УДК 62-50

А. М. Ковалев, д-р физ.-мат. наук, **В. Ф. Щербак**, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрены задачи, возникающие в приложенях теории управления динамических систем, когда часть переменных математической модели объекта неизвестна и подлежит определению по информации о выходе системы. Основными среди них являются задачи наблюдения и идентификации, где неизвестны соответственно состояние системы и ее параметры, а также задача обращения системы, в которой ищется управление. На основе анализа отображений, порожденных расширенным вектором измерений, получены условия однозначной разрешимости указанных задач по одной и по множеству траекторий.

Розглянуті задачі, що виникають в застосуваннях теорії керування динамічних систем, коли частина змінних математичної моделі об'єкта невідома і підлягає визначенню за інформацією про вихід системи. Основними серед них є задачі спостереження та ідентифікації, де невідомі відповідно стан системи та її параметри, а також задача обернення системи, в якій шукається керування. На основі аналізу відображень, породжених розширеним вектором вимірювань, одержані умови однозначної розв'язності вказаних задач за однією і за множиною траєкторій.

Уравнения модели и расширенный вектор измерений. Представим модель управляемого объекта в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \ x(0) = x_0 \in D \subseteq R^n, \tag{1}$$

на любой траектории которой известны значения функций

$$y = h(x, u), \tag{2}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — вектор состояния, $y = (y^1, \ldots, y^k)$ — выход системы (1), $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — управление либо неизвестные параметры. Полагаем, что функции f, h, u являются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов, $t \in T = [0, t_k]$.

Наряду с функцией измерений (2) рассмотрим расширенный вектор измерений z_N, составленный из всех компонент выхода $h(x, u)$ и его производных, взятых в силу системы дифференциальных уравнений (1) до некоторого порядка N включительно

$$y^{(0)}(t) = h^{(0)}(x, u) = h(x, u),$$

$$y^{(j)}(t) = h^{(j)}(x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(j)}) = \frac{\partial h^{(j-1)}(x,u,\dot{u},\ldots,u^{(j-1)})}{\partial x} f(x,u) +$$

$$+ \sum_{r=0}^{j-1} \frac{\partial h^{(j-1)}(x,u,\dot{u},\ldots,u^{(j-1)})}{\partial u^{(r)}} u^{(r+1)}. \tag{3}$$

Обозначив $v_i = (\dot{u}^T, \ldots, u^{(i)T})^T$, $z^i = (y^T, \dot{y}^T, \ldots, y^{(i)T})^T$, $H_i(x, u, v_i) = (h^{(0)T}(x, u), h^{(1)T}(x, u, v_1), \ldots, h^{(i)T}(x, u, v_i))^T$, запишем (3) в виде

$$z_N(t) = H_N(x, u, v_N). \tag{4}$$

Возможность решения обратных задач для системы (1), (2) изучается на основе анализа локальной структуры отображения переменных x, u, v_N, порождаемого соотношениями (4). Поэтому полученные результаты справедливы лишь для тех функций $u(\cdot)$, значения которых вместе со значениями производных $v(\cdot)$ принадлежат исследуемой области. Это обстоятельство определяет выбор класса допустимых управлений U посредством задания области

$$D_N \subseteq R^{(N+1)m},$$

$$U(D_N) = \left\{ u(\cdot): (u^T(t), v_N^T(t))^T \in D_N, t \in T \right\}.$$

Наблюдаемость по части переменных, идентифицируемость, обратимость. Обратные задачи для системы (1), (2) возникают в случаях, когда переменные математической модели x, u неизвестны полностью или частично. Начальное состояние x_0 также может быть неопределенно. Так как выход $y(t)$ — реально измеряемый сигнал, то факт существования решения очевиден и вопрос возможности решения обратной задачи сводится к вопросу о его единственности. Если двум различным значениям неопределенных переменных соответствует один и тот же выход (2), то однозначно восстановить их численным методом невозможно. Поэтому условием разрешимости обратных задач будем считать инъективность отображения, устанавливаемого системой (1), (2) между изучаемой группой неизвестных и множеством сигналов $\{y(\cdot)\}$. С общих позиций основные особенности такого рода передаточных отображений проявляются в задаче наблюдения части фазового вектора, идентификации, а также в задаче обращения системы (1), (2).

