УДК 517.95

В. В. Курта, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

О ТЕОРЕМАХ ФРАГМЕНА—ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Сформулированы аналоги хорошо известной в теории аналитических функций теоремы Фрагмена–Линделефа для градиентов решений широкого класса квазилинейных уравнений эллиптического типа. Приведены примеры, иллюстрирующие точность полученных результатов для градиентов решений уравнений вида $\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u) = f(x, u, \nabla u)$, где $f(x, u, \nabla u)$ – локально ограниченная в $\mathbb{R}^{2n+1}$ функция, $f(x,0,\nabla u)=0$, $uf(x, u, \nabla u) \ge c|u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^{\gamma}$, $\alpha > 1$, $c > 0$, $q > 0$, γ – произвольное действительное число, $n \ge 2$.

Основную роль в используемой в работе технике играет аппарат емкостных характеристик.

Сформульовані аналоги добре відомої в теорії аналітичних функцій теореми Фрагмена–Лінделефа для градієнтів розв'язків широкого класу квазілінійних рівнянь еліптичного типу. Наведені приклади, що ілюструють точність одержаних результатів для градієнтів розв'язків рівнянь виду $\operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-2}\nabla u) = f(x, u, \nabla u)$, де $f(x, u, \nabla u)$ – локально обмежена в $\mathbb{R}^{2n+1}$ функція, $f(x,0,\nabla u)=0$, $uf(x, u, \nabla u) \ge c|u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^{\gamma}$, $\alpha > 1$, $c > 0$, $q > 0$, γ – довільне дійсне число, $n \ge 2$.

Основну роль у використаній в роботі техніці відіграє апарат ємнісних характеристик.

1. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть $A_i(x, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – измеримые функции, определенные для почти всех $x \in D$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, и такие, что

$$(\xi A) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x,\xi) \ge 0. \tag{1}$$

Обозначим через L дифференциальный оператор, определенный равенством

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} A_i(x,\nabla u). \tag{2}$$

Будем говорить, следуя [1], что оператор L принадлежит классу $A(\alpha)$, $1 < \alpha < \infty$, если он удовлетворяет условию (1) и существует постоянная $k > 0$ такая, что для любых $\xi, \psi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in D$ выполнено

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x,\psi)\right)^{\alpha} \le k|\xi|^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i A_i(x,\psi)\right)^{\alpha-1} \tag{3}$$

Рассмотренные в (1) классы $A(\alpha)$ содержат достаточно большой набор линейных и нелинейных операторов. Так, дифференциальные операторы, определенные соотношением (2) и удовлетворяющие условиям

$$\nu_1|\xi|^{\alpha} \le \sum_{i=1}^{n} \xi_i A_i(x,\xi), \ \ |A(x,\xi)| \le \nu_2|\xi|^{\alpha-1}$$

с некоторыми абсолютными постоянными $\nu_1, \nu_2 > 0$, принадлежат $A(\alpha)$.

Линейные равномерно эллиптические операторы дивергентного вида с измеримыми коэффициентами принадлежат $A(\alpha)$ при $\alpha = 2$.

Не оговаривая особо, будем считать, что оператор L принадлежит фиксированному классу $A(\alpha)$ с произвольным образом выбранным $\alpha \in (1, \infty)$.

Изучаются качественные свойства обобщенных решений уравнения вида

$$Lu = f(x, u, \nabla u), \tag{4}$$

где функция $f(x, u, \nabla u)$ локально ограничена в $\mathbb{R}^{2n+1}$,

$$f(x, 0, \xi) = 0, \ \ uf(x, u, \nabla u) \geq c|u|^{1+q}(1 + |\nabla u|)^{\gamma}, \tag{5}$$

$c \geq 0$, $q \geq 0$, γ — произвольное действительное число.

Список работ, посвященных данной проблематике, достаточно широк (см., например, [2–12]). В частности, из результатов, установленных в [12], элементарно получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $q > \alpha - 1$, $\gamma \geq 0$, D *– неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ *– обобщенное решение уравнения вида* (4) *в* D *(определение см. ниже), обращающееся в нуль на* ∂D. *Тогда* $u(x) \equiv 0$..

В настоящей работе получены аналоги теоремы Фрагмена - Линделефа для градиентов решений уравнения вида (4) в зависимости от параметров α, q и γ.

2. Пусть D – произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $W^{1,\infty}(D, E)$ пополнение по норме пространства $W^{1,\infty}(D)$ функций из $C^{\infty}(D)$, равных нулю на E. Будем говорить, что $u(x)$ обращается в нуль на $E \subset \partial D$, если для любого $R > 0$, $u(x) \in W^{1,\infty}(D \cap B(0, R), E \cap B(0, R))$. Здесь и ниже через $B(0, R)$ обозначен шар радиуса R с центром в начале координат.

