УДК 519.21

Ю.Н. Линьков, д-р физ.-мат.наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк),
Мунир аль Шахф, асп. (Донец. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Доказаны предельные теоремы для логарифма отношения правдоподобия и с их помощью установлена скорость убывания вероятности ошибки 2-го рода критерия Неймана–Пирсона.

Доведені граничні теореми для логарифму відношення правдоподібності та з їх допомогою встановлена швидкість спадання ймовірності похибки 2-го роду критерію Неймана–Пірсона.

1. *Введение.* Методам статистики считающих процессов, основанных на использовании асимптотических свойств отношения правдоподобия, посвящено достаточно много работ (см. обзор [1]). Важный подкласс считающих процессов образуют процессы восстановления [2,3]. В данной работе рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез для процессов восстановления при растущей длительности наблюдений. Исследование основано на асимптотических свойствах отношения правдоподобия. Близкие результаты имеются в работе [1].

2. *Процесс локальной плотности мер.* Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P}, \tilde{\boldsymbol{P}})$ – стохастический базис с двумя вероятностными мерами $\boldsymbol{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}$, $\boldsymbol{P}^t$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}^t$ – сужения мер $\boldsymbol{P}$ и $\tilde{\boldsymbol{P}}$ на σ-алгебру $\mathfrak{F}_t$, $t \in R_+$. Пусть $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ – считающий процесс, распределение которого задается мерой $\boldsymbol{P}$ (соответственно $\tilde{\boldsymbol{P}}$), если верна гипотеза $\boldsymbol{H}$ (соответственно $\tilde{\boldsymbol{H}}$). Рассмотрим задачу проверки гипотез $\boldsymbol{H}$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}$ по наблюдениям $\xi^t = (\xi_s)_{0\leq s\leq t}$ процесса ξ. Если $\tilde{\boldsymbol{P}}^t << \boldsymbol{P}^t$ для всех $t \in R_+ \left(\tilde{\boldsymbol{P}} \overset{\text{loc}}{<<} \boldsymbol{P}\right)$, то процесс $z = (z_t)_{t\geq 0}$ называется процессом локальной плотности меры $\tilde{\boldsymbol{P}}$ относительно меры $\boldsymbol{P}$ (или отношением правдоподобия). Получим здесь вид процесса z в случае процессов восстановления.

Пусть $T_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$, $n = 1,2,\ldots$, – моменты скачков считающего процесса ξ, где $\tau_1, \tau_2, \ldots$ – независимые положительные случайные величины с функциями распределения $F_k(t) = \boldsymbol{P}\{\tau_k \leq t\}$ или $\tilde{F}_k(t) = \tilde{\boldsymbol{P}}\{\tau_k \leq t\}$. В данном случае процесс ξ называется процессом восстановления [2, 3].

Хорошо известно [4], что $\boldsymbol{P}$– и $\tilde{\boldsymbol{P}}$–компенсаторы считающего процесса ξ имеют вид

$$\nu_t = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{t\wedge T_{k-1}}^{t\wedge T_k} \frac{d\varphi_k(s)}{1-\varphi_k(s-)},\ \tilde{\nu}_t = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{t\wedge T_{k-1}}^{t\wedge T_k} \frac{d\tilde{\varphi}_k(s)}{1-\tilde{\varphi}_k(s-)},$$

где $T_0 = 0$, а $\varphi_k(s)$ и $\tilde{\varphi}_k(s)$ — условные функции распеределения вида

$$\varphi_k(s) = \boldsymbol{P}\{T_k \leq s / T_1, \ldots, T_{k-1}\},\quad \tilde{\varphi}_k(s) = \tilde{\boldsymbol{P}}\{T_k \leq s / T_1, \ldots, T_{k-1}\}.$$