Рассмотрим первую из них, состоящую в определении значений $x_\alpha(t)$, где $x = (x_\alpha^T, x_\beta^T)^T$, по значениям $y(t)$. Для простоты будем полагать, что управление отсутствует. Так как у различных решений системы (1) координаты x_α могут совпадать, то в передаточном отображении $\{x_\alpha(\cdot)\} \to \{y(\cdot)\}$ любому $x_\alpha(\cdot)$ соответствует в общем случае множество решений системы (1) $X_\alpha = \{x'(\cdot, x_0): x_0 \in D, x'_\alpha(t) \equiv x_\alpha(t), t \in T\}$, которое функцией измерений (2) переводится во множество выходов $Y_a = \{y(\cdot): y = h(x), x \in X_\alpha\}$. Если любая функция из Y_a соответствует только лишь x_α, то x_α — наблюдаемая часть переменных.

Определение 1. *Система* (1), (2) *наблюдаема по переменным* x_α *в области* $D \times T$, *если для любых решений* $x_1(t), x_2(t), x_{\alpha 1}(t) \not\equiv x_{\alpha 2}(t), x_1(0), x_2(0) \in \in D$ *существует* $t \in T$ *такой, что* $h(x_1(t)) \neq h(x_2(t))$.

Для определения условий наблюдаемости x_α воспользуемся следующим соображением. Для любого N вектор функции $y(t)$ взаимно однозначно соответствует $z_N(t) = (y^T(t), \dot{y}^T(t), \ldots, y^{(N-1)}(t)^T)^T$. Если для некоторого N равенства (4) $z_N = H_N(x_\alpha, x_\beta)$ определяют неявно однозначную функцию $z_N \to x_\alpha = G(z_N)$, то любой $y \in Y_\alpha$ также однозначно соответствует x_α, следовательно, отображение $\{x_\alpha\} \to \{y\}$ инъективно.

Аналогичный способ используется и в задаче идентификации параметров $u(t)$. Передаточное отображение задается следующей схемой: $u(\cdot) \to X_u = \{x(\infty, x_0, u): \dot{x} = f(x, u), x_0 \in D\} \to Y_u = \{y(\cdot): y = h(x, u), x \in X_u\}$. Инъективность этого отображения определяет свойство идентифицируемости.

Определение 2. *Система* (1), (2) *идентифицируема в области* $D \times D_N \times \times T$, *если для любых* $u_1, u_2 \in U(D_N)$ *и любых решений* $x_1(t) \in X_{u_1}, x_2(t) \in X_{u_2}$ *существует* $t \in T$ *такой, что* $h(x_1(t), u_1(t)) \neq h(x_2(t), u_2(t))$.

Если равенства $z_N = H_N(x, u, v_N)$ определяют однозначную функцию $u = = G(z_N)$, то из сопоставления $y \leftrightarrow z_N \to u = G(z_N)$ получаем, что передаточное отображение $\{u\} \to \{y\}$ инъективно.

В задаче обращения [1, 2], состоящей в построении системы дифференциальных уравнений, у которой вход $y(t)$ порождает на выходе $u(t)$, начальное состояние x_0 известно. В этом случае управлению $u(t)$ соответствует единственный выход $y(t) = h(x(t, x_0, u), u(t))$, следовательно, условием обращения системы (1), (2) можно считать биективность этого соответствия.

Определение 3. *Система* (1), (2) *обратима в области* $D \times D_N \times T$, *если для любого* $x_0 \in D$ *и любых* $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in U(D_N)$ *существует* $t \in T$ *такой, что* $h(x(t, x_0, u_1), u_1(t)) \neq h(x(t, x_0, u_2), u_2(t))$.

Известные [1, 2] критерии обратимости систем, линейных по управлению, получены с помощью методов дифференциальной геометрии. Ниже будет показано, что для обратимости системы (1), (2) достаточно существования неявной функции типа $u = G(x, z_N)$, описывающей решения уравнения (4).

Таким образом, разрешимость обратных задач связана с существованием неявных функций специального вида $x_\alpha = G(z_N)$, $u = G(z_N)$, $u = G(x, z_N)$. Докажем условия наличия такого рода решений у системы (4).

