УДК 517.54

В. И. Попов, канд. физ.–мат. наук (Ин-т прикл.математики и механики АН Украины, Донецк)

БЫСТРАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается стандартная задача оптимального управления и ее решение быстрым преобразованием Фурье.

Розглядається стандартна задача оптимального керування та її розв'язок шляхом швидкого перетворення Фур'є.

Численные методы оптимального управления имеют поисковый, итерационный характер и в достаточно малой окрестности оптимальной траектории обладают высокой сходимостью. Проблема состоит лишь в том, чтобы локализовать этот поиск, т. е. попасть в такую окрестность. В данной статье мы попытаемся это сделать быстрым преобразованием Фурье. Но сначала на двух типичных примерах (пп. 1 и 2) изложим некоторые идеи.

1. *Локализация корней полинома.* Пусть $f = f(x)$ — вещественный (или комплексный) полином степени выше 4. Уравнение $f = 0$, вообще говоря, неразрешимо в радикалах — теорема Абеля, — и его приходится решать методом итерации. Для этого корни полинома надо локализовать, т.е. указать систему окрестностей, каждая из которых содержит по одному корню. В вещественном случае можно воспользоваться методом Штурма, в комплексном — рассмотреть “аналитический ландшафт”, т.е. график функции $E = |f(x)|^2$. Ее минимумы — корни полинома. Отправляясь от произвольно выбранной точки $x_{\text{нач}}$ и двигаясь против градиента функции E, можно попытаться достичь точки абсолютного минимума. При неудаче вместо $x_{\text{нач}}$ следует испытать другую начальную точку $x_{\text{нач}}$, за ней следующую и т.д. В сущности, это стрельба наугад, но, в общем случае, разумной альтернативы ей нет. Таким образом, проблема локализации, т.е. выбора хорошего начального приближения $x_{\text{нач}}$, стоит весьма остро. Аналогичная ситуация складывается и для системы алгебраических уравнений

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \ldots, f_n = 0, \tag{1}$$

возрастает лишь объем вычислений, поскольку и аналитический ландшафт $E = |f_1|^2 + \ldots + |f_n|^2$ и все приближения к точке минимума функции E лежат в многомерных пространствах. К рассмотрению систем вида (1) сводятся многие задачи оптимального управления (см. ниже).

2. *Задача на условный экстремум.* Пусть на некотором множестве X вещественного N–мерного координатного пространства R^n задана вещественная функция f_0 и

$$f_0 \to \min \quad \text{по } X \tag{2}$$

— задача о ее глобальном минимуме (наименьшем значении на X). При нашем чисто аналитическом подходе множество X удобно задавать как множество точек $x \in R\,N$, в которых функция принадлежности множества X неотрицательна: $f_X \geq 0$. Вводя дополнительную переменную $x_0 = (f_X)^{1/2}$, получаем равенство $f_1 \equiv f_0 - (x_0)^2 = 0$. Переменную x_0 удобно причислить к аргументам функции f_0. Иногда множество X задают не одним, а несколькими равенствами вида (1), где $n \leq N$. Тогда задача (2) выглядит так :

$$f_0 \to \min \quad \text{по } (1) \tag{3}$$

или $f_0 \to \min$ по $E = 0$. Если функции $f_0, \ldots, f_n$ не аналитичны, то с ними выгодно связать некоторые аналитические функции, исследовать последние, используя весь хорошо развитый аппарат комплексного анализа, а затем вернуться обратно. На практике основные затруднения возникают не с аналитичностью, а с размерностью задачи ("проклятие размерности" — термин Беллмана). Даже при $N < 3$ аналитический ландшафт может быть весьма замысловатым и задача (3) не поддается решению. Тогда ценен даже частичный успех, модификация (редукция) задачи, введение дополнительных ("рабочих") переменных и функций, получение ряда косвенных результатов — так называемых признаков ("принципов") оптимальности. Последние в сочетании с прямыми (итерационными) методами оптимизации образуют золотой фонд ("рутинную часть" — термин Тихомирова) всей теории, позволяя решать задачи средней трудности. Что же касается более трудных задач, то их в изобилии поставляет статистическая механика. В ней своя терминология: f_0 — "энергия", (1) — связи, X — малая подсистема большой изолированной сверхсистемы ("термостата"). Общих переменных у различных подсистем обычно нет и единственная связь — это "тепловой контакт", т.е. обмен энергией. Простейший пример термостата — набор из $N_1 >> N$ булевых переменных $b_1, \ldots, b_{N_1}$. Другой пример — комплексное N_1–мерное пространство $\mathbb{C}^{N_1}$. В этом примере энергия

$$E = f_0(x) + |z_1|^2 + \ldots + |z_{N_1}|^2, \tag{4}$$

$(z_1, \ldots, z_{N_1}) \equiv z \in \mathbb{C}^{N_1}$, а "микроканоническое распределение" — мера Ω — вводится формулой

$$d\Omega = \omega\delta(f_1)\ldots\delta(f_n)\delta(E - f_0 - |z_1|^2 - \ldots - |z_{N_1}|^2) \tag{5}$$

