УДК 519.21

С. Я. Махно, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

СХОДИМОСТЬ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ. II

Получены достаточные условия слабой сходимости решений стохастических уравнений в терминах сходимости коэффициентов.

Одержані достатні умови слабкої збіжності розв'язків стохастичних рівнянь у термінах збіжності коефіцієнтів.

Данная статья является продолжением работы [1], поэтому сохраним введенные обозначения, предположения и продолжим нумерацию формул и теорем.

В статье приведены условия слабой сходимости решений уравнения (1) в терминах их коэффициентов при нерегулярной зависимости последних от малого параметра ε. Отметим, что предельные теоремы для различных классов стохастических уравнений предлагаемым методом получены в [2]. Кроме того, приводятся условия слабой сходимости решений уравнения (1), позволяющие отказаться от условия равномерной ограниченности коэффициентов по ε.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (1) $d = 1$, *выполнено условие* (**), $b^\varepsilon(t, x) = b_1^\varepsilon(t,x) + b_2^\varepsilon(x)$, $x^\varepsilon \to x$. *Кроме того, существуют функции* $B(t, x)$, $G^\varepsilon(x)$, *удовлетворяющие условию* (**) *такие, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\| b_1^\varepsilon(t,x) - B(t,x)\right\|_{2,\mathrm{loc}} = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0}\left\| a^\varepsilon(t,x) - G^\varepsilon(x)\right\|_{2,\mathrm{loc}} = 0,$$

$$\frac{b_2^\varepsilon(x)}{G^\varepsilon(x)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F(x),\quad \frac{1}{G^\varepsilon(x)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} G(x).$$

Тогда $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$, *где* $b(t, x) = B(t, x) + \dfrac{F(x)}{G(x)}$, $\sigma(t, x) = G^{-1/2}(x)$.

Доказательство. Проверим условия (V), (N). Положим

$$V^\varepsilon(x) = 2\int_0^x\int_0^y\left(\frac{F(z)}{G^\varepsilon(z)G(z)} - \frac{b_2^\varepsilon(z)}{G^\varepsilon(z)}\right)dzdy.$$

Тогда

$$\hat{b}^\varepsilon = b_1^\varepsilon - B + \left(a^\varepsilon - G^\varepsilon\right)\frac{1}{G^\varepsilon}\left(\frac{F}{G} - b_2^\varepsilon\right) + B + \frac{F}{G} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} B + \frac{F}{G}.$$

Очевидна справедливость и двух других требований условия (V). Аналогично проверяется, что функция

$$N^\varepsilon(x) = \int_0^x\int_0^y\left(\frac{1}{G^\varepsilon(z)G(z)} - 1\right)dzdy$$

удовлетворяет условию (N) с предельной функцией $G^{-1}(x)$.

Утверждение теоремы 4, примеры в [3] показывают, что только слабой в $L_{2,\mathrm{loc}}$ сходимости коэффициентов уравнения (1) недостаточно для слабой сходимости решений. Приведем дополнительные предположения, обеспечивающие слабую сходимость решений уравнения (1) при слабой сходимости их коэффициентов. Вначале исследуем сходимость решений граничных задач. Пусть $D \in O^2$ и содержатся в d-мерном кубе $Q = \{x; -l < x_i < l,\ i = \overline{1,d}\}$. Для $\varphi \in C_0^\infty([0,T]\times D)$ положим

$$\Phi_{ij}(t,x)=\int_{-l}^{x_i}\int_{-l}^{x_j}\varphi\left(t,x_1,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots x_{j-1},z,x_{j+1},\ldots x_n\right)dz\,dy,$$

$$\langle\langle\varphi\rangle\rangle_{ij}^{(\alpha)}=\|\varphi\|_2+\left|\Phi_{ij}\right|_{0,\alpha},$$

$$|g|_{0,\alpha}=\sup_{\substack{(t,x),(s,y)\\ t\neq s,\, x\neq y}}\frac{|g(t,x)-g(s,y)|}{\left(|t-s|^{1/2}+|x-y|\right)^{\alpha}}.$$

Через $\rho(z)$ обозначим функцию типа модуля непрерывности, $z(i)$ – вектор, у которого на i–м месте стоит z_i, а остальные координаты – нули.

