УДК 519.21

Ю.В. Коломієць, мол. наук. співробітник (Ін-т прикл.математики і механіки АН України, Донецьк)

УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКИХ ЗБУРЕНІ СТРИБКУВАТИМИ МАРКОВСЬКИМИ ПРОЦЕСАМИ

Розглядається слабка збіжність у розумінні розподілів розв'язків рівнянь з частинними похідними параболічного типу з періодичними швидкоосцилюючими коефіцієнтами, збуреними стрибкуватими марковськими процесами, що функціонують у "швидкому" часі, з скінченною множиною станів. Доводиться слабка компактність мір, породжених розв'язками рівнянь, і показується слабка збіжність розв'язків до єдиного розв'язку проблеми мартингалів, що відповідає стохастичному рівнянню з частинними похідними.

Рассматривается слабая сходимость в смысле распределений решений уравнений в частных производных параболического типа с периодическими быстроосциллирующими коэффициентами, возмущенными скачкообразными марковскими процессами, которые функционируют в "быстром" времени, с конечным множеством состояний. Доказывается слабая компактность мер, порождаемых решениями уравнений, и показывается слабая сходимость решений к единственному решению проблемы мартингалов, соответствующей стохастическому уравнению в частных производных.

Розглянемо питання про слабку збіжність при $\varepsilon \to 0$ розв'язків рівняння

$$\frac{d}{dt}u_t^\varepsilon + A\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, Z_t^\varepsilon\right)u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}B\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, Z_t^\varepsilon\right)u_t^\varepsilon = 0,\ u_0^\varepsilon = h \in H^1(R^n), \tag{1}$$

де $Z_t^\varepsilon = Z_{t/\varepsilon^2}$ – стрибкуватий однорідний марковський процес з скінченною множиною станів $Y = (1, 2, \ldots, m)$, заданий на ймовірнісному просторі (Ω, F, P); оператори A і B мають вигляд

$$A(t,z) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{a}_{ij}(t, z, x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\right) + \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i(t, z, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{a}_0(t, z, x),$$

$$B(t, z) = \sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i(t, z, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{b}_0(t, z, x).$$

Процес Z_t задається твірним оператором Π, який визначається матрицею

$$Q = (q_{ij})_{i,j = 1, 2, \ldots, m},\ q_{ii} < 0,\ q_{ij} \geq 0,\ i \neq j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 0. \tag{2}$$

Нехай $\mathfrak{B}_Y$ – клас всіх підмножин Y, $(\Theta, \mathfrak{F})$ – деякий вимірний простір з σ–скінченною мірою $m\,(d\theta)$ і $\nu\,(d\theta \times dt)$ – пуассонова міра з незалежними значеннями на $\Theta \times R^n$, для якої $M\,\nu\,(d\theta \times dt) = m\,(d\theta)\,dt$. Можна побудувати [1] таку $\mathfrak{B}_Y \otimes \mathfrak{F}$-вимірну функцію $f(z, \theta)$ з $Y \times \Theta$ в Θ, для якої

$$m\{\theta: f(z, \theta) \neq 0\} = -q_{zz},$$

$$m\{\theta: f(z, \theta) \in G\} = \sum_{j \in G \setminus \{\theta\}} q_{zj}, \quad G \in \mathfrak{F}, \quad 0 \notin G.$$

Тоді

$$dZ_t = \int_\Theta f(Z_t, \theta)\, \nu(d\theta \times dt).$$

Відзначимо, що твірний оператор процесу Z_t діє на просторі $\mathbb{B}(Y)$ всіх $\mathfrak{B}_Y$-вимірних обмежених дійсних функцій $g(z)$ з нормою $\|g\| = \max_z |g(z)|$ так: $\Pi g(z) = \sum_{i=1}^m q_{zi}\, g(i)$. Таким чином,

$$dZ_t^\varepsilon = \int_\Theta f(Z_t^\varepsilon, \theta)\nu^\varepsilon(d\theta \times dt),\ Z_0^\varepsilon = Z_0,$$

$$M\, \nu^\varepsilon(d\theta \otimes dt) = \varepsilon^{-2} m(d\theta)\, dt.$$

Позначимо через $\hat{\Pi}$ матрицю $(\pi_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$, елементи якої $\pi_{ij} = q_{ij}/q_{ii}$, якщо $i \neq j$, і 0, якщо $i = j$. Введемо умови:

Z 1. Існує l таке, що $\inf \pi_{ij}^l > 0$, де π_{ij}^l — елементи $\hat{\Pi}^l$.