ω — эвклидова мера (элементарный объем) — внешнее произведение дифференциалов всех координат конфигурационного пространства $R^N \times \mathbb{C}^{N_1}$. Дельта–функция Дирака

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{d}p e^{-ipx}, \ \bar{d}p = \frac{dp}{2\pi}, \ -\infty < x < \infty, \tag{6}$$

— континуальный аналог символа Кронекера

$$\delta_x^0 = \int_{-\pi}^{\pi} \bar{d}p e^{-ipx} \equiv 0 \quad \text{при} \ \ x = \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad \delta_0^0 = 1. \tag{7}$$

Произведения дельта–функций и замена переменных в них — довольно деликатная вещь, особенно в континуальных интегралах (т.е. при $N \to \infty$). На практике, при вычислениях на ЭВМ, ситуация несколько проще: числа N, N_1 конечны, но дискретное преобразование Фурье — аналог сумм (6), (7) — должно быть быстрым (fast).

Вернемся к системе (1), (4). Энергетическая поверхность — это и есть тот аналитический ландшафт, который нам предстоит обозревать. Благодаря наличию термостата решений у данной системы чрезвычайно много, и вопрос ставится иначе: нас интересуют не отдельные решения, а вся их совокупность, ее некоторые усредненные ("интегральные") характеристики типа

$$\langle f_{\text{пр}} \rangle = \int f_{\text{пр}}\, d\Omega, \tag{8}$$

где $f_{\text{пр}}$ — некоторая пробная функция в R^N. В частности, при $f_{\text{пр}} \equiv 1$ определяем "энтропию"

$$\sigma = \ln \Omega \tag{9}$$

и "температуру" T

$$1 / T = d\sigma / dE. \tag{10}$$

Символически (см. (6))

$$\langle f_{\text{пр}} \rangle = \int f_{\text{пр}}\, d\Phi, \tag{11}$$

где

$$d\Phi = \omega_{\text{фаз}} \Psi, \tag{12}$$

$\omega_{\text{фаз}}$ — эвклидова мера в фазовом (p, x, z)–пространстве,

$$\Psi = e^{iL} \tag{13}$$

— осциллирующая ("волновая") функция, Φ — так называемая мера Фейнмана,

$$L = p_1 f_1 + \ldots + p_n f_n + L_0 \tag{14}$$

— функция Лагранжа с "импульсами" $p_1, \ldots, p_n$ и

$$L_0 = (E - f_0 - |z_1|^2 - \ldots - |z_{N_1}|^2) p_0. \tag{15}$$

Так выглядит задача (1) в физической интерпретации. Математически это все не более чем обобщенное преобразование Фурье (интеграл Фурье, см. (11)) и все, что нам здесь нужно, — это научиться быстро вычислять его на ЭВМ, минуя локальные методы типа стационарной фазы (классический принцип стационарного действия).

Так как функция $f_{\text{пр}}$ от вектора z не зависит, то интеграл по z гауссов (см. (15)) и легко вычисляется

$$\langle f_{\text{пр}} \rangle = \int f_{\text{пр}}\, d\Omega_x, \tag{16}$$

$$d\Omega_x = \omega_x \delta(f_1) \ldots \delta(f_n) \frac{(E - f_0)^{N_1 - 1}}{(N_1 - 1)!}, \tag{17}$$