Рассмотрим граничную задачу:

$$L^{\varepsilon}u^{\varepsilon}=f^{\varepsilon},\ t\in[0,T),\ x\in D,$$
$$u^{\varepsilon}\Big|_{\Gamma_T}=0. \tag{9}$$

Если выполнено условие (*) ((**)), $f^{\varepsilon}\in L_{d+1}([0,\ T]\times D)$, то (9) имеет единственное решение класса $W_{d+1}^{1,2}([0,\ T]\times D)$. Если же $\|f^{\varepsilon}\|_{d+1}\leq C$, то [4] существуют постоянные K, α, независящие от ε (α зависит только от d, C, λ) такие, что для решения (9)

$$\left|u^{\varepsilon}\right|_{0,\alpha}\leq K. \tag{10}$$

Аналогично [5] доказывается следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть для функций* $(b^{\varepsilon},\ a^{\varepsilon})$ *выполнены условия* (*) ((**)), (H), $\|f^{\varepsilon}\|_{d+1}\leq C$ *и для любых* $\varphi\in C_0^{\infty}([0,T]\times D)$, $|z(j)|\leq 1$,

$$\left|\int_0^T\!\!\int\left[a_{ij}^{\varepsilon}(t,x+z(j))-a_{ij}^{\varepsilon}(t,x)\right]\varphi(t,x)dxdt\right|\leq\rho(|z(j)|)\langle\langle\varphi\rangle\rangle_{ij}^{(\alpha)}, \tag{11}$$

где α *взято из условия* (10). *Пусть, кроме того,* $a_{ij}^{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}a_{ij}$, $b_i^{\varepsilon}\longrightarrow b_i$, $i,j=\overline{1,d}$, $f^{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}f$ *и функции*$(b,\ a)$ *удовлетворяют условию* (*), ((**)). *Тогда равномерно на* $[0,\ T]\times D$ $u^{\varepsilon}(t,\ x)$ *сходится к решению граничной задачи*

$$Lu=f,\ t\in[0,T),\ x\in D;\ u\big|_{\Gamma_T}=0.$$

Эта теорема позволяет решить вопрос о слабой сходимости решений стохастических уравнений при слабой сходимости коэффициентов.

Теорема 6. *Пусть* $x^{\varepsilon}\to x$, *для функций* $(b^{\varepsilon},\ a^{\varepsilon})$ *выполнены условия* (*) ((**)), (H) *и (11) для* α *из* (10). *Если* $a_{ij}^{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}a_{ij}$, $b_i^{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}b_i$, $i,j=\overline{1,d}$, *и функции*$(b,\ a)$ *удовлетворяют условию* (*), ((**)), *то* $\xi^{\varepsilon}\Rightarrow\xi$.

Доказательство. Проверим справедливость условий (V), (N) с предельными функциями $(b,\ a)$. Определим $V_k^{\varepsilon}(t,x)$ как решение задачи Коши,

$$L^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon}=b_k-b_k^{\varepsilon},\ t\in[0,T),\ x\in E_d,$$

$$V_k^{\varepsilon}(T,x)=0,\ \ k=\overline{1,d}.$$

Из доказательства теоремы 3 ясно, что необходимо лишь установить равномерную на компактах сходимость $V_k^{\varepsilon}(t,x)$ к нулю. Последнее есть следствие теоремы 6. Условие (V) установлено. Аналогично проверяется и условие (N).

Утверждение теоремы следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Иногда вместо условий (V), (N) удобнее проверить условия (V^δ), (N^δ) [2].

Условие (V^δ). *Существует последовательность функций* $V_k^{\varepsilon\delta}(t,x) \in W^{1,2}_{d+1,\mathrm{loc}}$, $k=\overline{1,d}$, *такая, что для каждого* $\delta > 0$

1) $b_k^{\varepsilon\delta} := b_k^\varepsilon + \frac{1}{2}(a^\varepsilon\nabla,\nabla)V_k^{\varepsilon\delta} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} b_k^\delta$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{x\in D}\left|V_k^{\varepsilon\delta}(t,x)\right| = 0$ *для любой ограниченной области* $D \subset E_d$ *при каждом* $t \in [0, T]$;

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|V_k^{\varepsilon\delta}\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{\partial V_k^{\varepsilon\delta}}{\partial x_i}\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0,\ i=\overline{1,d}$;

кроме того,

4) $\lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\left\|\frac{\partial V_k^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + b_k^{\varepsilon\delta} - b_k^\varepsilon\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0$;

5) $\lim\limits_{\delta\to 0}\left\|b_k^\delta - b_k\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0$.