Лемма об инъективности дифференцируемого отображения относительно части переменных. Пусть переменные $x \in E \subseteq R^n$, $y \in F \subseteq R^m$, $z \in P \in \in R^l$ связаны системой l независимых уравнений

$$z^i - H^i(x, y) = 0, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{5}$$

заданных в $E \times F \times P$, причем $H \in C^p(E \times F; P)$ и $z_0 = H(x_0, y_0)$.

Считая z известным, поставим задачу определения условий, при которых часть неизвестных, а именно вектор x, может быть однозначно определена для любого вектора z из некоторой окрестности точки z_0. В частности, при $l = n + m$ по теореме о неявных функциях существуют окрестности S_x, S_y, S_z точек x_0, y_0, z_0 соответственно и функции G_x, G_y такие, что все решения (5) $(x, y) \in S_x \times S_y$ определяются для $z \in S_z$ по формулам $x = G_x(z)$, $y = G_y(z)$. При $l < n + + m$ и постоянстве $\operatorname{rank} \partial H(x, y) / \partial(x, y)$ в $S_x \times S_y$ прообраз всякой точки $z \in \in S_z$ является многообразием размерности $n + m - l$, описываемым формулами

$$x_\alpha = g_x(z, x_\beta, y_\beta), \; y_\alpha = g_y(z, x_\beta, y_\beta), \tag{6}$$

где $x = (x_\alpha^T, x_\beta^T)^T$, $y = (y_\alpha^T, y_\beta^T)^T$. Вектор x может быть найден и в этом случае при условии, что структура прообраза всякой точки z имеет вид $x = G_x(z)$, $y_\alpha = g_y(z, x, y)$. Докажем условия такого представления решений системы (5).

Обозначим $J(x, y) = \partial H(x, y) / \partial(x, y)$, $J_x(x, y) = \partial H(x, y)/\partial x$, $J_y(x, y) = \partial H(x, y)/\partial y$. При сделанных предположениях о дифференцируемости ранги всех якобиевых матриц будем считать постоянными в рассматриваемых областях.

Лемма 1. *Пусть в области* $E \times F \times P$ *задана система уравнений* (5), *причем* $\operatorname{rank} J(x_0, y_0) = n + \operatorname{rank} J_y(x_0, y_0)$. *Тогда существуют окрестности* S_x, S_y, S_z *точек* $x_0, y_0, z_0 = H(x_0, y_0)$ *соответственно, функция* $G \in C^p(S_z, S_x)$ *такие, что для* $(x, y, z) \in S_x \times S_y \times S_z$ *координаты* x *множества решений* (x, y) *системы* (5) *описываются формулой* $x = G(z)$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{rank} J_x(x_0, y_0) = n$. По построению $J = (J_x, J_y)$, следовательно, $\operatorname{rank} J \le \operatorname{rank} J_x + \operatorname{rank} J_y$ или $\operatorname{rank} J_x \ge \operatorname{rank} J - \operatorname{rank} J_y = n$. А так как матрица J_x состоит из n столбцов, то $\operatorname{rank} J_x \le n$. Неравенства совместны лишь при $\operatorname{rank} J_x = n$.

Обозначим $s = \operatorname{rank} J_y(x_0, y_0) \le m$ и пусть невырожденный минор максимального порядка имеет вид

$$\partial(H^1,\dots, H^s)/\partial(y^1,\dots, y^s). \tag{7}$$

Тогда для любого $x \in E$ в некоторой окрестности S_y точки y_0 функции $H^1(x, y),\dots, H^s(x, y)$ независимы как функции переменной y, а остальные зависят от них

$$z^{s+i} = g^i(x^1,\dots, x^n, z^1,\dots, z^s), i = 1, n. \tag{8}$$

Покажем, что $\operatorname{rank} \partial(g^1,\dots, g^n)/\partial(x^1,\dots, x^n) = n$. С этой целью сделаем в (5) замену переменных $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x}^i = x^i, \bar{y}^j = H^j(x, y), \bar{y}^k = y^k, i = 1, n; j = 1, s; k = s + 1, m. \tag{9}$$

В новых координатах равенства (5) примут вид

$$z^i - \bar{y} = 0, z^j - g^j(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^s) = 0, i = 1, s; j = 1, n,$$