Функцию $u(x)$ будем называть обобщенным решением уравнения вида (4), если $u(x) \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(D)$ и для любой $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\infty}(D)$ выполняется тождество

$$-\int_D \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} A_i(x, \nabla u)\, dx = \int_D f(x, u, \nabla u)\varphi(x)\, dx. \tag{6}$$

На протяжении всей работы мы будем использовать аппарат емкостных характеристик. Приведем сейчас понятие нелинейной вариационной емкости конденсатора и оценку p–емкости кольцевой области в $\mathbb{R}^n$ в удобном для дальнейшего виде.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, Δ – произвольная подобласть D, E и $F \subset \Delta$ — непересекающиеся, замкнутые относительно Δ множества. Всякую тройку $(E, F; \Delta)$ описанного вида будем называть конденсатором.

Зададим $p \geq 1$. Величину

$$\operatorname{cap}_p(E, F; \Delta) = \inf \int_{\Delta} |\nabla \psi|^p\, dx,$$

где infimum берется по всем функциям $\psi(x) \in C^{\infty}(D)$, обращающимся в единицу на E, равным нулю на F, назовем p–емкостью конденсатора $(E, F; \Delta)$.

Обозначим $U_r = D \cap B(0, r)$, $C_r = D \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(0, r))$ для произвольного неотрицательного r.

Обозначения U_r и C_r явно не зависят от D, однако из контекста всегда будет ясно, по отношению к какой области идет речь.

Лемма 1 [13, с. 45]. *Пусть* D *– неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $R > r > 0$. *Обозначим через* $S_D(t)$ *пересечение области* D *с* n*-мерной сферой радиуса* $t > 0$ *с центром в начале координат, а через* $|S_D(t)|$ *– площадь.* $S_D(t)$. *Тогда*

$$\operatorname{cap}_p(\overline{U}_r, \overline{C}_R; D) \leq \left(\int_r^R \left| S_D(t) \right|^{-1/(p-1)} dt\right)^{p-1}. \tag{7}$$

Частным случаем неравенства (7) является хорошо известная оценка p-емкости кольцевой области в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2 [14, с.177]. *Пусть* D *– неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $R > r > 0$, $p > n$. *Тогда*

$$\operatorname{cap}_p(\overline{U}_r, \overline{C}_R; D) \le \omega_n \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{(p-n)/(p-1)}\right)^{1-p} R^{n-p}, \tag{8}$$

где ω_n *– площадь поверхности единичного шара в* $\mathbb{R}^n$.

3. Пусть $m_R = \operatorname*{ess\,sup}_{D\bigcap B(0,R)} (1+|\nabla u|)$ для произвольных неотрицательных R, области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и функции $u(x) \in W^{1,\infty}(D \cap B(0, \mathrm{R}))$.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha - 1 \ge q > 0$, $\gamma \ne \alpha - 1 - q$, D *– неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ *— решение уравнения* (4) *в* U_R, *обращающееся в нуль на* $\partial D \bigcap B(0,R)$, $R > r > 0$. *Тогда если* $0 < \alpha\varepsilon < \min\{\gamma - \alpha + 1 + q, q\}$ *при* $\gamma > \alpha - 1 - q$ *и* $0 < \alpha\varepsilon < q$ *при* $\gamma < \alpha\text{-}1\text{-}q$, *то справедливы следующие неравенства*:

$$k\left(\frac{1+q}{\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} (m_R)^{(\alpha-1-q-\gamma+\alpha\varepsilon)^+/(1+\varepsilon)} \left(\operatorname{cap}_{(1+q)/\varepsilon}\left(\overline{U}_r, \overline{C}_R; \overline{D}\right)\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge$$

$$\ge c\left(\int_{U_r} |u|^{1+q} \left(1+|\nabla u|\right)^{\gamma} dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}, \tag{9}$$

$$k\left(\frac{1+q}{1+\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} (m_R)^{(\alpha-1-q-\gamma+\alpha\varepsilon)^+/(1+\varepsilon)} \left(\operatorname{cap}_{(1+q)/\varepsilon}\left(\overline{U}_r, \overline{C}_R; \overline{D}\right)\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \times$$

$$\times \left(\int_{U_R} |u|^{1+q} \left(1+|\nabla u|\right)^{\gamma} dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge c\int_{U_r} |u|^{1+q} \left(1+|\nabla u|\right)^{\gamma} dx. \tag{10}$$

(Здесь и ниже через $(\ )^+$ обозначена неотрицательная часть числа, заключенного в скобки.)