В силу независимости случайных величин $\tau_1, \tau_2, \ldots$ имеем $\varphi_k(s) = F_k(s - T_{k-1})$, $\tilde{\varphi}_k(s) = \tilde{F}_k(s - T_{k-1})$. Отсюда получаем представления для компенсаторов:

$$\nu_t = \sum_{k=1}^{\xi_{t-}} \pi_k(\tau_k) + \pi_{\xi_{t-}+1}(t - T_{\xi_{t-}}), \tag{1}$$

$$\tilde{\nu}_t = \sum_{k=1}^{\xi_{t-}} \tilde{\pi}_k(\tau_k) + \tilde{\pi}_{\xi_{t-}+1}(t - T_{\xi_{t-}}), \tag{2}$$

где $\sum_{k=1}^{0} = 0$ и

$$\pi_k(t) = \int_0^t \frac{dF_k(s)}{1-F_k(s-)}, \quad \tilde{\pi}_k(t) = \int_0^t \frac{d\tilde{F}_k(s)}{1-\tilde{F}_k(s-)}. \tag{3}$$

Введём следующие условия:

I. Существует неотрицательный предсказуемый процесс $\lambda = (\lambda_t)_{t\geq 0}$ такой, что $\tilde{\nu}_t = \lambda \circ \nu_t$ ($\tilde{P}$-п.н.) для всех $t < \infty$.

II. Если $\Delta\nu_t = 1$, то $\Delta\tilde{\nu}_t = 1$ ($\tilde{P}$-п.н.).

III. $(1-\sqrt{\lambda})^2 \circ \nu_t + \sum_{s\leq t}\left(\sqrt{1-\Delta\nu_s} - \sqrt{1-\Delta\tilde{\nu}_s}\right)^2 < \infty$ ($\tilde{P}$-п.н.) $\forall t < \infty$.

Здесь $f \circ \nu_t = \int_0^t f_s\, d\nu_s$ — интеграл Лебега-Стильтьеса. Будем предполагать, что для рассматриваемых считающих процессов $T_n \to \infty$ (P-п.н.) при $n \to \infty$ и $\nu_t < \infty$ (P-п.н.) для всех $t < \infty$.

Известно [5], что в данном случае (при условиях I - III) $\tilde{P} \overset{\text{loc}}{<<} P$ и

$$z_t = \exp\left\{\ln\lambda \circ \xi_t + (1-\lambda)\circ \nu_c^t + \sum_{s\leq t}(1-\Delta\xi_s)\ln\frac{1-\Delta\tilde{\nu}_s}{1-\Delta\nu_s}\right\}, \tag{4}$$

где ν^c — непрерывная часть компенсатора ν и $0/0 = 1$.

Пусть распределение $\tilde{F}_k(t)$ абсолютно непрерывно относительно распределения $F_k(t)$ (будем писать $\tilde{F}_k << F_k$) и $\rho_k(t) = d\tilde{F}_k/dF_k(t)$ – соответствующая плотность. Тогда $\tilde{\pi}_k << \pi_k$,

$$l_k(t) = \frac{d\tilde{\pi}_k}{d\pi_k}(t) = \frac{1-F_k(t-)}{1-\tilde{F}_k(t-)}\rho_k(t),\ t \in R_+, \tag{5}$$

и, значит, выполняется условие I, причем в силу (1) и (2)

$$\lambda_t = d\tilde{\nu}/d\nu(t) = l_{\xi_{t-}+1}(t - T_{\xi_{t-}}),\ t \in R_+. \tag{6}$$

Далее, будем предполагать, что при всех $k = 1, 2, \ldots$, если $\Delta F_k(s) > 0$ и $\Delta F_k(s) = 1 - F_k(s-)$, то и $\Delta\tilde{F}_k(s) = 1 - \tilde{F}_k(s-) > 0$, т.е. если $\Delta\pi_k(s) = 1$, то и $\Delta\tilde{\pi}_k(s) = 1$. Значит, в силу (1) – (3) выполняется условие II.