а матрица $J(x, y)$ преобразуется в $\bar{J}(\bar{x},\bar{y}) = \partial(z)/\partial(\bar{x},\bar{y})$:

$$\bar{J}(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} 0_{s\times n} & E_{s\times s} & 0_{s\times(m-s)} \\ \dfrac{\partial(g^1,\dots,g^n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)} & \dfrac{\partial(g^1,\dots,g^n)}{\partial(y^1,\dots,y^s)} & 0_{n\times(m-s)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Так как пребразование невырождено, $\operatorname{rank} \bar{J}(\bar{x},\bar{y}) = \operatorname{rank} J(x, y) = n + s$. С другой стороны, из вида (10) следует $\operatorname{rank} \bar{J}(\bar{x},\bar{y}) = \operatorname{rank} \partial(g^1,\dots,g^n)/\partial(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n) + s$, откуда (с учетом $\bar{x} = x$) получаем $\operatorname{rank} \partial(g^1,\dots, g^n)/\partial(x^1,\dots, x^n) = n$. Последнее по теореме о неявных функциях означает существование окрестностей S_x, S_z точек x_0, z_0 и функции $G_z \in C^p(S_z; S_x)$ таких, что решения уравнений (8) задаются формулой $x = G(z)$. Лемма доказана.

Условия локальной разрешимости обратных задач. Используя лемму 1, докажем достаточные условия наблюдаемости по части переменных. Предположим, что система (1), (2) не зависит от u_i, следовательно, равенства (4) не содержат u, v_N.

Теорема 1. *Пусть для некоторого N в области $D \times T$*

$$\operatorname{rank} \partial H_N(x)/\partial x = \dim x_\alpha + \operatorname{rank} \partial H_N(x)/\partial x_\beta.$$

Тогда система (1), (2) *наблюдаема в некоторой области $d \times \tau \subseteq D \times T$ по x_α.*

Доказательство. По лемме 1 соотношения (4) для данного N определяют неявную функцию $x_\alpha = G(z_N)$, где $x \in S_x$, $z \in S_z$. Предположим, что система (1), (2) наблюдаема в области $d \times \tau$, $d \subseteq S_x$, $\tau \subseteq T$ по x_α. Тогда существуют два решения $x_1(t), x_2(t) \in S_x$, $x_{1\alpha}(t) \not\equiv x_{2\alpha}(t)$, $t \in \tau$, таких, что $h(x_1(t)) \equiv h(x_2(t)) = y(t)$. Так как вектор $z_N(t)$ образован из функции $y(t)$ и ее производных, то $x_{1\alpha}(t) \equiv$ $\equiv x_{2\alpha}(t) = G(z_N(t))$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогично доказываются достаточные условия идентифицируемости.

Теорема 2. *Пусть для некоторого N в области $D \times D_N \times T$*

$$\operatorname{rank} \partial H_N(x, u, v_N)/\partial(x, u, v_N) = m + \operatorname{rank} \partial H_N(x, u, v_N)/\partial(x, v_N).$$

Тогда система (1), (2) *идентифицируема в некоторой области $d \times d_N \times \tau \subseteq$ $\subseteq D \times D_N \times T$.*

Доказательство. Условия теоремы по лемме 1 определяют в некоторой области изменения переменных $x \in S_x, u \in S_u, v_N \in S_v, z \in S_z$ однозначную функцию $u = G(z_N)$. Пусть система не является идентифицируемой в области $(d \subset S_x) \times (d_N \subseteq S_u \times S_v) \times \tau$. Тогда найдутся две функции $u_1(t), u_2(t), u_1(t) \not\equiv u_2(t)$, два решения $x_1(t), x_2(t)$, им соответствующие, такие, что для $t \in \tau$, $x_1(t), x_2(t) \in d$, $(u_1^T(t), v_1^T(t))^T, (u_2^T(t), v_{2N}^T(t))^T \in d_N$, $h(x_1(t), u_1(t)) \equiv h(x_2(t), u_2(t)) = y(t)$. Поскольку $z_N(t)$ однозначно определяется функцией $y(t)$, то $u_1(t) \equiv u_2(t) = G(z_N(t))$, что противоречит предположению. Следовательно, система (1), (2) идентифицируема в $d \times d_N \times \tau$.

Условия обратимости системы (1), (2) оказываются более слабыми, чем соответствующие условия идентифицируемости, что свидетельствует о существовании информации об x_0 для восстановления входного воздействия.