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ – произвольная функция из пространства $\overset{\circ}{C}{}^1(B(0,R))$, $0 \le \psi(x) \le 1$, равная единице на $B(0,r)$. Положив в неравенстве (6) $\varphi(x) = \psi^s(x)\, u(x)$, где $s > 1$ будет выбрано ниже, имеем

$$-\int_D (u_x A)\psi^s dx - s\int_D (\psi_x A) u\psi^{s-1} dx =$$

$$= I_1 + I_2 = \int_D f(x,u,\nabla u) u\psi^s dx. \tag{11}$$

Оценим интеграл I_2. Из условия (3) на коэффициенты оператора L получаем

$$\left|I_2\right| \le s k^{1/\alpha} \int_D |\nabla\psi| (u_x A)^{(\alpha-1)/\alpha} |u| \psi^{s-1} dx$$

и, значит,

$$\left|I_2\right| \le s k^{1/\alpha} \int_D (u_x A)^{(q-\varepsilon)/(1+q)} (u_x A)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon)/(\alpha+\alpha q)} |\nabla\psi| |u| \psi^{s-1} dx$$

для любого положительного ε, меньшего q.

Применяя к полученному соотношению ослабленное неравенство Юнга ($ab \le a^l + b^m$ для положительных чисел a, b, l, m, где l и m связаны равенством $1/l + 1/m = 1$), при $l = (1+q)/(q-\varepsilon)$ и $m = (1+q)/(1+\varepsilon)$ находим

$$\left|I_2\right| \le \int_D (u_x A)\psi^s\,dx + (s k^{1/\alpha})^{(1+q)/(1+\varepsilon)} \times$$
$$\times \int_D (u_x A)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon)/(\alpha+\alpha\varepsilon)} (|\nabla\psi||u|)^{(1+q)/(1+\varepsilon)}\, \psi^{s-(1+q)/(1+\varepsilon)}\,dx. \qquad (12)$$

Из неравенств (11) и (12) следует

$$(s k^{1/\alpha})^{(1+q)/(1+\varepsilon)} \int_D (u_x A)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon)/(\alpha+\alpha\varepsilon)} |u|^{(1+q)(1+\varepsilon)} \times$$
$$\times \psi^{s-(1+q)/(1+\varepsilon)} |\nabla\psi|^{(1+q)/(1+\varepsilon)}\,dx \ge c\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma\,dx.$$

Применяя к предыдущему соотношению неравенство Гельдера с показателями $(1+\varepsilon)^{-1}$ и $\varepsilon/(1+\varepsilon)$, имеем

$$(s k^{1/\alpha})^{(1+q)/(1+\varepsilon)} \left(\int_D (u_x A)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon)/\alpha} |u|^{1+q}\, \psi^{s(1+\varepsilon)-(1+q)}\,dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \times$$
$$\times \left(\int_D |\nabla\psi|^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge c\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma \psi^s\,dx. \qquad (13)$$

Полагая в неравенстве (13) s равным сначала $(1+q)/\varepsilon$, а затем $(1+q)/(1+\varepsilon)$, в соответствии с условиями (3), (5) получаем

$$k\left(\frac{1+q}{\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} \left(\int_D |\nabla u|^{\alpha-1-q+\alpha\varepsilon} |u|^{1+q}\, \psi^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \left(\int_D |\nabla\psi|^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge$$
$$\ge c\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma \psi^{(1+q)/\varepsilon}\,dx \qquad (14)$$

и

$$k\left(\frac{1+q}{1+\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} \left(\int_D |\nabla u|^{\alpha-1-q+\alpha\varepsilon} |u|^{1+q}\,dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \left(\int_D |\nabla\psi|^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge$$
$$\ge c\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma \psi^{(1+q)/(1+\varepsilon)}\,dx. \qquad (15)$$

Так как

$$|\nabla u|^{\alpha-1-q+\alpha\varepsilon} \le (1+|\nabla u|)^\gamma (1+|\nabla u|)^{\alpha-1-q+\alpha\varepsilon-\gamma} \le (1+|\nabla u|)^\gamma (1+|\nabla u|)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon-\gamma)^+}$$