ω_x — эвклидова мера в R_N. Наличие здесь δ-множителей Дирака означает, что интегрирование фактически идет не по всему пространству R^N, а лишь по множеству X.. В реальных физических экспериментах $N_1 \sim 10^{20}$ и мера (17) — весьма быстро убывающая функция от "энергии" f_0. Следовательно, наибольший вес имеют точки с наименьшм значением f_0:

$$\langle f_{\text{пр}} \rangle \sim f_{\text{пр}}(x_{\text{опт}}), \tag{18}$$

$x_{\text{опт}}$ — точка глобального минимума, т.е. искомое решение задачи (2). Вклады прочих точек экспоненциально малы, ими можно пренебречь. (Именно для этого и вводился термостат — основное понятие статистической физики. Если игнорировать все физические аналогии, то остается абстрактный, чисто математический подход, и тогда вместо последнего множителя в (17) можно брать любую другую "штрафную", т.е. быстроубывающую, функцию от f_0.) Наряду с условием $N_1 >> N$ естественно считать $E >> \langle f_0 \rangle$, тогда в (9) имеем $\sigma \sim \sim N_1 \ln E$ и температура $T = E / N_1$ оказывается удельной энергией на одну степень свободы:

$$E = TN_1.$$

Подведем итоги п.2. Формально проблема локализации экстремумов решается очень просто: вместо $f_{\text{пр}}$ поочередно подставляем координаты точки $x \in \in R^N$. .Подставляя произведения координат, можно узнать и их корреляции. Фактически же это все тот же метод стрельбы, поскольку в (16) интегрирование идет по всему пространству R^N. Стрельба, по–прежнему, идет наугад, мы покрываем все R^N. Она была бы бессмысленной, если бы мы не регистрировали ее результаты. Регистрация — чисто символическая, по Дираку — множителем (13). В итоге возникает мера Φ (см. (12)). Весьма четко и убедительно смысл этой меры как меры оптимальности впервые — в 1935 году — изложил П.А.М. Дирак [1, с.174]. Этот смысл ясен из формулы (18). В дальнейшем идеи Дирака широко развил Фейнман, его имя закрепилось за мерой Φ и интегралом по ней (см. (11)). Наиболее плодотворные применения, как нам кажется, эти идеи найдут в теории оптимальных процессов. В вопросах локализации оптимума реальной альтернативы этим идеям нет.

После такого, по необходимости краткого, изложения основных идей перейдем к теории оптимального управления.

3. *Задача Лагранжа*. Найти наименьшее значение интеграла

$$\int_{t_0}^{t_*} f_0(x_1(t), \ldots, x_n(t))dt, \tag{19}$$

где зависимые переменные $x_m(t)$, $1 \leq m \leq n$, вещественны и подчинены динамическим связям

$$x_m(t_0) = \text{fix}, \quad x'_m(t) = f_m(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad 1 \leq m \leq n_1, \tag{20}$$

$$0 = f_{-m}(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad 1 \leq m \leq n_2. \tag{21}$$

Знак fix указывает, что все стоящие перед ним величины фиксированы: t_0, t_*, n, n_1, n_2 = fix; $n_1 + n_2 \leq n$. Штрихом обозначена производная по независимой переменной — "времени" t. Отметим, что помимо чисто алгебраических связей (21) (ср. с (1)) здесь есть и "динамические", т.е. дифференциальные, связи (20). Такова стандартная задача оптимального управления. Значения функций $f_{\pm m}$ должны быстро вычисляться на ЭВМ — лучше всего, если это будут полиномы. Степень этих полиномов, за счет введения дополнительных переменных, можно снизить до двух, тогда будет легче обосновать и континуальное интегрирование.

Пример. $f_X = x_1$, $f_0 = t/(1 + (x_1^2))$ — задача Ньютона. Вводя дополнительные "рабочие" переменные $x_2 = (x_1)^2$, $x_1 = (x_0)^2$, $f_0 = t - f_0 x_2$, получаем стандартную задачу с полиномиальными связями.

Так же можно поступать и с другими мероморфными функциями. Специальные функции sin, cos и т.д. лучше задавать их дифференциальными связями ($x''+x=0$ и т.д.). Таким образом, круг задач, подгоняемых "под стандарт", довольно обширен. Иногда, впрочем, удобнее заменить и сам интеграл (19) связью

$$x_0'(t) = f_0(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad x_0(t_0) = 0, \quad x_0(t_*) \to \min \tag{22}$$

или ввести обозначения

$$x_m'(t) = v_m(t), \quad m \notin [0, n_1], \tag{23}$$

для "управлений", т.е. переменных, чьи производные ничем не ограничены, – случай, характерный для классической механики и вариационного исчисления. В механике к f_0 добавляют еще и кинетическию энергию $\varepsilon(v_m)^2/2$. Такая добавка регуляризирует фейнмановский интеграл по $v_m \in (-\infty, \infty)$, параметр $\varepsilon \to +0$ и играет роль "массы". В дискретном случае такие добавки не обязательны. Вообще говоря, каждая конкретная задача имеет свою специфику, в чем-то нарушающую стандарт. Главная же особенность задач оптимального управления — континуальное число связей (по n_1+n_2 для каждого t) — остается неизменной всегда, и нужно очень сильно модифицировать задачу, чтобы этих связей осталось конечное число (см. п.4).