Z 2. Рівняння $\det|Q - \lambda E| = 0$ не має чисто уявних коренів, які б мали вигляд $i\,2\pi n$, де n – ціле відмінне від нуля число.

Умова $Z\,1$ забезпечує існування єдиного розв'язку $p_1, \dots, p_m$ [2] системи рівнянь

$$\sum_{i \neq j}^m q_{ij}\, p_i = -q_{jj} p_j,\ \sum_{i=1}^m p_i = 1. \tag{3}$$

Зауваження 1. Якщо $q_{ij} > 0$, $i \neq j$, то існування єдиного додатного розв'язку системи (3) випливає з теореми Перрона-Фробеніуса [3].

З умови $Z\,2$ випливає, що система

$$\frac{d}{dt} d_i(t) - \sum_{j=1}^m q_{ji}\, d_j(t) = 0$$

не має 1-періодичних розв'язків, залежних від t. Тоді якщо $g_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, — 1-періодичні неперервно диференційовні функції, для яких $\sum \int_0^1 g_i(t) p_i\, dt = 0$, то система [4]

$$\frac{d}{dt} h_i(t) + \sum_{j=1}^m q_{ij}\, h_j(t) = g_i(t),\ \sum_{i=1}^m \int_0^1 h_i(t) dt = 0$$

має єдиний 1–періодичний розв'язок. Крім того, існує $C > 0$ така, що для кожного $t \in [0; 1]$

$$|h(t)| \leq C |g(t)|_{L^2[0;1]}.$$

Домовимося буквою C позначати різні константи, не залежні від ε. В одночленах проводиться сумування за повтореними індексами. Через $(\cdot,\cdot)$ і $|\cdot|$ позначимо скалярний добуток та норму в гільбертовому просторі $L^2(R^n)$, через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ і $\|\cdot\|$ — відношення двоїстості між гільбертовими просторами $H^1(R^n)$ і $H^{-1}(R^n)$ та норму на $H^1(R^n)$ ($H^{-1}(R^n)$ позначає простір, спряжений до простору Соболєва $H^1(R^n)$). Позначимо через $C_{t,x,b}^{k,l}$ клас функцій $f(t, x)$ k раз неперервно диференційовних по t і l раз — по x, обмежених разом з вказаними похідними. Символ "$\Rightarrow$" використовується для означення слабкої збіжності мір. $\overline{L^2(R^n)}$ – простір $L^2(R^n)$ з слабкою топологією.

Якщо H — гільбертів простір, то $g \boxtimes h$ — елемент $\mathfrak{L}(H)$, який визначається таким чином:

$$(g \boxtimes h)u = (h, u)_H\, g, \ u \in H.$$

Відносно коефіцієнтів операторів A і B введемо умови:

***A* 1.** Коефіцієнти $\overline{b}_i \in C^{1,3}_{t,x,b}$, $\overline{b}_0 \in C^{1,2}_{t,x,b}$, $\overline{a}_{ij} \in C^{1,1}_{t,x,b}$, $\overline{a}_i, \overline{a}_0 \in C^{1,0}_{t,x,b}$, і періодичні по t з періодом 1 для всіх $z \in Y$.

***A* 2.** Існує $\gamma > 0$ така, що $\forall x, \xi \in R^n$, $z \in Y$, $t \in R_+$

$$\overline{a}_{ij}(t, z, x)\xi_i\xi_j \geq \gamma\,|\,\xi\,|^2.$$

З цих умов випливає, що

$$A \in L^\infty(R_+ \times Y, \mathfrak{L}(H^1(R^n); H^{-1}(R^n))),$$

$$B \in L^\infty(R_+ \times Y, \mathfrak{L}(H^1(R^n); L^2(R^n)))$$

та існують константи $\overline{\gamma} > 0, \overline{\lambda} > 0$ такі, що $\forall\ u \in H^1(R^n), z \in Y, t \in R_+$

$$\langle A(t, z)u, u\rangle + \overline{\lambda}\,|\,u\,|^2 \geq \overline{\gamma}\,\|\,u\,\|^2 \tag{4}$$