Теорема 3. *Пусть для некоторого* N *в области* $D \times D_N \times T$

$$\operatorname{rank} \partial H_N(x, u, v_N) / \partial (u, v_N) = m + \operatorname{rank} \partial H_N(x, u, v_N) / \partial v_N.$$

Тогда система (1), (2) *обратима в некоторой области* $d \times d_N \times \tau \subseteq D \times D_N \times T$.

Доказательство. Зафиксируем в (4) переменную x. По лемме 1 для каждого $x \in D$ существует функция G и области S_u, S_v, S_z такие, что $u = G(x, z_N)$ для $z \in S_z$, $(u, v) \in S_u \times S_v \subseteq D_N$. Предположим теперь, что система необратима в некоторой области $(d \subseteq D) \times (d_N \subseteq S_u \times S_v) \times (\tau = [0, \varepsilon])$, т. е. существует $x_0 \in D$, функции $u_1(t), u_2(t) \in U(S_u \times S_v)$, $u_1(t) \not\equiv u_2(t)$, $t \in \tau$, такие, что $h(x(t, x_0, u_1), u_1(t)) \equiv h(x(t, x_0, u_2), u_2(t)) = y(t)$. Подставим в дифференциальные уравнения (1) вместо u его выражение через x, z_N:

$$\dot{x} = f(x, G(x, z_N)) = F(x, z_N), \; x(0) = x_0. \tag{11}$$

По построению $x(t, x_0, u_1), x(t, x_0, u_2)$ являются решениям дифференциальных уравнений (11), им соответствует одна и та же функция времени $z_N(t)$, начальные условия у них совпадают. Следовательно, $x(t, x_0, u_1) \equiv x(t, x_0, u_2)$ для $t \in \tau$. В итоге получаем $u_1(t) = G(x(t, x_0, u_1), z_N(t)) = G(x(t, x_0, u_2), z_N(t)) = u_2(t)$, что противоречит требованию $u_1(t) \not\equiv u_2(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Выполнения условий теоремы 3 для некоторого N достаточно для существования локально обратной системы порядка $n + m(N - 1)$ с m-мерным входом. Действительно, перепишем (11) в виде

$$\begin{gathered} \dot{\xi} = F(\xi, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1}, \psi), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \ldots, \dot{\zeta}_{N-2} = \zeta_{N-1}, \dot{\zeta}_{N-1} = \psi, \end{gathered} \tag{12}$$

$$v = G(\xi, \zeta_1, \ldots, \zeta_{N-1}, \psi). \tag{13}$$

Положим $\xi(0) = x_0$, $\zeta_i(0) = y^{(i)}(0)$, $\psi(t) = y^N(t)$. Тогда решением системы дифференциальных уравнений (12) будут функции $\xi(t) = x(t, x_0, u)$, $\zeta_i(t) = y^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, N-1}$, а выход (13) совпадет с искомым управлением $v = u(t)$. Таким образом, система (12), (13) восстанавливает по известным $x_0, y^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, N-1}$, $y^N(t)$ состояние $x(t)$ и вход $u(t)$, а значит, является обращением системы (1), (2).

Используем описанный способ построения обратной системы в задаче функциональной управляемости [2], т.е. в задаче о том, какая функция $\varphi(t)$ может быть выходом системы (1). Для этого введем множество допустимых значений

$y^{(i)}(0)$, $i = \overline{0, N-1}$, $z_{N-1}(D, D_N) = \{H_{N-1}(x_0, u(0), v_{N-1}(0)),\ x_0 \in D,\ u \in \in U(D_N)\}$. Единственным ограничением на выход $y(t)$ в процессе определения посредством (12), (13) порождающего управления $u(t)$ является принадлежность соответствующего вектора $z_{N-1}(0)$ множеству Z_{N-1}. Это обстоятельство позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть система* (1), (2) *для некоторогпо* N *удовлетворяет условиям теоремы* 3 *и в некоторой области* $D \times D_N \times T$ *является обратимой. Тогда для любой функции* $\varphi(t)$ *такой, что* $(\varphi^T(0), \dot{\varphi}^T(0), \ldots, \varphi^{(N-1)}(0)^T) \in Z_{N-1}(D, D_N)$, *найдутся* $x_0 \in D$, $u \in U(D_N)$ *такие, что* $\varphi(t) \equiv h(x(t, x_0, u), u(t))$, $t \in T$.