В силу равенств (1) и (6) получаем неравенство

$$\left(1-\sqrt{\lambda}\right)^2 \circ \nu_t \leq \sum_{k=1}^{\xi_{t-}+1} \int_0^{T_k}\left(1-\sqrt{l_k(s)}\right)^2 d\pi_k(s). \tag{7}$$

Будем считать, что $F_k(0) = 0\ \forall k$ (а тогда $\tilde{F}_k(0) = 0\ \forall k$), откуда следует, что $\xi_{t-} < \infty$ (P-п.н.) и ($\tilde{P}$-п.н.) $\forall t < \infty$. Также будем считать, что $\tau_k < \infty$ (P–п. н.) и ($\tilde{P}$-п. н.) $\forall k$. Полагая теперь

$$\int_0^t\left(1-\sqrt{l_k(s)}\right)^2 d\pi_k(s) < \infty \quad \forall k, \forall t < \infty,$$

в силу (7) имеем $\left(1-\sqrt{\lambda}\right)^2 \circ \nu_t < \infty$ (P-п.н.) и ($\tilde{P}$-п.н.) $\forall t < \infty$. В силу (1)–(3)

$$\sum_{s\leq t}\left(\sqrt{1-\Delta\nu_s} - \sqrt{1-\Delta\tilde{\nu}_s}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{\xi_{t-}+1}\ \sum_{s\leq\tau_k}\left(\sqrt{1-\Delta\pi_k(s)} - \sqrt{1-\Delta\tilde{\pi}_k(s)}\right)^2.$$

Отсюда, считая, что

$$\sum_{s\le t}\left(\sqrt{1-\Delta\pi_k(s)}-\sqrt{1-\Delta\tilde{\pi}_k(s)}\right)^2<\infty \quad \forall k,\ \forall t<\infty,$$

выводим, что ($\boldsymbol{P}$-п.н.) и ($\tilde{\boldsymbol{P}}$-п.н.)

$$\sum_{s\le t}\left(\sqrt{1-\Delta\nu_s}-\sqrt{1-\Delta\tilde{\nu}_s}\right)^2<\infty \quad \forall t<\infty.$$

Таким образом, убеждаемся в справедливости условия III при сделанных предположениях. Итак, имеем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $F_k(0)=\tilde{F}_k(0)=0,\ F_k(\infty-)=\tilde{F}_k(\infty-)=1$ *и* $\tilde{F}_k \ll F_k\ \forall k$;

2) *если* $\Delta F_k(s)>0$ *и* $\Delta F_k(s)=1-F_k(s-)$ *для некоторых* k *и* s, *то и* $\Delta\tilde{F}_k(s)=1-\tilde{F}_k(s-)>0$;

3) *для любого* $t<\infty$ *и всех* $k=1,2,\ldots$

$$\int_0^t\left(1-\sqrt{l_k(s)}\right)^2 d\pi_k(s)+\sum_{s\le t}\left(\sqrt{1-\Delta\pi_k(s)}-\sqrt{1-\Delta\tilde{\pi}_k(s)}\right)^2<\infty;$$

4) *для любого* $t<\infty$ *и всех* $k=1,2,\ldots$

$$\int_0^t\left|\ln l_k(s)\right| d\pi_k(s)+\sum_{s\le t}\left|\ln\frac{1-\Delta\tilde{\pi}_k(s)}{1-\Delta\pi_k(s)}\right|<\infty.$$

Тогда $\tilde{\boldsymbol{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\boldsymbol{P}$ *и процесс* z *имеет представление*

$$z=\exp\{M-V\}, \tag{8}$$

$$M=g\cdot(\xi-\nu)\in\mathcal{M}_{\text{loc}}(F,P), \tag{9}$$

$$V=(\lambda-1-\ln\lambda)\circ\nu^c+\sum_{s\le\bullet}f\left(\Delta\nu_s,\Delta\tilde{\nu}_s\right)\in\mathcal{V}(F,P), \tag{10}$$

$$g=\ln\left(\lambda\frac{1-\Delta\tilde{\nu}}{1-\Delta\nu}\right),\ f(x,y)=x\ln\frac{x}{y}+(1-x)\ln\frac{1-x}{1-y},\ 0\le x,y\le 1. \tag{11}$$

Доказательство. Доказано, что из условий I – III следует, что $\tilde{\boldsymbol{P}}\overset{\text{loc}}{\ll}\boldsymbol{P}$ и справедлива формула (4). Теперь в силу условия 4 из формулы (4) легко выводим представление (8) – (10).