З [5] випливає, що за цих умов існує єдиний розв'язок рівняння (1) $\forall T > 0$

$$u^\varepsilon \in L^2(\overline{\Omega} \times\,]0, T[; H^1(R^n)) \cap L^2(\overline{\Omega}; C([0, T], L^2(R^n))).$$

Припустимо ще, що виконується умова ***A Z***:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j \int_0^1 \overline{b}_i(t, j, x)dt = 0,\ x \in R^n,\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — єдиний розв'язок системи (3).

Зафіксуємо $T > 0$. Визначимо простір $\Omega = C([0, T]; \overline{L^2(R^n)}) \cap L^2(0, T; H^1(R^n))$ і наділимо його топологією, що є супремумом топології рівномірної збіжності на $C([0, T]; \overline{L^2(R^n)})$ і слабкої топології на $L^2(0, T; H^1(R^n))$. Через $\mathfrak{F}$ позначимо борелівську σ–алгебру на Ω. При кожному $\varepsilon > 0$ через μ^ε будемо позначати ймовірнісну міру Радона на $(\Omega, \mathfrak{F})$, породжену $\{u_t^\varepsilon, t \in [0, T]\}$.

Покажемо, що сім'я мір $\{\mu^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ слабко компактна і будь-яка її гранична міра μ є розв'язком проблеми мартингалів. З єдиності розв'язку цієї проблеми мартингалів випливає $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu$.

Лема 1. *Нехай* u^ε — *розв'язок рівняння* (1). *Тоді існує* $C > 0$ *така, що для кожного* $\varepsilon > 0$

$$M\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| u_t^\varepsilon \right|^4\right] + M\int_0^T \left| u_r^\varepsilon \right|^2 \left\| u_r^\varepsilon \right\|^2 dr \leq C.$$

Доведення. Візьмемо функцію $\varphi(u) = |\,u\,|^4, \varphi'(u) = 4\,|\,u\,|^2 u$. Для кожного $k = 0, 1, \ldots, n$ визначимо функції $\psi_k(t, j, x), j = \overline{1, m}$, як розв'язок системи рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_k(t, i, x) + \sum_{j=1}^{m} q_{ij}\psi_k(t, j, x) = \overline{b}_k(t, i, x),$$

$$\sum\nolimits_{j=1}^{m} \int_0^1 \psi_k(t, i, x)dt = 0. \tag{5}$$

З умов $Z\,1, Z\,2, A\,Z$ випливає, що система (5) має єдиний 1-періодичний по t розв'язок. Функції $\psi_k(t, i, x)$ по x мають ті ж властивості, що й функції $\overline{b}_k(t, i, x)$.

Для всіх $z \in Y$ визначимо оператори

$$F(t, z) = \psi_k(t, z, x)\frac{\partial}{\partial x_k} + \psi_0(t, z, x),$$

$$D(t, z) = F(t, z) + F^*(t, z) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\psi_k(t, z, x) + 2\psi_0(t, z, x).$$

З умов і визначення функцій $\psi_k(t, z, x)$ випливає, що існує $C > 0$ така, що

$$|D(t, z)u| \le C|u|, \quad \|D(t, z)u\| \le C\|u\| \tag{6}$$

рівномірно по t для всіх $z \in Y$.

Розглянемо функцію

$$\overline{F}(t, z, u) = (F(t, z)u, \varphi'(u)) = 2(D(t, z)u, u)|u|^2,$$

що задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{F}(t,i,u) + \sum_{j=1}^{m} q_{ij}\overline{F}(t,j,u) = 4(B(t,i)u,u)|u|^2, \quad i = \overline{1,m}.$$

Як і в роботі [2], запишемо приріст функції

$$\varphi(u_t^\varepsilon) + \varepsilon\overline{F}\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, Z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right).$$