4. *Метод совпадений ("коллокаций").* В этом методе связи "совпадают", т.е. учитываются лишь в конечном числе точек, например в узлах интерполяционной формулы Лагранжа

$$x_m(t) = \sum_{\nu=1}^{N} x_m(t_\nu) l_\nu(t), \tag{24}$$

где

$$l_\nu(t) = \omega(t) / (t - t_\nu)\omega'(t_\nu) \tag{25}$$

— фундаментальные полиномы интерполяции, а $\omega(t)$ —полином степени N с корнями $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. В частности, можно взять полином Чебышева первого рода

$$\omega(t) = \cos N\theta, \tag{26}$$

где угол

$$\theta = \theta(t) = 2\arcsin\sqrt{(t-t_0)/(-t+t_*)}. \tag{27}$$

В итоге бесконечномерная задача (20) — (22) редуцируется к конечномерной задаче типа (3), где $f_0, \dots f_n$ — полиномы. Из–за наличия алгебраических связей (21) и по другим причинам мы имеем дело с жесткими системами, поэтому при модификации задач типа (20) — (22) необходимо соблюдать меры предосторожности. Желательно, например, чтобы скорость $x'(t)$ не очень менялась с ростом t. Монотонной заменой $t \to t(\tau)$ эту скорость можно сделать даже постоянной по модулю. Могут потребоваться подобные замены и по другим осям координат (калибровка). Всевозможных калибровочных преобразований очень много, общих рецептов здесь нет. Чтобы вести расчеты на ЭВМ, необходим и второй шаг редукции — кодирование элементов из R^n с помощью конечного числа булевых переменных ("битов")

$$x_{m\nu} = (b_{m\nu 1}, b_{m\nu 2}, \dots, b_{m\nu r})_2 \equiv \sum_{s=1}^{r} 2^{-s} b_{m\nu s}, \tag{28}$$

где

$$x_{m\nu} = x_m(t_\nu),\ \ b_{m\nu s} = 0 \ \text{ или } 1. \tag{29}$$

Для простоты рассуждений считается, что $0 < x_{m\nu} < 1$. Этого всегда можно достичь соответствующей калибровкой.

5. *Быстрое преобразование Фурье.* Фактически мы используем два дискретных преобразования Фурье — комплексное и целочисленное. Комплексное преобразование используется в интерполяционной формуле Лагранжа (24), (25), поскольку корни полинома (26) выражаются через

$$z = \exp(i\pi / 2N) \tag{30}$$

— первообразный корень степени $2N$ из -1.

Целочисленное преобразование Фурье нам потребуется для умножения двоичных чисел с помощью алгоритма Шенхаге–Штрассена [2, с.304]. Термостат, упоминавшийся в п.2, тоже удобнее считать состоящим из дискретных двухуровневых подсистем. Таким образом, вместо формулы (4) используется формула

$$E = f_0(x) + b_1 + \ldots + b_{N_1} \tag{31}$$

(переменные $b_1, \ldots, b_{N_1}$ — булевы), вместо дельта–функции (6) – символ Кронекера (7). Вместо интегрирования по переменным (29) производится суммирование по булевым переменным b_m и $b_{m\nu s}$ (см. (28), (31)). С учетом указанных изменений формула (11) позволяет вычислять математические ожидания за приемлемое машинное время. Если предположить, что фигурирующие в (1) полиномы являются плотными, то упомянутое машинное время можно, хотя бы приближенно, выразить через степень полиномов и их число. Тем самым будет оценена и временная сложность алгоритма, вычисляющего величины вида (11). К сожалению, с ростом степени полинома предположение о его плотности (т.е. отсутствии нулевых коэффициентов) становится все менее полезным. В соответствии с этим общая теорема об "эффективности вычисления средних (11) методом быстрого преобразования Фурье (БПФ), т.е. теорема о временной сложности указанного алгоритма, здесь не приводится. Для конкретных управляемых систем по сравнению с общим случаем (20)–(22) число связей, как правило, можно уменьшить.

После того, как средние (11) вычислены и, таким образом, оптимальная траектория локализована, можно приступить к улучшению начального приближения известными итерационными методами.

1. *Дирак П.* Принципы квантовой механики. – М.: Наука, 1979. – 480 с.
2. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.

Получено 01.04.92