Заметим, что $f\cdot(\xi-\nu)$ означает стохастический интеграл по локальному мартингалу $\xi-\nu$.

Всюду ниже предполагаем, что условия 1–4 теоремы 1 выполняются и считаем, что случайные величины $\tau_1,\tau_2,\ldots$ одинаково распределены. Также будем считать, что условия теоремы 1 выполняются после замены местами F_k и $\tilde{F}_k$, т.е. ниже имеем $\boldsymbol{P}\overset{\text{loc}}{\sim}\tilde{\boldsymbol{P}}$. Далее, будем обозначать

$$F(t)=F_k(t),\ \tilde{F}(t)=\tilde{F}_k(t),\ \pi(t)=\pi_k(t),$$
$$\tilde{\pi}(t)=\tilde{\pi}_k(t),\ \rho(t)=\rho_k(t),\ l(t)=l_k(t).$$

3. *Предельные теоремы.* Первая предельная теорема представляет собой закон больших чисел для $\Lambda_t=\ln z_t$ при $t\to\infty$. Введем обозначение

$$\delta_i=\int_0^{\tau_i}(l(s)-1-\ln l(s))d\pi^c(s)+\sum_{s\le\tau_i}f\left(\Delta\pi(s),\Delta\tilde{\pi}(s)\right),$$

где π^c – непрерывная часть функции π, а $f(x, y)$ – функция, определяемая равенством (11). Заметим, что

$$\boldsymbol{E}\delta_i = \int_0^\infty (l(s) - 1 - \ln l(s)) dF^c(s) + \sum_{0<s<\infty} f(\Delta\pi(s), \Delta\tilde{\pi}(s))(1 - F(s-)),$$

где F^c — непрерывная часть F.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) $0 < \boldsymbol{E}\,\tau_1 = a < \infty$;

2) $b = \boldsymbol{E}\delta_1 < \infty,\ \boldsymbol{E}\left|\ln\left[l(\tau_1)\left(1 - \Delta\pi(\tau_1)\right)/\left(1 - \Delta\tilde{\pi}(\tau_1)\right)\right]\right| < \infty.$

Тогда для любого $s \in (0, \infty)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1}\Lambda_{st} = -s \ \ (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}),\ \psi_t = a^{-1}bt. \tag{12}$$

Доказательство. Очевидно, верны неравенства

$$\sum_{k=1}^{\xi_{t-}} \delta_k \le V_t \le \sum_{k=1}^{\xi_{t-}+1} \delta_k. \tag{13}$$

Рассмотрим представление

$$\psi_t^{-1} \sum_{k=1}^{\xi_{ts-}} \delta_k = \left(\psi_t^{-1}\xi_{st-}\right)\xi_{st-}^{-1} \sum_{k=1}^{\xi_{st-}} \delta_k. \tag{14}$$

В силу условия 1 имеем

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\xi_{t-} = a^{-1} \ \ (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}), \tag{15}$$

и, значит, $\xi_{t-} \to \infty$ ($\boldsymbol{P}$-п.н.) при $t \to \infty$. В силу условия 2 и усиленного закона больших чисел

$$\lim_{t\to\infty} \xi_{t-}^{-1} \sum_{k=1}^{\xi_{t-}} \delta_k = b \ \ (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}). \tag{16}$$

Объединяя (13) – (16), получаем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} V_{st} = s \ \ (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}). \tag{17}$$

В силу условия 4 теоремы 1 имеем

$$M_t = \left(A_{t,+} - A_{t,-}\right) - \left(\tilde{A}_{t,+} - \tilde{A}_{t,-}\right), \tag{18}$$

где

$$A_{t,\pm} = g^{\pm} \circ \xi_t,\ \tilde{A}_{t,\pm} = g^{\pm} \circ \nu_t.$$

Учитывая представление

$$\psi_t^{-1} A_{t,\pm} = \left(\psi_t^{-1}\xi_t\right)\xi_t^{-1} \sum_{k=1}^{\xi_t} \ln^{\pm}\left(l(\tau_k)\frac{1 - \Delta\pi(\tau_k)}{1 - \Delta\tilde{\pi}(\tau_k)}\right),$$