Після скорочення членів порядку ε^{-1} будемо мати

$$\left|u_t^\varepsilon\right|^4 + 2\varepsilon\left(D\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, Z_t^\varepsilon\right)u_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right)\left|u_t^\varepsilon\right|^2 + 4\int_0^t\left\langle A\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right\rangle\left|u_r^\varepsilon\right|^2 dr =$$

$$= |h|^4 + 2\varepsilon(D(0, Z_0)h, h)|h|^2 - 4\varepsilon\int_0^t\left\langle A\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right\rangle\left(D\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right)dr -$$

$$-4\varepsilon\int_0^t\left\langle A\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon, D\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon\right\rangle\left|u_r^\varepsilon\right|^2 dr -$$

$$-4\int_0^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right)\left(D\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right)dr -,$$

$$-4\int_0^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon D\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon\right)\left|u_r^\varepsilon\right|^2 dr +$$

$$+2\varepsilon\int_0^t\int_\Theta\left(\left[D\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon + f(Z_r^\varepsilon, \theta)\right) - D\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon\right)\right]u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right)\left|u_r^\varepsilon\right|^2 \chi^\varepsilon(d\theta \times dt), \tag{7}$$

де $\chi^\varepsilon(d\theta \times dt) = \nu^\varepsilon(d\theta \times dt) - \varepsilon^{-2}m(d\theta)dt$ — мартингальна міра. Останній доданок в правій частині (7) позначимо через $\varepsilon\alpha_t^\varepsilon$. Скориставшись співвідношеннями (4) і (6), з (7) одержимо

$$\left|u_t^\varepsilon\right|^4(1 - C\varepsilon) + 4\overline{\gamma}\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^2\left\|u_r^\varepsilon\right\|^2 dr \le |h|^4(1 + C\varepsilon) +$$

$$+(C\varepsilon + \overline{\gamma})\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^2\left\|u_r^\varepsilon\right\|^2 dr + (C + 4\overline{\lambda})\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^4 dr + \varepsilon\alpha_t^\varepsilon.$$

Звідси для достатньо малих ε будемо мати

$$M\left(\sup_{r\le t}\left|u_r^\varepsilon\right|^4\right)+\bar{\gamma}M\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^2\left\|u_r^\varepsilon\right\|^2dr\le C|h|^4+$$

$$+CM\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^4dr+\varepsilon CM\left(\sup_{r\le t}\left|\alpha_r^\varepsilon\right|\right). \tag{8}$$

Процес α_t^ε є локальним мартингалом, для якого послідовність $\tau_n=\inf\{t$: $\left|u_t^\varepsilon\right|^4\ge n\}\wedge T$ є локалізуючою.

Використавши нерівність Девіса [6], з (8) одержимо

$$\frac{1}{2}M\left(\left|u_r^\varepsilon\right|^4\right)\le\frac{1}{2}M\left(\sup_{r\le t}\left|u_r^\varepsilon\right|^4\right)+\bar{\gamma}M\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^2\left\|u_r^\varepsilon\right\|^2dr\le$$

$$\le C|h|^4+CM\int_0^t\left|u_r^\varepsilon\right|^4dr.$$

Застосовуючи тепер лему Гронуолла, завершуємо доведення леми.

Аналогічно доводиться така лема.

Лема 2. *Нехай u^ε – розв'язок рівняння* (1). *Тоді існує $C>0$ така, що для кожного $\varepsilon>0$*

$$M\int_0^T\left\|u_r^\varepsilon\right\|^2dr\le C.$$

Нехай $\beta\in H^3(\mathrm{R}^n)$. Визначимо для $\eta>0$, $\overline{\omega}\in\overline{\Omega}$ модуль неперервності

$$\gamma_\varepsilon(\overline{\omega},\eta)=\sup\left\{\left|\left(u_t^\varepsilon(\overline{\omega}),\beta\right)-\left(u_s^\varepsilon(\overline{\omega}),\beta\right)\right|,\ |t-s|\le\eta,\ s,t\in[0,T]\right\}.$$

Лема 3. *Існує R_+-значна функція $\rho(\nu,\eta)$, визначена для $0<\nu\le1$ і $0<\eta\le$ $\le T$ така, що*

1) *для всіх фіксованих $\nu\in\,]0,1]$ при $\eta\searrow0$ $\rho(\nu,\eta)\searrow0$;*

2) $P(\gamma_\varepsilon(\overline{\omega},\eta)\le\rho(\nu,\eta),\ \forall\eta\in\,]0,T])\ge1-\nu,\ \forall\varepsilon>0,\ \nu\in\,]0,1]$.