Проверяя для различных $N = 0, 1, \ldots$ условия теорем 1-3, можно определить возможность решения для системы (1), (2) той или иной обратной задачи. Если условия теоремы 1 не выполнены для $N = n - 1$, а теорем 2, 3 — для $N = n + m - -1$, то система (1), (2) локально не обладает соответственно свойствами наблюдаемости по x_α, идентифицируемости, обратимости. Докажем это для задачи наблюдения части координат. Отсутствие индекса N означает, что $N = n - 1$.

Теорема 5. *Пусть в области* $D \times T$ $\operatorname{rank} \partial H / \partial x < \dim x_\alpha + \operatorname{rank} \partial H / \partial x_\beta$. *Тогда система* (1), (2) *наблюдаема по* x_α *в некоторой области* $d \times \tau \subseteq D \times T$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank} \partial H / \partial x = s < n$. Так как все независимые функции x в совокупности (3) могут содержаться лишь среди первых $n - 1$ производных выхода [3], то

$$\begin{array}{l} \dot{z}^1 = g^1(z^1, \ldots, z^s), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{z}^s = g^s(z^1, \ldots, z^s). \end{array} \qquad (14)$$

Пусть $\operatorname{rank} \partial H / \partial x_\beta = r$, $\dim x_\alpha = \alpha$. Тогда по условию $\alpha < s - r$. Выберем у матрицы $\partial H / \partial x$ невырожденный минор максимального порядка, взяв в качестве первых r столбцов все независимые столбцы матрицы $\partial H / \partial x_\beta$, а оставшиеся $s - r < \alpha$ — у матрицы $\partial H / \partial x_\alpha$, так что $\det \partial(H^1, \ldots, H^s) / \partial(x_{\beta 1}, x_{\alpha 1}) \neq 0$, где $x_\alpha = (x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2})$, $x_\beta = (x_{\beta 1}, x_{\beta 2})$, $x_{\alpha 1} = (x^1, \ldots x^{s-r})$, $x_{\beta 1} = (x^{\alpha+1}, \ldots, x^{\alpha+r})$. Прообраз всякой точки z является $n - s$–мерным многообразием, описываемым функциями $x_{\alpha 2} = g_\alpha(z, x_{\alpha 1}, x_{\beta 1})$, $x_{\beta 1} = g_\beta(z, x_{\alpha 1}, x_{\beta 1})$. Зафиксируем точку $z = z_0$ и выберем на этом многообразии точки x_1^0, x_2^0 такие, что $x_{1\alpha}^0 \neq x_{2\alpha}^0$. Пусть $x_1(t), x_2(t)$ — решения системы (1): $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$. Соответствующие им функции $z_1(t)$, $z_2(t)$ по построению удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (14), а поскольку $z_1(0) = z_2(0) = z_0$, то существует интервал $\tau = [0, \varepsilon)$ такой, что $z_1 \equiv z_2$. Так как все компоненты выхода $y = h(x)$ содержатся среди $z^1, \ldots, z^s$, либо функционально через них выражаются, то $h(x_1(t)) = h(x_2(t))$. Теорема доказана.

Доказательство соответствующих теорем для свойств идентифицируемости и обратимости приведены в [4, 5].

Использование нескольких траекторий. Отсутствие у системы (1), (2) свойства идентифицируемоси в области $D \times D_N \times T$ означает существование $u_1, u_2 \in U(D_N)$, $x_1 \in X_{u_1}$, $x_2 \in X_{u_2}$ таких, что $h(x_1(t), u_1(t)) \equiv h(x_2(t), u_2(t))$. В то же время может оказаться, что для любых $x_1, x_2 \in X_u$ отображение $u \to (h^T(x_1, u), h^T(x_2, u))^T$ инъективно. В этом случае можно говорить об идентифицируемости по двум траекториям и т.д.

Определение 4. *Система* (1), (2) *идентифицируема в области* $D \times D_N \times T$ *по* λ *траекториям, если для любых* $u_1, u_2 \in U(D_N)$ *и любых решений* $x_{11}, \ldots, x_{1\lambda} \in X_{u_1}, x_{21}, \ldots, x_{2\lambda} \in X_{u_2}$

$$(h^T(x_{11}, u_1), \ldots, h^T(x_{1\lambda}, u_1)) \not\equiv (h^T(x_2, u_2), \ldots, h^T(x_{2\lambda}, u_2)), \ t \in T.$$

Понятие обратимости обобщается и на случай нескольких траекторий.