при $\gamma > \alpha-1-q$ и $0 < \alpha\varepsilon < \gamma-\alpha+1+q$ и любых положительных ε при $\gamma < \alpha-1-q$, то из соотношений (14) и (15) легко следует

$$k\left(\frac{1+q}{\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} (m_R)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon)^+/(1+\varepsilon)} \left(\int_D |\nabla\psi|^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \ge$$
$$\ge c\left(\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma \psi^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}, \qquad (16)$$

$$k\left(\frac{1+q}{1+\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} (m_R)^{(\alpha-1-q+\alpha\varepsilon)^+/(1+\varepsilon)} \left(\int_D |\nabla\psi|^{(1+q)/\varepsilon}\,dx\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \times$$
$$\times \left(\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma\,dx\right)^{1/(1+\varepsilon)} \ge c\int_D |u|^{1+q}(1+|\nabla u|)^\gamma \psi^{\frac{1+q}{\varepsilon}}\,dx. \qquad (17)$$

Минимизируя теперь левые части неравенств (16) и (17) по всем допустимым функциям $\psi(x)$ указанного вида, легко убеждаемся в справедливости утверждений леммы 3.

Непосредственным следствием леммы 3 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha - 1 \geq q > 0, \gamma > \alpha - 1 - q$, D – *неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ – *решение уравнения* (4) *в* D, *обращающееся в нуль на* ∂D. *Тогда* $u(x) \equiv 0$.

Доказательство. Выберем число ε достаточно малым так, чтобы $0 < \alpha\varepsilon < q$, $\alpha - 1 - q + \alpha\varepsilon < \gamma$ и $(1 + q)/\varepsilon = p > n$. Тогда по формуле (9) при $R = 2r$ получаем

$$k^{(1+\varepsilon)/\varepsilon} p^p \operatorname{cap}_p(\overline{U}_r, \overline{C}_R; \overline{D}) \leq c \int\limits_{U_r} |u|^{1+q} \left(1 + |\nabla u|\right)^\gamma dx.$$

Оценивая p-емкость конденсатора $(\overline{U}_r, \overline{C}_R; \overline{D})$ в предыдущем соотношении по неравенству (8), находим

$$k^{(1+\varepsilon)/\varepsilon} p^p \omega_n \left(1 - 2^{(p-n)/(1-p)}\right)^{1-p} R^{n-p} \geq c \int\limits_{U_r} |u|^{1+q} \left(1 + |\nabla u|\right)^\gamma dx.$$

Переходя в полученной формуле к пределу при $R \to \infty$, легко выводим $u(x) \equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha - 1 \geq q > 0, \alpha - 1 - q > \gamma$, D – *неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ – *решение уравнения* (4) *в* D, *обращающееся в нуль на* ∂D. *Тогда либо* $u(x) \equiv 0$ *в* D, *либо*

$$\varliminf_{R \to \infty} m_R \left(\beta^\beta \operatorname{cap}_\beta(\overline{U}_{R/2}, \overline{C}_R; \overline{D})\right)^Q > 0, \tag{18}$$

если $\beta > \max\left\{n, \alpha\dfrac{1+q}{q}\right\}$, *а* $Q = \dfrac{1+q}{\beta(\alpha - 1 - q - \gamma) + \alpha(1+q)}$.

Доказательство. Предположим противное: $u(x) \not\equiv 0$ и условие (18) не выполнено. Выбирая в неравенстве (9) $R = 2r$, $\varepsilon = (1 + q)/\beta$, получаем противоречие нашему предположению при достаточно больших R.

Заметим, что оценка (7) характеризует скорость возрастания величины m_R в утверждении теоремы 3 в зависимости от геометрических свойств области D.

Теорема 4. *Пусть* $\alpha - 1 \geq q > 0, \alpha - 1 - q > \gamma$, D — *неограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ – *решение уравнения* (4) *в* D, *обращающееся в нуль на* ∂D. *Тогда либо* $u(x) \equiv 0$, *либо*

$$\varliminf_{R \to \infty} m_R R^{-(1+q)/(\alpha-1-q-\gamma)} > 0.$$

Доказательство. Предположим противное: $u(x) \not\equiv 0$ и $m_R = o\left(R^{(1+q)/(\alpha-1-q-\gamma)}\right)$ при $R \to \infty$. Значит, существует положительное число μ такое, что

$$I(r) \equiv \int\limits_{U_r} |u|^{1+q} \left(1 + |\nabla u|\right)^\gamma dx = o\left(r^\mu\right)$$

при $r \to \infty$ и фиксированных q, α и γ.