Доведення повторює наведене в [6] доведення твердження 2.4 для функції

$$x_t^\varepsilon=\left(u_t^\varepsilon,\beta\right)-\varepsilon\left(u_t^\varepsilon,F^*\left(\frac{t}{\varepsilon^2},Z_t^\varepsilon\right)\beta\right).$$

Як показано в [7], з лем 1-3 випливає справедливість наступного твердження.

Теорема 1. *Сім'я імовірнісних мір $\{\mu^\varepsilon,\varepsilon>0\}$ на $(\Omega,\mathfrak{F})$ слабко компактна.*

Визначимо процес $u_t(\omega)=\omega(t)$, $t\in[0,T]$. Нехай $\mathfrak{F}_t=\sigma\{u_r,r\in[0,t]\}$. Тоді $\mathfrak{F}_T=\mathfrak{F}$. Крім того, нехай μ – деяка гранична точка послідовності μ^ε на $(\Omega,\mathfrak{F})$.

Доведемо, що для всіх $\beta\in H^4(R^n)$ для функцій $\varphi(x)=x$ і $\varphi(x)=x^2$ вираз

$$\varphi((u_t,\beta))-\varphi((u_0,\beta))+\int_0^t\left\langle\hat{A}u_r,\beta\right\rangle\varphi'((u_r,\beta))dr+\frac{1}{2}\int_0^t(R(u_r)\beta,\beta)\varphi''((u_r,\beta))dr$$

є $\mu - \mathfrak{F}_t$–локальним мартингалом, де

$$\hat{A} = \sum_{k=1}^{m} p_k \int_0^1 [A(t,k) + F(t,k)B(t,k)]dt,$$

$$R(u) = -\sum_{k=1}^{m} p_k \int_0^1 (B(t,k)u \boxtimes F(t,k)u + F(t,k)u \boxtimes B(t,k)u)dt.$$

Згідно з [8] це означає, що міра μ є розв'язком проблеми мартингалів з коефіцієнтами $\hat{A}$ і $R(u)$ (скорочено будемо писати: п.м. $(\hat{A}, R(u))$).

Теорема 2. *Міра* μ — *розв'язок п.м.* $(\hat{A}, R(u))$.

Доведення. Нехай $\beta \in H^4(R^n)$, $\varphi(x) = x$ або $\varphi(x) = x^2$. Визначимо з допомогою оператора $F(t, z)$ (лема 1) функцію

$$\varphi_1(t, z, u) = (F(t, z)u, \beta)\varphi'((u, \beta)),$$

що задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(t,i,u) + \sum_{j=1}^{m} q_{ij}\varphi_1(t,j,u) = (B(t,i)u,\beta)\varphi'((u,\beta)),\ i = \overline{1,m}.$$

Нехай $U_r\colon \Omega \to R$ — обмежений неперервний $\mathfrak{F}_r$–вимірний функціонал. Тоді для функції $\varphi((u,\beta)) + \varepsilon\varphi_1(t, z, u)$ можемо записати

$$M\left\{U_r(u^\varepsilon)\left[\varphi((u_t^\varepsilon,\beta)) - \varphi((u_r^\varepsilon,\beta)) + \int_r^t \left\langle\left[A\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left. + F\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right) B\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)\right] u_t^\varepsilon, \beta\right\rangle \varphi'((u_s^\varepsilon,\beta))ds +$$

$$\left.\left. + \int_r^t \left(B\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)u_s^\varepsilon, \beta\right)\left(F\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)u_s^\varepsilon, \beta\right)\varphi''((u_s^\varepsilon,\beta))ds\right]\right\} =$$

$$= \varepsilon M\left\{U_r(u^\varepsilon)\left[\varphi_1\left(\frac{r}{\varepsilon^2}, Z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\right) - \varphi_1\left(\frac{t}{\varepsilon^2}, Z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - \right.\right.$$

$$- \int_r^t \left\langle A\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)u_s^\varepsilon, F^*\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)\beta\right\rangle \varphi'((u_s^\varepsilon,\beta))ds -$$

$$\left.\left. - \int_r^t \left\langle A\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)u_s^\varepsilon, \beta\right\rangle \left(F\left(\frac{s}{\varepsilon^2}, Z_s^\varepsilon\right)u_s^\varepsilon, \beta\right)\varphi''((u_s^\varepsilon,\beta))ds\right]\right\}. \tag{9}$$