Определение 5. *Система* (1), (2) *обратима в области* $D \times D_N \times T$ *по* λ *траекториям, если для любых* $u_1, u_2 \in U(D_N)$ *и любых точек* $x_{10}, \ldots, x_{\lambda 0} \in D$

$$(h^T(x(t, x_{10}, u_1), u_1), \ldots, h^T(x(t, x_{\lambda 0}, u_1), u_1)) \not\equiv$$
$$\not\equiv (h^T(x(t, x_{10}, u_2), u_2), \ldots, h^T(x(t, x_{\lambda 0}, u_2), u_2)), \ t \in T.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений порядка N, формально составленную из λ систем (1):

$$\dot{x}_1 = f(x_1, u),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{x}_\lambda = f(x_\lambda, u), \quad x_i(0) = x_{i_0} \in D, \quad i = \overline{1, \lambda}, \tag{15}$$

и измеряемую функцию размерности λk

$$\eta(t) = (h^T(x_1, u), \ldots, h^T(x_\lambda, u)). \tag{16}$$

Непосредственно из определений 2-5 следует, что система (1), (2) идентифицируема (обратима) по λ траекториям тогда и только тогда, когда система (15), (16) идентифицируема (обратима) по одной траектории. Тем самым получение условий разрешимости указанных задач при λ экспериментах (измерениях) сводится к применению теорем 2, 3 к системам (15), (16). Пусть $N = n + m - 1$.

Теорема 6. *Пусть в области* $D^\lambda \times D_N \times T$

$$\operatorname{rank} \partial(H(x_1, u, v), \ldots, H(x_\lambda, u, v)) / \partial(x_1 \ldots, x_\lambda, u, v) =$$
$$= m + \operatorname{rank} \partial(H(x_1, u, v), \ldots, H(x_\lambda, u, v)) / \partial(x_1 \ldots, x_\lambda, u, v).$$

Тогда система (1), (2) *идентифицируема в некоторой области* $d \times d_N \times \tau \subseteq \subseteq D \times D_N \times T$ *по* λ *траекториям.*

Теорема 7. *Пусть в области* $D^\lambda \times D_N \times T$

$$\operatorname{rank} \partial(H(x_1,u,v), \ldots, H(x_\lambda,u,v))/\partial(u,v) = m + \operatorname{rank}\partial(H(x_1,u,v), \ldots, H(x_\lambda,u,v))/\partial v.$$

Тогда система (1), (2) *обратима в некоторой области* $d \times d_N \times \tau \subseteq D \times D_N \times T$ *по* λ *траекториям.*

Оценим число траекторий, по которому система может быть идентифицируемой. Пусть область D_N содержит 0, тогда неидентифицируемость при u – – const влечет неидентифицируемость при $u \in C^p(T; R^m)$.

Положим u – const, $v_N = 0$. Пусть $\partial H(x, u)/\partial x = s \le n$, $\partial H(x, u)/\partial(x, u) = r$, причем $\det \partial(H^1 \ldots, H^s) / \partial(x^1, \ldots, x^s) \neq 0$. Тогда $H^{s+i} = g^i(H^i, \ldots, H^s, u)$, $i = \overline{1, r - s}$. Сделаем замену переменных $x \to \bar{x}$

$$\bar{x}^i = H^i(x, u), \ \bar{x}^j = x^j, \ i = \overline{1, s}; \ j = \overline{s + 1, n}. \tag{17}$$

Матрица $\partial H / \partial(x, u)$ преобразуется в матрицу

$$\frac{\partial H(\bar{x},u)}{\partial(\bar{x},u)}=\begin{pmatrix} E_{s\times s} & 0_{s\times(n-s)} & 0_{s\times m} \\ X(\bar{x},u) & 0_{(r-s)(n-s)} & A(\bar{x},u) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $X(\bar{x}, u) = \partial(g^1, \dots, g^{r-s})/\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^s)$, $A(\bar{x}, u) = \partial(g^1, \dots, g^{r-s})/\partial u$.