Условие (N^δ). *Существует последовательность функций* $N_{kl}^{\varepsilon\delta}(t,x) = N_{lk}^{\varepsilon\delta}(t,x) \in W^{1,2}_{d+1,\mathrm{loc}}$, $k,l=\overline{1,d}$, *такая, что*

1) $a_{kl}^{\varepsilon\delta} := a_{kl}^\varepsilon + (a^\varepsilon\nabla,\nabla)N_{kl}^{\varepsilon\delta} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} a_{kl}^\delta$;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sup\limits_{x\in D}\left|N_{kl}^{\varepsilon\delta}(t,x)\right| = 0$ *для любой ограниченной области* $D \subset E_d$ *при каждом* $t \in [0, T]$;

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|N_{kl}^{\varepsilon\delta}\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\|\frac{\partial N^{\varepsilon\delta}}{\partial x_i}\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0,\ i=\overline{1,d}$;

4) $\lim\limits_{\delta\to 0}\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\left\|\frac{\partial N_{kl}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(a_{kl}^{\varepsilon\delta} - a_{kl}^\delta\right)\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0$;

5) $\lim\limits_{\delta\to 0}\left\|a_{kl}^\delta - a_{kl}\right\|_{d+1,\mathrm{loc}} = 0$.

В [2] установлено, что теорема 2 [1] будет справедлива, если в ее формулировке условия (V), (N) заменить на условия (V^δ), (N^δ).

Рассмотрим вопрос о слабой сходимости решений стохастических уравнений со случайными коэффициентами к решению уравнения (4). К таким моделям приводят многие задачи при исследовании слабой сходимости решений стохастических уравнений с неограниченными коэффициентами [6, 7].

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ – основное вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$, $t \in [0,T]$, $(w^\varepsilon(t), \mathfrak{F}_t)$ при каждом $\varepsilon > 0$ – стандартный k-мерный винеровский процесс, функции $f_i^\varepsilon(t,x,\omega)$, $g_{ij}^\varepsilon(t,x,\omega)$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,k}$, $\mathfrak{F}_t$ -согласованы, случайный процесс $\zeta^\varepsilon(t)$ является решением уравнения

$$\zeta^\varepsilon(t) = x^\varepsilon + \int_0^t f^\varepsilon\left(s,\zeta^\varepsilon(s)\right)ds + \int_0^t g^\varepsilon\left(s,\zeta^\varepsilon(s)\right)dw^\varepsilon(s). \tag{12}$$

Относительно функций $f_i^\varepsilon(t,x,\omega)$, $G_{ij}^\varepsilon = \left[g^\varepsilon (g^\varepsilon)'\right](t,x,\omega)$ предположим также, что существуют постоянные $C, \lambda > 0$ такие, что

$$\left| f_i^\varepsilon(t,x,\omega)\right| + \left| G_{ij}^\varepsilon(t,x,\omega)\right| \le C\left(1+|x|^2\right),$$
$$\left(G^\varepsilon \theta, \theta\right) \ge \lambda |\theta|^2 \ \forall \theta \in E_d. \tag{13}$$

Известно, что при условии (13) семейство мер, порожденных на $\mathbb{C}[0,T]$ решениями (12), слабо компактно. Введем условия, позволяющие находить коэффициенты уравнения для предельного процесса. С функциями f_i^ε, G_{ij}^ε, $i,j=\overline{1,d}$, свяжем оператор

$$\mathfrak{L}^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \left(f^\varepsilon, \nabla\right) + \frac{1}{2}\left(G^\varepsilon \nabla, \nabla\right).$$

Введём **условие (P)**:

1) *существуют d-мерный вектор $r^\varepsilon(t,x)$ и $d \times d$-мерная матрица $H^\varepsilon(t,x)$, удовлетворяющие условию* (*) ((**)), *такие, что* $\forall \Phi \in C_0^\infty(E_d)$, $0 \le s \le t \le T$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \boldsymbol{E}\left\{\int_s^t \left[\mathfrak{L}^\varepsilon \Phi - \overline{L}^\varepsilon \Phi\right]\left(v, \zeta^\varepsilon(v)\right) dv \big/ \mathfrak{F}_s^\varepsilon\right\} = 0, \ \mathfrak{F}_s^\varepsilon = \sigma\left\{\zeta^\varepsilon(v), v \le s\right\},$$

$$\overline{L}^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} + \left(r^\varepsilon, \nabla\right) + \frac{1}{2}\left(H^\varepsilon \nabla, \nabla\right);$$