Визначимо функції e_{ij}, c_{ij}, g_{kl}, $i, j = \overline{1,n}$, $k, l = 0, 1, \ldots, n$ як єдині розв'язки відповідних систем рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}e_{ij}(t,l,x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} q_{lk}e_{ij}(t,k,x) = \sum_{k=1}^{m} p_k \int_0^1 \overline{a}_{ij}(t,k,x)dt - \overline{a}_{ij}(t,l,x), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_0^1 e_{ij}(t,k,x)dt = 0 \quad \forall x \in R^n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}c_{ij}(t,l,x)+\sum\limits_{k=1}^{m}q_{lk}c_{ij}(t,k,x)=\sum\limits_{k=1}^{m}p_k\int\limits_0^1\psi_i(t,k,x)\overline{b}_j(t,k,x)dt-\psi_i(t,l,x)\overline{b}_j(t,l,x), \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_0^1 c_{ij}(t,k,x)dt=0 \quad \forall x\in R^n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}g_{ij}(t,l,x,y)+\sum\limits_{k=1}^{m}q_{lk}g_{ij}(t,k,x,y)=\sum\limits_{k=1}^{m}p_k\int\limits_0^1\psi_i(t,k,x)\overline{b}_j(t,k,y)dt-\psi_i(t,l,x)\overline{b}_j(t,l,y), \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_0^1 g_{ij}(t,k,x,y)dt=0 \quad \forall x,y\in R^n. \end{cases}$$

Аналогічно визначаються функції e_i, c_i, $i=0,1,\ldots,n$. Введемо оператори

$$E(t,x)=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[e_{ij}(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\,\cdot\,)\right]+e_i(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+e_0(t,z,x),$$

$$C(t,x)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[c_{ij}(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\,\cdot\,)\right]+c_i(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c_0(t,z,x).$$

Позначимо $u_i(x)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}u(x)$, $u_0(x)=u(x)$. Введемо функцію

$$H(t,z,x)=\langle[E(,z)+C(t,z)]u,\beta\rangle\varphi'((u,\beta))+$$

$$+\int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n}\sum_{i,j=0}^{n}g_{i,j}(t,z,x,y)u_i(x)u_j(y)\beta(x)\beta(y)dxdy\varphi''((u,\beta)),$$

що задовольняє співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t,i,u)+\sum_{k=1}^{m}q_{ik}H(t,k,u)=\mathcal{M}(t,\,i,\,u),\quad i=\overline{1,m}, \tag{10}$$

де

$$\mathcal{M}(t,\,z,\,u)=\left\langle\left\{\sum_{k=1}^{m}p_k\int\limits_0^1[A(t,k)+F(t,k)B(t,k)]dt-\right.\right.$$

$$\left.\left.-[A(t,z)+F(t,z)B(t,z)]\right\}u,\beta\right\rangle\varphi'((u,\beta))+$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{m}p_k\int\limits_0^1(B(t,k)u,\beta)(F(t,k)u,\beta)dt-(B(t,z)u,\beta)(F(t,z)u,\beta)\right]\varphi''((u,\beta)). \tag{11}$$