Для (18) всегда выполнено равенство $\operatorname{rank} \partial H(\bar{x}, u)/\partial(\bar{x}, u) = s + \operatorname{rank} A(\bar{x}, u)$, поэтому условия теоремы 2 имеют вид $\operatorname{rank} A(\bar{x}, u) = m$. Рассматривая систему (1), (2) на λ решениях $x_1, \dots, x_\lambda$ и преобразуя каждое из них по формулам (17), получаем $\operatorname{rank} \partial(H(\bar{x}_1, u), \dots, H(\bar{x}_\lambda, u)/\partial(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\lambda, u) = \lambda s + \operatorname{rank} A_\lambda(\bar{x}_1, \dots$ $\dots, \bar{x}_\lambda, u)$, где $A_\lambda(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\lambda; u) = (A^T(\bar{x}_1, u), \dots, A^T(\bar{x}_\lambda, u))^T$. С учетом теоремы 6 достаточным условием идентифицируемости по λ траекториям является условие $\operatorname{rank} A_\lambda(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\lambda, u) = m$. Используем его для оценки требуемого для идентификации числа траекторий.

При увеличении λ на 1 ранг $A_{\lambda+1}$ либо совпадает с рангом A_λ и тогда привлечение новых решений не изменяет свойство идентифицируемости, либо увеличивается на q, $1 \le q \le \operatorname{rank} A$. Поэтому максимальное число траекторий ($q = 1$ на каждом этапе) $\lambda_{\max} = m + 1 - \operatorname{rank} A$, а минимальное ($q = \operatorname{rank} A$) $\lambda_{\min} =$ $= [(m-1)/\operatorname{rank} A] + 1$ где [ ] — функция Антье. Выразим ранг преобразованной матрицы $A(\bar{x}, u)$ через ранги исходных $\partial H(x, u)/\partial(x, u)$, $\partial H(x, u)/\partial x$. Так как (17) — невырожденное преобразование, то

$$\operatorname{rank} \partial H(x, u)/\partial(x, u) = \operatorname{rank} \partial H(\bar{x}, u)/\partial(\bar{x}, u) = s + \operatorname{rank} A(\bar{x}, u).$$

Следовательно, $\alpha = \operatorname{rank} A(x, u) = \partial H(x, u)/\partial(x, u) - \partial H(x, u)/\partial x$. Из изложенного вытекает следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть область D_N содержит начало координат. Тогда система* (1), (2) *не может быть идентифицируема по $\lambda < \lambda_{\min}$ траекторий. Если же она неидентифицируема по $\lambda > \lambda_{\max}$ траекторий, то она неидентифицируема по любому числу траекторий.*

Использование нескольких измерений расширяет возможность восстановления $u(t)$. В частности, для идентифицируемости любой системы (1) по некоторому числу траекторий достаточно, чтобы $h(x, u) = x$, если только $f(x, u)$ не может быть записана с использованием меньшего числа параметров $v(u)$, $\dim v < m$.

Лемма 2 [4]. *Функция $f(x, u)$ непредставима меньшим числом параметров u в области $D \times D_0$ тогда и только тогда, когда для любых λ точек $x_1, \dots, x_\lambda \in$ $\in D$*

$$\operatorname{rank}(\partial f(x_1, u)/\partial u, \dots, \partial f(x_\lambda, u)/\partial u) = m,$$

$$\lambda = m + 1 - \operatorname{rank} \partial f(x, u)/\partial u.$$

Изучая идентифицируемость системы (1) при $y = x$ с помощью вектора $z =$ $= (x, f(x, u))$, по теореме 6 и лемме 2 получаем, что свойство непредставимости $f(x, u)$ меньшим числом параметров достаточно для определения $u(t)$ по $\lambda_{\max} = m + 1 - \operatorname{rank} \partial f(x, u)/\partial u$ траекториям.

1. *Silvermann L. M.* Inversion of multivariable linear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1969. – AC **14**, №3. – P.270–276.
2 *Hirschorn R. M.* Invertibility of nonlinear control systems // SIAM J. Contr. and Optim. – 1979. – **17**, №2. – P.289–297.
3. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 176с.
4. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Условия идентифицируемости нелинейных механических систем // Механика твердого тела. – 1984. – Вып.16. – С.77–91.
5. *Щербак В. Ф.* Идентифицируемость механических систем с известным начальным состоянием // Там же. – 1985. – Вып.17. – С.83–87.

Получено 01.04.92