аналогично из условий 1 и 2 получаем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} A_{st,\pm} = sc_{\pm} / b \ \ (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}), \tag{19}$$

где

$$c_{\pm} = \boldsymbol{E}\ln^{\pm}\left(l(\tau_1)\left(1 - \Delta\pi(\tau_1)\right)/\left(1 - \Delta\tilde{\pi}(\tau_1)\right)\right).$$

Далее, справедливо представление

$$\tilde{A}_{t,\pm} = \sum_{k=1}^{\xi_{t-}} \int_0^{\tau_k} \ln^{\pm}\left(l(s)\frac{1 - \Delta\pi(s)}{1 - \Delta\tilde{\pi}(s)}\right) d\pi(s) \ + t - \int_0^{t - T_{\xi_{t-}}} \ln^{\pm}\left(l(s)\frac{1 - \Delta\pi(s)}{1 - \Delta\tilde{\pi}(s)}\right) d\pi(s),$$

где, очевидно,

$$E\int_0^{\tau_1} \ln^{\pm}\left(l(s)\frac{1-\Delta\pi(s)}{1-\Delta\tilde{\pi}(s)}\right)d\pi(s) = c_{\pm}.$$

Используя оценки сверху и снизу для $\tilde{A}_{t,\pm}$, аналогичные (13), отсюда получаем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1}\tilde{A}_{st,\pm} = sc_{\pm} / b \quad (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}). \tag{20}$$

Объединяя (18) – (20), имеем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1}M_{st} = 0 \quad (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}). \tag{21}$$

И наконец, из (8), (17) и (21) вытекает (12).

Введем теперь для функции $F(t)$ следующее условие:

$$1 - F(t) = t^{-p}h(t),\ t\to\infty, \tag{22}$$

где $0 < p < 2$, а $h(t)$ – медленно меняющаяся функция, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} h(ct)/h(t) = 1\ \forall c > 0. \tag{23}$$

Обозначим через $G_p(x)$ функцию распределения устойчивого закона с параметром p. Заметим, что в случае $0 < p < 1$ имеем $G_p(x) = 0$ при $x \le 0$, в то время как $G_p(x) > 0$ для всех $x \in R$ в случае $1 \le p < 2$.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие 2 теоремы 2 и условия* (22), (23) *при* $0 < p < 1$. *Тогда для любого* $s \in (0,\infty)$ *выполняется соотношение*

$$\psi_t^{-1}\Lambda_{st} \xrightarrow{d} -\gamma s^p,\ t\to\infty, \tag{24}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$, *где* $\xrightarrow{d}$ *означает сходимость распределений,* $\psi_t = bt^p/h(t)$, *а* γ – *положительная случайная величина с распределением*

$$\boldsymbol{P}\{\gamma > x\} = G_p\left(x^{-1/p}\right),\ x > 0. \tag{25}$$

Доказательство. Известно [6], что при $0 < p < 1$

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}\{\xi_t \ge x / c_t\} = G_p\left(x^{-1/p}\right),\ x > 0, \tag{26}$$

где $c_t = 1 - F(t)$. Используем рассуждения доказательства теоремы 2, внеся соответствующие изменения. Из (26) следует, что $\xi_t \to \infty$ ($\boldsymbol{P}$-п.н.) при $t\to\infty$. Как и при доказательстве соотношения (17) из оценок (13), используя (26) и конечность $\boldsymbol{E}\,\delta_1 = b$, выводим

$$\psi_t^{-1}V_{st} \xrightarrow{d} \gamma s^p,\ t\to\infty, \tag{27}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$. Применяя теперь рассуждения из доказательства соотношения (21), получаем

$$\lim_{t\to\infty} \xi_t^{-1}M_t = 0 \quad (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}),$$

откуда в силу равенства

$$\psi_t^{-1}M_{st} = s^p\frac{h(t)}{h(st)}\frac{\xi_{st}h(st)}{b(st)^p}\frac{M_{st}}{\xi_{st}},$$

учитывая (23) и (26), получаем для любого $s \in (0,\infty)$

$$\boldsymbol{P}\text{-}\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1}M_{st} = 0. \tag{28}$$

Наконец, из (8), (27) и (28) вытекает соотношение (24).