Запишемо приріст функції $\varepsilon^2H\left(\dfrac{t}{\varepsilon^2},Z_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon\right)$, $t>s$, скориставшись співвідношенням (10):

$$\varepsilon^2M\left\{U_s(u^\varepsilon)\left[H\left(\frac{t}{\varepsilon^2},Z_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon\right)-H\left(\frac{s}{\varepsilon^2},Z_s^\varepsilon,u_s^\varepsilon\right)+\int\limits_s^t\left\langle A\left(\frac{r}{\varepsilon^2},Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon,\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\partial}{\partial u}H\left(\frac{r}{\varepsilon^2},Z_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon\right)\right\rangle dr\right]\right\}+\varepsilon M\left\{U_s(u^\varepsilon)\left[\int\limits_s^t\left(B\left(\frac{r}{\varepsilon^2},Z_r^\varepsilon\right)u_r^\varepsilon,\frac{\partial}{\partial u}H\left(\frac{r}{\varepsilon^2},Z_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon\right)\right)dr\right]\right\}=$$

$$=M\left\{U_s(u^\varepsilon)\left[\int\limits_s^t\mathcal{M}\left(\frac{r}{\varepsilon^2},Z_r^\varepsilon,u_r^\varepsilon\right)dr\right]\right\}. \tag{12}$$

Далі, враховуючи (11), (12), із співвідношення (9) одержуємо

$$M^{\varepsilon}\Big\{U_s(u)\big[\varphi((u_t,\beta))-\varphi((u_s,\beta))+$$

$$+\int_s^t\left\langle\sum_{k=1}^m p_k\int_0^1[A(t,k)+F(t,k)B(t,k)]\,dt\,u_r,\beta\right\rangle\varphi'((u_r,\beta))\,dr+$$

$$+\int_s^t\left[\sum_{k=1}^m p_k\int_0^1(B(t,k)u_r,\beta)(F(t,k)u_r,\beta)\right]\varphi''((u_r,\beta))\,dr\big]\Big\}=\varepsilon^2 M\{\ldots\}+\varepsilon M\{\ldots\}, \quad (13)$$

де M^{ε} — математичне сподівання за мірою μ^{ε}.

Нехай μ – деяка гранична міра послідовності μ^{ε}. Використовуючи оцінку леми 1, перейдемо до границі в рівності (13). Тоді міра μ – розв'язок п.м. ($\hat{A}$, $R(u)$).

Наведемо допоміжне твердження.

Лема 4. *Нехай* $u, \beta \in H^1(R^n)$. *Тоді*

$$(R(u)\beta,\beta)=\sum_{i,j=1}^m p_i q_{ij}\int_0^1\big([F(s,i)+F(s,j)]u,\beta\big)^2 ds.$$

Доведення. Скориставшись співвідношеннями (5), будемо мати

$$-2\sum_{i=1}^m p_i\int_0^1\big(B(s,i)u,\beta\big)\big(F(s,i)u,\beta\big)ds=-2\sum_{i=1}^m p_i\sum_{k,l=0}^n\int_0^1\int_{R^n}\left[\frac{\partial}{\partial s}\psi_k(s,i,x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^m q_{ij}\psi_k(s,j,x)\right]u_k(x)\beta(x)dx\int_{R^n}\psi_l(s,i,y)u_l(y)\beta(y)dyds=$$

$$=-2\sum_{i=1}^m p_i\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial s}\big(F(s,i)u,\beta\big)\right]\big(F(s,i)u,\beta\big)ds-2\sum_{i=1}^m p_i q_{ii}\int_0^1\big(F(s,i)u,\beta\big)^2 ds-$$

$$-2\sum_{j\neq i}p_i q_{ij}\int_0^1\big(F(s,j)u,\beta\big)\big(F(s,i)u,\beta\big)ds. \quad (14)$$

Перший доданок в правій частині (14) дорівнює нулю, оскільки функції $\psi_k(s, i, x)$ 1-періодичні по s. Далі, скориставшись співвідношеннями (3), одержимо

$$-\sum_{i=1}^m p_i q_{ii}\int_0^1(F(s,i)u,\beta)^2 ds=\sum_{i=1}^m\sum_{j\neq i}p_j q_{ji}\int_0^1(F(s,i)u,\beta)^2 ds. \quad (15)$$

З другого боку, використовуючи (2), знаходимо

$$-\sum_{i=1}^m p_i q_{ii}\int_0^1(F(s,i)u,\beta)^2 ds=\sum_{j=1}^m\sum_{i\neq j}p_j q_{ji}\int_0^1(F(s,j)u,\beta)^2 ds. \quad (16)$$

Просумуємо співвідношення (15), (16) і підставимо в (14). Лема доведена.