2) *для функций $(r^\varepsilon, H^\varepsilon)$ выполнены условия* (V^δ), (N^δ) *и предельные функции (r,H) также удовлетворяют условию* (*) ((**));

3) $\forall \Phi \in C_0^\infty\left(E_d\right)$, $k,l=\overline{1,d}$,

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \boldsymbol{E}\left\{\int_s^t \Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right) \overline{L}^\varepsilon V_k^{\varepsilon\delta}\left(v, \zeta^\varepsilon(v)\right) dv \big/ \mathfrak{F}_s^\varepsilon\right\} = 0,$$

$$\lim_{\delta\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \boldsymbol{E}\left\{\int_s^t \Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right) \overline{L}^\varepsilon N_{k,l}^{\varepsilon\delta}\left(v, \zeta^\varepsilon(v)\right) dv \big/ \mathfrak{F}_s^\varepsilon\right\} = 0.$$

Доказательство следующей теоремы полностью приведено в [6, 7].

Теорема 7. *Пусть $x^\varepsilon \to x$, выполнены условия* (13) *и* (P). *Тогда* $\zeta^\varepsilon \Rightarrow \xi$, *где* $b=r$, $\sigma = H^{1/2}$.

В [6, 7] на основании теоремы 7 изучено поведение "медленного" процесса в схеме усреднения для процессов с неограниченными по ε, периодическими, быстроосциллирующими коэффициентами, рассматриваются дифференциальные уравнения второго порядка и др. Здесь рассматриваются стохастические уравнения с коэффициентами, допускающими неограниченный рост по ε в отдельных областях. Следующая теорема обобщает результаты из [8].

Пусть $\xi^\varepsilon(t)$ — решение уравнения (1). Откажемся от требования равномерной ограниченности коэффициентов по ε. Через $\psi^\varepsilon(r)$, $r \ge 0$, обозначим неотрицательную функцию такую, что $\int_0^r \psi^\varepsilon(z)dz \le L\left(1+r^\beta\right)$, $L \ge 0$, $\beta < 1$, $\psi^\varepsilon(r)$, $r \ge 0$ – неотрицательная непрерывная функция такая, что

$$\int_0^r \varphi^\varepsilon(z)dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Положим для $r \geq 0$

$$I^\varepsilon(r) = L_1 \frac{\alpha^\varepsilon}{1+\left(\alpha^\varepsilon r\right)^\nu} + L_2\varphi^\varepsilon(r),\ \nu > 1,\ \alpha^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty,\ L_1, L_2 \geq 0.$$

Будем считать выполненными следующие условия:

$$0 < \lambda \leq \frac{\left(a^\varepsilon(t,x)x,x\right)}{|x|^2} \leq C, \tag{14}$$

$$\left(x, b^\varepsilon(t,x)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Sp} a^\varepsilon(t,x) \leq C + \psi^\varepsilon(|x|), \tag{15}$$

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0} \inf_{t,x}\left[2\left(x, b^\varepsilon(t,x)\right) + \operatorname{Sp} a^\varepsilon(t,x) - \frac{\left(a^\varepsilon(t,x)x,x\right)}{|x|^2}\right] = \gamma > 0. \tag{16}$$

Теорема 6. *Пусть для уравнения* (1) *выполнены условия* (14) – (16) *и* $x^\varepsilon \to$ $\to x$. *Кроме того, существуют равномерно непрерывные по* x *равномерно по* (t, ε) *функции* $(r^\varepsilon(t, x),\ H^\varepsilon = h^\varepsilon(h^\varepsilon)',\ (t, x))$, *удовлетворяющие условию* (*) ((**)) *такие, что*

$$\left|b^\varepsilon(t,x) - r^\varepsilon(t,x)\right|^2 + \operatorname{Sp}\left(\sigma^\varepsilon(t,x) - h^\varepsilon(t,x)\right)\left(\sigma^\varepsilon(t,x) - h^\varepsilon(t,x)\right)' \leq I^\varepsilon(|x|), \tag{17}$$

и при каждом $t \in [0, T],\ x \in E_d$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t r_i^\varepsilon(s,x)ds = \int_0^t r_i\ (s,x)ds,\ i = \overline{1,d},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t H_{ij}^\varepsilon(s,x)ds = \int_0^t H_{ij}(s,x)ds,\ i,j = \overline{1,d}.$$

Функции (r, H) *равномерно непрерывны по* x *и по* t *и удовлетворяют условию* (*) ((**)). *Тогда* $\xi^\varepsilon \Rightarrow \xi$ — *решению уравнения* (4) *с коэффициентами* $b = r,\ \sigma = H^{1/2}$.

