le \int\left(K|Du|^2\psi^t + c|Du||u|R^{-1}\psi^{t-1}\right)dx.$$

Учитывая $K < 1$, получаем

$$\int U\psi^t dx \le cR^{-1}\int|Du||u|\ \psi^{t-1}dx.$$

По неравенству Юнга находим

$$R^{-1}|Du||u|\psi^{t-1} \le \varepsilon|Du|^2\psi^t + \varepsilon|u|^q\psi^t + c_\varepsilon R^{-2q/(q-2)},$$

что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ приводит к утверждению леммы.

Случай $q > q_0$ теоремы 2 может быть рассмотрен на основе леммы 1. При $q = q_0$ в дополнение к лемме 1 нам понадобится следующее утверждение. Обозначим $\| u \|_a = \| r^{a/2}u; L_2 \|$, $r = |x|$.

Лемма 4. *Пусть* $u \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, $u = 0$ *в окрестности* $0, \infty$, $v = ur^a$, $0 < a < n - 2$. *Тогда*

$$\| Du\|_a \| Dv\|_{-a} \le M_0(a)^{1/2}\int DuDvdx,\ M_0(a) = 1 + \frac{a^2}{(n-2)^2 - a^2}.$$

Доказательство. Обозначая $z = ur^{a/2}$, имеем

$$r^{a/2}D_k u = D_k z - \frac{a}{2}\frac{z}{r}r_k,\ r^{-a/2}D_k v = D_k z + \frac{a}{2}\frac{z}{r}r_k,$$

$r_k = r^{-1}X_k$. Обозначая $I = \| Dz \|^2$, $J = \| r^{-1}z \|^2$ и интегрируя по частям, находим

$$\| Du\|_a^2 = I + \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + n - 2\right)J,\ \| Dv\|_a^2 = I + \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} - n + 2\right)J,\ \int DuDvdx = I - \frac{a^2}{4}J.$$

По неравенству Харди $I \ge \left(\dfrac{n-2}{2}\right)^2 J$, так что $\int DuDvdx \ge 0$ при $a \le n - 2$, и утверждение леммы следует из равенства

$$M_0(a)\left(\int DuDvdx\right)^2 - \| Du\|_a^2 \| Dv\|_{-a}^2 = (M_0 - 1)\left[I + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{(n-2)^2}{2}\right)J\right]^2 \ge 0.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть 0 – изолированная особая точка решения (13). Определим срезающую функцию $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^1\left(F_{R\rho}\right)$ так же, как при доказательстве теоремы 1. Подставим в интегральное тождество, соответствующее (15), пробную функцию $v\varphi$, $v = u_0 r^a$, $u_0 = u\varphi$. По (2), (14) находим

$$\int \left(Du_0 Dv + \kappa |u|^q r^a \varphi^2 \right) dx \le K \left\| Du_0 \right\|_a \| Dv \|_{-a} +$$
$$+ cR^{a-1} \| Du \|_{F_R} \| u \|_{F_R} + \mathrm{idem}_\rho .$$

Полагая $a = a_0$ и учитывая $M_0(a_0)^{-1/2} = K$, по лемме 4 получаем

$$\int |u|^q r^a \varphi^2 dx \le cR^{a-1} \| Du \|_{F_R} \| u \|_{F_R} + \mathrm{idem}_\rho .$$

Покрывая F_R конечным, зависящим только от n, числом шаров радиуса $R/2$ так, что концентрические шары радиуса R не содержат точку 0, по лемме 3 находим

$$\int |u|^q r^{a_0} \varphi^2 dx \le cR^{a_0 + n - 2q/(q-2)} + c_\rho .$$

При $q \ge q_0$ при $R \to 0$ отсюда следует $u \in L_{q, a_0}$ где $\| u; L_{q,a} \| = \| r^{a/q} u; L_q \|$.

Подставим теперь в интегральное тождество, соответствующее (15), пробную функцию $v\varphi$, $v = u \min (1, \tau^s | u |^s)$, $\tau > 0$ – константа, $s = s_*$. Из (2), (14) и леммы 1 получаем

$$\left(\mu(s)^{-1/2} - K \right) \int\limits_{\Omega_0} |Du| |Dv| \varphi dx + (1 - K) \int\limits_{\Omega_1} |Du|^2 \varphi dx + \kappa \int\limits_{\Omega_1} |u|^q \varphi dx \le$$
$$\le cR^{-1} \int\limits_{F_R} |Du| |v| dx + \mathrm{idem}_\rho,$$
$$\Omega_0 = \left\{ x: |u(x)| > 1/\tau \right\}, \Omega_1 = \left\{ x: |u(x)| < 1/\tau \right\}.$$

Учитывая $\mu(s_*)^{-1/2} = K$, находим

$$\int\limits_{\Omega_1} U \varphi dx \le c\tau^s R^{-1} \int\limits_{F_R} |Du| |u|^{1+s} dx + c\rho^{-1} \int\limits_{F_\rho} |Du| |u| \, dx.$$

Учитывая стандартную оценку $\| Du \|_{F_R} \le cR^{-1} \| u \|_{E_R}$, по неравенству Гельдера получаем

$$\int\limits_{\Omega_1} U \varphi dx \le c\tau^s R^{n-2-n\frac{2+s}{q}} \left\| u; L_q(E_a) \right\|^{2+s} + c_\rho .$$

По абсолютной непрерывности интеграла $R^{a_0} \left\| u; L_q(E_a) \right\|^q \to 0$ при $R \to 0$ и для $q \ge q_0$ получаем $U(\Omega_1 \cap B_\rho) \le c_\rho$. При $\tau \to 0$ отсюда следует $U(B_\rho) < \infty$.