Теорема 3. *П.м.* ($\hat{A}$, $R(u)$) *має єдиний розв'язок.*

Доведення. Ми маємо міру μ — розв'язок п.м. ($\hat{A}$, $R(u)$). Тоді [8] $N_t = u_t - h + \int_0^t \hat{A}u_r dr$ є $\mu - \mathfrak{F}_t$–мартингал в $L^2(R^n)$ такий, що $N_t \boxtimes N_t - \int_0^1 R(u_r)dr$ — мартингал в просторі операторів з скінченним слідом з $L^2(R^n)$ в $L^2(R^n)$. Зрозуміло, що $R(u) = R^*(u)$. З леми 4, додатності p_i і невід'ємності q_{ij} випливає $R(u) \geq 0 \quad \forall u \in H^1(\mathrm{R}^n)$. Існує $C > 0$ така, що

$$\mathrm{Sp}(R(u)) = -2\sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^1 (B(s,i)u, F(s,i)u)ds \leq C\|u\|^2.$$

Ядро оператора $R(u)$ має вигляд $\sum_{k,l=0}^{n} u_k(x) Q((k,x);(l,y))u_l(y)$, де

$$Q((k,x);(l,y)) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^1 \left[\overline{b}_k(s,i,x)\psi_l(s,i,y) + \overline{b}_l(s,i,y)\psi_k(s,i,x)\right]ds$$

— додатнє симетричне ядро. В [7] показано, що в цьому випадку існує $K(u) \in \mathfrak{L}(L^2(R^n))$ такий, що $R(u) = K(u)K^*(u)$ і відображення $u \to K(u)$ лінійне.

Нехай S — ядерний симетричний невід'ємний оператор на $L^2(R^n)$ і $0 < \mathrm{Sp}(S) < \infty$. Тоді [5] на деякому ймовірнісному просторі можна побудувати відповідний йому вінеровський процес W_s. Визначимо $L(u) = K(u)\, S^{-1/2}$. Тоді $R(u) = L(u)SL^*(u)$ і $N_t = \int_0^t L(u_r)dW_r$. Таким чином, u_t припускає зображення у вигляді розв'язку стохастичного рівняння з частинними похідними

$$u_t + \int_0^t \hat{A}u_r dr = h + \int_0^t L(u_r)dW_r. \tag{17}$$

Далі існує $C > 0$ така, що

$$\left| 2\sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^1 \langle F(s,i)B(s,i)u, u\rangle ds - \mathrm{Sp}(R(u)) \right| =$$

$$= 2\left| \sum_{i=1}^{m} p_i \int_0^1 \left(B(s,i)u, \left[F^*(s,i) + F(s,i)\right]u\right)ds \right| \leq C\|u\| |u|. \tag{18}$$

З умови $A2$ і співвідношень (18) випливає, що існують $k > 0, \alpha > 0$ такі, що

$$-2\langle \hat{A}u, u\rangle + \mathrm{Sp}(R(u)) + \alpha \|u\|^2 < k\,|u|^2.$$

Звідси і з лінійності операторів $\hat{A}$, $R(u)$ випливає існування єдиного розв'язку рівняння (17) [5]. Теорема доведена.

З теорем 1 – 3 випливає така теорема.

Теорема 4. *При* $\varepsilon \to 0$ $\mu^\varepsilon \Rightarrow \mu$ — *єдиного розв'язку п.м.* $(\hat{A}, R(u))$.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611с.
2. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328с.
3. *Evaus L. C., SouganidisP. E.* A PDE approach to certain large deviation problems for systems of parabolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1989. – № 6. – P.229–258.
4. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1973. – 718с.
5. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях. // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1979. – **14**. – С.72–147.
6. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512с.
7. *Bouc R., Pardoux E.* Asymptotic analysis of P.D.E.s with wideband noise disturbances, and expansion of the moments // Stochast. Anal. and Appl. – 1984. – **2**, № 4. – P.369–422.
8. *Viot M.* Solutionce et unicite de diffusions a valeurs dans un espace de Hilbert // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1974. – № 10. – 152p.

Одержано 05.02.91