Доказательство. В [8] установлено, что при сделанных предположениях

$$\boldsymbol{P}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t I^\varepsilon\left(\left|\xi^\varepsilon(s)\right|\right)ds = 0. \tag{18}$$

Обозначим

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t\left[b^\varepsilon\left(s,\xi^\varepsilon(s)\right) - r^\varepsilon\left(s,\xi^\varepsilon(s)\right)\right]ds + \int_0^t\left[\sigma^\varepsilon\left(s,\xi^\varepsilon(s)\right) - \right.$$

$$\left. - h^\varepsilon\left(s,\xi^\varepsilon(s)\right)\right]dw^\varepsilon(s),$$

$$f^\varepsilon(s,x,\omega) = r^\varepsilon(s, x+\eta^\varepsilon(s)),\ g^\varepsilon(s,x,\omega) = h^\varepsilon(s, x+\eta^\varepsilon(s)),$$
$$\zeta^\varepsilon(t) = \xi^\varepsilon(t) - \eta^\varepsilon(t).$$

Тогда процесс $\zeta^\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению (12). Так как выполнено условие

(13), то семейство мер, порожденных процессами $\zeta^\varepsilon(t)$, слабо компактно.
Из свойств стохастических интегралов, (17), (18) легко следует

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\eta^\varepsilon(t)\right|\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{P} 0. \tag{19}$$

Отсюда вытекает, что семейство мер, порождаемых процессами $\xi^\varepsilon(t)$, слабо компактно и предельные распределения для $\zeta^\varepsilon(t)$ и $\xi^\varepsilon(t)$ совпадают. Проверим условие (P). Докажем вначале, что для произвольной ограниченной равномерно непрерывной по x равномерно по (t, ε) функции $F^\varepsilon(t, x)$ и ограниченной финитной функции $\psi(t, x)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{E}\int_s^t\left|F^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)-F^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\right|\psi\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)dv=0. \tag{20}$$

Будем считать, что носитель функции $\psi(t, x)$ содержится во множестве $[0, T]\times S_N$, $S_N=\{x\colon |x|\le N\}$. В силу (19) достаточно установить равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{E}\int_s^t\left|F^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)-F^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\right|\psi\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\chi\left(\left|\eta^\varepsilon(v)\right|\le N\right)dv=0. \tag{21}$$

Для произвольного $\delta>0$ существует $\kappa>0$ такое, что при $|x-y|<\kappa$, $|F^\varepsilon(t,x)-F^\varepsilon(t,y)|\le\delta$. Для κ построим в множестве S_{2N} κ–сеть $x_1, x_2,\dots,x_{n(\kappa)}$ и систему непрерывных функций $m_j(x)$, $j=\overline{1,n(\kappa)}$, такую, что $m_j(x)\ge 0$, $m_j(x)=0$ при $\left|x-x_j\right|\ge\kappa$, $\sum_{j=1}^{n(\kappa)} m_j(x)=1$ при $x\in S_{2N}$ [9]. Положим

$$F_n^\varepsilon(t,x)=\sum_{j=1}^{n(\kappa)}F_n^\varepsilon(t,x_j)m_j(x).$$

Тогда для $x\in S_{2N}$

$$\left|F_n^\varepsilon(t,x)-F^\varepsilon(t,x)\right|\le\delta, \tag{22}$$

$$\left|F_n^\varepsilon(t,x+y)-F_n^\varepsilon(t,x)\right|\le C\sum_{j=1}^{n(\kappa)}\left|m_j(x+y)-m_j(x)\right|. \tag{23}$$

Учитывая (22), (23), получаем

$$\boldsymbol{E}\int_s^t\left|F^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)-F^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\right|\psi\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\chi\left(\left|\eta^\varepsilon(v)\right|\le N\right)dv\le$$

$$\le C\delta+C\sum_{j=1}^{n(\kappa)}\boldsymbol{E}\int_s^t\left|m_j\left(\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)-m_j\left(\zeta^\varepsilon(v)\right)\right|dv.$$

Второе слагаемое правой части этого равенства стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$, а первое слагаемое может быть сделано сколь угодно малым выбором δ. Отсюда следует (21), а следовательно, и (20).