Доказательство теоремы 3. Покроем кольца $\{x: 2^{-j} < r < 2^{-j+1}\}$ конечным, зависящим только от n, числом шаров радиуса 2^{-j-1} так, что концентрические шары радиуса 2^{-j} не содержат точку 0. По лемме 3 для решения (13) с особенностью в нуле получаем $Du \in L_{2,a}$ с любым $a > 2q/(q-2) - n$.

В случае, когда $Du \in L_{2,a}$ с некоторым $a \in (0; 2q/(q-2) - n)$, учитывая $a_1 \ge$ $\ge 2q/(q-2) - n$ (по условию теоремы) и применяя неравенство Харди, получаем, что (4) выполнено с некоторым $a < a_1$. Дальнейший ход доказательства аналогичен доказательству теоремы 1. Покажем только, как оцениваются нелинейные младшие члены, которые в системе (1) отсутствовали. Имеем

$$\left| \kappa \int A(x, u, Du) v_0 dx \right| \le c \left(\int_{F_{R\rho}} |u|^q \omega dx \right)^{1-1/q} \left(\int_{F_{R\rho}} |v - c_v|^q \omega^{1-q} dx \right)^{1/q},$$

обозначения те же, что и при доказательстве теоремы 1. Применяя вложение пространств Соболева в кольцах $\{x\colon 2^{-j} < r < 2^{-j+1}\}$, где вес эквивалентен константе, и оценивая младшие члены по неравенству Харди, находим

$$\left(\int_{F_{R\rho}} |u|^q \omega dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{F_{R\rho}} \left(r^2|Du|^2 + |u|^2\right)\left(r^n\omega\right)^{2/q} r^{-n} dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le c\left(\int_{F_{R\rho}} |Du|^2 \left(r^n\omega\right)^{2/q} r^{2-n} dx + \int_{F_{R\rho}} |u|^2 \left(r^n\omega\right)^{2/q} r^{-n} dx\right)^{1/2}.$$

Если $a - b \le q - (q-2)\dfrac{n+a}{2}$, получаем равномерную по $R, \tau > 0$ оценку

$$\left(\int_{F_{R\rho}} |u|^q \omega dx\right)^{1/q} \le c\left\| Du; L_{2,a} \right\| + c_\rho.$$

Для v аналогично

$$\left(\int_{F_{R\rho}} \left|v - c_v\right|^q \omega^{1-q}\, dx\right)^{1/q} \le c\left(\int_{F_{R\rho}} \left(r^2|Dv|^2 + \left|v - c_v\right|^2\right)\left(r^n\omega\right)^{q/2-1} \omega^{-1} dx\right)^{1/2} \le$$

$$\le c\left(\| Dv \| + \left\| r^{-1}\left(v - c_v\right) \right\|\right)_{1/\omega, F_{R\rho}},$$

если $a - b \le 2q/(q-2) - n - a$. Следовательно,

$$\left|\int A v_0 dx\right| \le c\left(\left\| Du_0 \right\|_\omega + \left\| r^{-1}\left(v - c_v\right)\right\|_{1/\omega, F_{R\rho}}\right),$$

и добавление таких членов в правую часть (12) не портит дальнейших рассуждений доказательства теоремы 1.

Примеры неустранимых особенностей. Установим точность слабейшего утверждения теоремы 2, а именно, покажем, что при любом $q < 2n/(n-2)$ система вида (13) (с некоторым, не квалифицированным K) может иметь изолированную особенность. Для уравнений второго порядка, как известно, изолированные особенности появляются только при $q < 2(n-1)/(n-2)$ [3–5]. Рассмотрим систему

$$\varepsilon\Delta u^i + D_k\left(B_{ik} B_{jl} D_l u^j\right) = c u^i |u|^{q-2},$$

$$\varepsilon > 0,\ B_{ik} = (n-2)\delta_{ik} + n x_i x_k |x|^{-2},\ i, j, k, l = 1, \ldots, n.$$

При любых $\varepsilon, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 2$, она имеет решение $u(x) = x\,|x|^\alpha$, $\alpha = -q/(q-2)$, $c = (n-1)^2(n+2\alpha)^2 + \varepsilon\alpha(\alpha+n)$. Если $\alpha \neq -n/2$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем $c > 0$. Остается отметить, что особенность будет неустранимой при $\alpha < -n/2$, что равносильно $2 < q < 2n/(n-2)$.

1. *Serrin J.* Local behaviour of solutions of quasilinear elliptic equations//Acta math. – 1964. – **111**. – P. 247–302.
2. *Кошелев А. И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. – М.: Наука, 1986.– 240 с.
3. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой// Мат. заметки.– 1988.– **44**, № 4.– С. 457–468.
4. *Brezis H., Veron L.* Removable singularities for some nonlinear elliptic equations // Arch. Ration. Mech. and Anal.– 1980.– **75**, №1.– P. 1–6.
5. *Veron L.* Singular solutions of some nonlinear elliptic equations // Nonlinear Analysis. – 1981. –**5**, №3.– P. 225–242.

Получено 01. 04. 92