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (22), (23) *с* $1 < p < 2$ *и конечны величины* $b = \boldsymbol{E}\,\delta_1$, $\boldsymbol{E}\delta_1^2$ *и* $d = \boldsymbol{E}\ln^2\left[l(\tau_1)\left(1-\Delta\pi(\tau_1)\right)/\left(1-\Delta\tilde{\pi}(\tau_1)\right)\right](1-\Delta\pi(\tau_1))$. *Тогда*

$$\psi_t^{-1}\left(\Lambda_t + \varphi_t\right) \xrightarrow{d} b\gamma_p,\ t \to \infty, \tag{29}$$

где γ_p *– случайная величина с функцией распределения* $G_p(x)$ *и*

$$\varphi_t = a^{-1}t,\ a = \boldsymbol{E}\tau_1,\ \psi_t = a^{-1-1/p}b_t,\ 1 - F(b_t) \sim t^{-1}.$$

Доказательство. Известно [6], что при $1 < p < 2$

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}\left\{\xi_t \ge a^{-1}t - xb_t / a^{1+1/p}\right\} = G_p(x),\ x \in R. \tag{30}$$

Очевидно, справедливо представление

$$\psi_t^{-1}\left(V_t - \varphi_t\right) = \psi_t^{-1}\left(\xi_{t-} - a^{-1}t\right)\xi_{t-}^{-1}V_t + a^{-1}t\xi_{t-}^{-1}\psi_t^{-1}\left(V_t - \xi_{t-}b\right). \tag{31}$$

Так как $b = \boldsymbol{E}\,\delta_1 < \infty$, то $\xi_{t-}^{-1}V_t \to b$ ($\boldsymbol{P}$-п.н.) при $t \to \infty$. Учитывая теперь соотношение (30), отсюда получаем, что при $t \to \infty$

$$\psi_t^{-1}\left(\xi_{t-} - a^{-1}t\right)\xi_{t-}^{-1}V_t \xrightarrow{d} -b\gamma_p \tag{32}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$. Далее, справедлива оценка

$$\psi_t^{-1}\left(V_t - \xi_{t-}b\right) \le \psi_t^{-1}\sum_{k=1}^{\xi_{t-}+1}\left(\delta_k - b\right) + \psi_t^{-1}b. \tag{33}$$

Так как $\boldsymbol{E}\delta_1^2 < \infty$, то в силу тождества Вальда

$$\boldsymbol{E}\left(\psi_t^{-1}\sum_{k=1}^{\xi_{t-}+1}\left(\delta_k - b\right)\right)^2 = \psi_t^{-2}\boldsymbol{E}\left(\xi_{t-}+1\right)\boldsymbol{E}\left(\delta_1 - b\right)^2. \tag{34}$$

В силу теоремы восстановления $t^{-1}\boldsymbol{E}\,\xi_{t-} \to a^{-1}$ при $t \to \infty$, и, значит, $\psi_t^{-2}\,\boldsymbol{E}\,\xi_{t-} \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, из (33) и (34) получаем

$$\boldsymbol{P}\text{-}\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}\left(V_t - b\xi_{t-}\right) = 0. \tag{35}$$

Объединяя (31), (32) и (35), имеем

$$\psi_t^{-1}\left(V_t - \varphi_t\right) \xrightarrow{d} -b\gamma_p,\ t \to \infty, \tag{36}$$

относительно меры $\boldsymbol{P}$.