С другой стороны, при достаточно больших r, $R = 2r$, $0 < \alpha\varepsilon < \min\{q, (1+q)/n\}$ из неравенства (10) имеем

$$k\left(\frac{1+q}{1+\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} m_R^{(\alpha-1-q-\gamma+\alpha\varepsilon)/(1+\varepsilon)} \left(\operatorname{cap}_{(1+q)/\varepsilon}(\overline{U}_r, \overline{C}_R; \overline{D})\right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \geq c\, I_r\, I_R^{-1/(1+\varepsilon)}$$

Применяя лемму 1 для оценки емкости конденсатора $(\overline{U}_r, \overline{C}_R; \overline{D})$ при $p = (1 + q)/\varepsilon$, находим

$$k\left(\frac{1+q}{1+\varepsilon}\right)^{(1+q)/(1+\varepsilon)} m_R^{(\alpha-1-q-\gamma+\alpha\varepsilon)/(1+\varepsilon)} \omega_n^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} \times$$
$$\times \left(1-2^{(1+q-\varepsilon n)/(\varepsilon-1-q)}\right)^{(\varepsilon-1-q)/(1+\varepsilon)} R^{(n\varepsilon-1-q)/(1+\varepsilon)} \geq c\, I_r\, I_R^{-1/(1+\varepsilon)}.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, легко получаем

$$k(2+2q)^{1+q} m_R^{\alpha-1-q-\gamma} R^{-1-q} \geq c I_r I_R^{-1}.$$

Исходя из нашего предположения о росте модуля градиента решения $u(t)$, приходим к следующему: I_r неограниченно возрастает при $r \to \infty$. Более того, для любого $\lambda > 2^{\mu}$ существует $r(\lambda)$ такое, что при $r > r(\lambda)$ $I_{2r} > \lambda I_r$. Следовательно, $I_R > \lambda^{-r(\lambda)} R^{\ln_2 \lambda}$ для достаточно больших R вида $R = 2^{r(\lambda)+N}$, где N – натуральное, большее $r(\lambda)$. Последнее в силу произвольности выбора λ противоречит тому, что $m_R = o\left(R^{(1+q)/(\alpha-1-q-\gamma)}\right)$ при $R \to \infty$. Теорема доказана.

Замечание **1.** Во всех сформулированных утверждениях область D может совпадать со всем пространством.

Замечание **2.** При $\gamma > \alpha - 2 - 2q$ легко привести примеры, иллюстрирующие точность полученных результатов. Так, функция $u(r) = r^{(\alpha-\gamma)/(\alpha-1-q-\gamma)} + r^2$, $r = |x|$, является классическим решением неравенства

$$u \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u\right) \geq c|u|^{1+q}\left(1+|\nabla u|\right)^{\gamma}$$

при надлежащем выборе постоянной c.

Автор искренне признателен Е.М.Ландису за постоянное внимание и многочисленные полезные обсуждения.

1. *Миклюков В.М.* Емкость и обобщенный принцип максимума для квазилинейных уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР.–1980.– **250**, №6. – С.1318–1320.
2 *Keller J.B.* On solutions of $\Delta u = f(u)$ // Communs Pure and Appl. Math.–1957.– **10**, № 4. – P.503–510.
3 *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ // Pacif. J. Math.–1957.– **7**, № 4. – P.1641–1647.
4 *Redheffer R.* On the inequality $\Delta u \geq f(u, \mathrm{grad} u)$ // J. Math. Anal. and Appl.–1960.– **1**.–P.277–299.
5. *Похожаев С. И.* О краевой задаче для уравнений $\Delta u = u^2$ // Докл. АН СССР.– 1961.–**140**, №3.– С.518–521.
6 *Veron L.* Comportement asymptotique des solutions d'equations elliptiques semilinearires dans $\mathbb{R}^N$ // Ann. Math. Pure Appl.–1981.– **127**.–P.25–50.
7 *Brezis H., Veron L.* Removable singularities for some nonlinear elliptic equations// Arch. Ration. Mech. and Anal.–1980.– **75**,–№ 1.– P.1–6.
8 *Chipot N., Weissler F.B.* Some blow up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term.–Minneapolls, 1987.–42p.–(IMA Prepr. / Inst. Math. and its Appl., Univ. of Minnesota; №298).
9. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Полулинейные уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. заметки.–1988.– **44**, №3.–С.457–468.
10. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка // Мат. сб.–1988.– **135**,№ 3.–С.346–360.
11. *Кристев Д. И.* О поведении решений некоторых полулинейных эллиптических и параболических неравенств // Дифференц. уравнения.–1989.– **25**,№ 8.–С.1368–1374.
12. *Курта В. В.* О качественных свойствах решений некоторых классов квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка // Докл. АН УССР. Сер. А.–1990.–№12. – С.12–14.
13. *Миклюков В. М.*Емкостные методы в задачах нелинейного анализа : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.–Тюмень, 1980.–22с.
14. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.–М.: Наука, 1983.–284с.

Получено 01. 04. 92