Из (20) вытекает, что выполнено первое требование условия (P) с функциями $(r^\varepsilon, H^\varepsilon)$. Для этих функций справедливы условия (V^δ), (N^δ) [2]. Т.е. второе требование условия (P) выполнено. Пусть $\Phi(x)\in C_0^\infty(E_d)$, $\varphi_s(x)$ – $\mathcal{M}_s$-

измеримый непрерывный ограниченный функционал. Применим к функции $V_k^{\varepsilon\delta}(t,x)\Phi(x)$ и процессу $\zeta^\varepsilon(t)$ формулу Ито:

$$\boldsymbol{E}\varphi_s\left(\zeta^\varepsilon\right)\int_s^t \Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right) L^\varepsilon V_k^{\varepsilon\delta}\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right) dv = \boldsymbol{E}\varphi_s\left(\zeta^\varepsilon\right)\left[\left(V_k^{\varepsilon\delta}\Phi\right)\left(t,\zeta^\varepsilon(t)\right) -\right.$$

$$\left.-\left(V_k^{\varepsilon\delta}\Phi\right)\left(s,\zeta^\varepsilon(s)\right)\right]\varphi_s\left(\xi^\varepsilon\right) + \boldsymbol{E}\varphi_s\left(\zeta^\varepsilon\right)\int_s^t\left[\left(r^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right) -\right.\right.$$

$$-r^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right), \nabla V_k^{\varepsilon\delta}\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\Big) + \frac{1}{2}\left(\left(H^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right) -\right.\right.$$

$$\left.-H^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)\nabla, \nabla\right)V_k^{\varepsilon\delta}\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\Big]\Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right)dv -$$

$$-\boldsymbol{E}\varphi_s(\zeta^\varepsilon)\int_s^t V_k^{\varepsilon\delta}\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\left[\left(r^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right), \nabla\Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right)\right) +\right.$$

$$+\frac{1}{2}(H^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)\nabla, \nabla)\Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right) + (H^\varepsilon\left(v,\zeta^\varepsilon(v)+\eta^\varepsilon(v)\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\nabla\Phi\left(\zeta^\varepsilon(v)\right), \nabla V_k^{\varepsilon\delta}\left(v,\zeta^\varepsilon(v)\right)\right)\Big]dv.$$

Отсюда с учетом свойств функций $V_k^{\varepsilon\delta}$ [2] и (20) следует первое равенство в третьем требовании условия (P). Аналогично устанавливается и второе равенство третьего требования условия (P). Утверждение теоремы следует из теоремы 7. Теорема доказана.

1. *Махно С. Я.* Сходимость диффузионных процессов//Укр.мат. журн.– 1992.– **44**, № 2.– С. 284–289.
2. *Махно С. Я.* Достаточные условия для сходимости решений стохастических уравнений // Теория случайн. процессов.– 1988.– Вып. 16.– С. 66–72.
3. *Махно С. Я.* О сходимости решений стохастических уравнений//Статистика и управление случайными процессами. – М.: Наука, 1989.– С. 138–142.
4. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.– М.: Наука, 1985.– 374 с.
5. *Камынин В. Л.* Предельный переход в квазилинейных параболических уравнениях со слабо сходящимися коэффициентами и асимптотическое поведение решений задачи Коши // Мат. сб.– 1990.– **181**, вып. 2.– С. 1031–1047.
6. *Махно С. Я.* Сходимость решений стохастических уравнений с возмущенными коэффициентами // Теория случайн. процессов и ее прил. – Киев: Наук. думка, 1990.– С.99–106.
7. *Makhno S.* On convergence of solutions of stochastic Equations//New Trends in Probab. and Statist.– Vilnius: Mokslas, Tokyo: VSP.– 1991.–**1**.– P. 474–484.
8. *Кулинич Г. Л., Харкова М. В.* Об асимптотическом поведении решений систем стохастических диффузионных уравнений при нерегулярной зависимости коэффициентов от параметра // Докл. АН УССР. Сер. А.– 1990.– Вып. 6.– С. 19–22.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т. – М.: Наука, 1975.– Т. 3.– 496 с.

Получено 01.04.92