Далее, в силу конечности d имеем $M \in \overline{\mathcal{M}}^{\,2}(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ и

$$\langle M\rangle_t = g^2(1-\Delta\nu)\circ\nu_t \le \sum_{k=1}^{\xi_{t-}+1}\int_0^{\tau_k}\ln^2\left(l(s)\frac{1-\Delta\pi(s)}{1-\Delta\tilde{\pi}(s)}\right)(1-\Delta\pi(s))\,d\pi(s).$$

Отсюда, учитывая соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\xi_{t-}}\int_0^{\tau_k}\ln^2\left(l(s)\frac{1-\Delta\pi(s)}{1-\Delta\tilde{\pi}(s)}\right)(1-\Delta\pi(s))\,d\pi(s) = \frac{d}{a}\ \ (\boldsymbol{P}\text{-п.н.}),$$

получаем

$$\boldsymbol{P}\text{-}\lim_{t\to\infty}\psi_t^{-1}M_t = 0. \tag{37}$$

Объединяя (8), (36) и (37), получаем соотношение (29).

4. *Асимптотические свойства критерия Неймана – Пирсона.* Пусть δ_t – критерий Неймана–Пирсона уровня $\alpha_t \in (0, 1)$ для различения гипотез $\boldsymbol{H}$ и $\tilde{\boldsymbol{H}}$ по наблюдению ξ^t [7]. Обозначим через β_t вероятность ошибки 2–го рода критерия δ_t. Рассмотрим поведение β_t при $t \to \infty$ в зависимости от поведения уровня α_t и отношения правдоподобия z_t.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 , *а уровень* α_t *удовлетворяет условиям*

$$\varliminf_{t\to\infty} \alpha_t > 0, \ \varlimsup_{t\to\infty} \alpha_t < 1.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -1, \ \psi_t = a^{-1}bt.$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 2 при $s = 1$ и теорему 2.2 из [7].

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда для любого* $\alpha \in \in (0, 1)$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \beta_t = -g_{1-\alpha,p}^{-p},$$

где $\psi_t = bt^p/h(t)$, *а* $g_{1-\alpha,\,p}$ – $(1 - \alpha)$ — *квантиль устойчивого закона* G_p, $G_p(g_{1-\alpha,\,p}) = 1 - \alpha$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3 и теорему 4.1 из [7].

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы* 4. *Тогда для любого* $\alpha \in \in (0, 1)$

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_t = \alpha \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1}(\ln \beta_t + \varphi_t) = bg_{1-\alpha,p}, \tag{38}$$

где $\varphi_t = a^{-1}t, \psi_t = a^{-1-1/p}b_t, 1 - F(b_t) \sim t^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 4 имеем сходимость (29), где функция распределения $\boldsymbol{P}\{b\gamma_p < x\}$ непрерывна и $\psi_t = o(\varphi_t)$ при $t \to \infty$. Отсюда, повторяя доказательство теоремы 4.1 из [7] с соответствующими изменениями, получаем соотношение (38).

Замечание. Теорема 5 определяет скорость убывания β_t при $t \to \infty$, когда справедлив закон больших чисел для Λ_t. В условиях теоремы 7, очевидно, также выполняется закон больших чисел для Λ_t и теорема 7 определяет более тонкое поведение β_t при $t \to \infty$.

1. *Линьков Ю. Н., Мунир аль Шахф.* Асимптотические свойства отношения правдоподобия для считающих процессов.– Донецк, 1991.– 56 с.– (Препринт / АН УССР. Ин–т прикл. математики и механики; 91.02).
2. *Кокс Д., Льюис П.* Статистический анализ последовательностей событий.–М.: Мир, 1969.– 312 с.
3. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления.– М.: Сов. радио, 1967.– 300 с.
4. *Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А.Н.* Мартингальные методы в теории точечных процессов // Тр. шк.–сем. по теории случайн. процессов (Друскининкай, 25–28 нояб. 1974 г.). – Вильнюс, 1975.– Ч.2.– С. 269–354.
5. *Jacod J.* Multivariate point processes: predictaable projection, Radon–Nikodym derivatives, representation of martingales//Z.Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.– 1975.– **31**, № 3.– P. 235–253.
6. *Feller W.* Fluctuation theory of recurrent events// Trans. Amer. Math. Soc.– 1949.– **67**, № 1.– P. 98–119.
7. *Линьков Ю. Н.* Асимптотическое различение двух простых статистических гипотез.– Киев, 1986.– 60 с.– (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 86.45).

Получено 01.04.92