УДК 517.53

И. Е. Прицкер, асп. (Ин-т прикл.математики и механики АН Украины, Донецк)

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ГАРМОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЖОРДАНОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Исследуются достаточные условия непрерывности гармонически сопряженных функций в зависимости от геометрического строения различных классов жордановых областей. Полученные результаты являются обобщением известного условия непрерывности функции по Дини для круга.

Досліджуються достатні умови неперервності гармонічно спряжених функцій в залежності від геометричної будови різних класів жорданових областей. Одержані результати є узагальненням відомої умови неперервності функції за Діні для круга.

1. Пусть G — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющая жорданову границу L, точка $a \in G$. Обозначим через $\varphi\colon G \to D$ конформное отображение области G на единичный круг $D = \{w\colon |w| < 1\}$, нормированное условиями $\varphi(a) = 0$, $\varphi'(a) = 1/R > 0$, где R — внутренний конформный радиус G относительно точки a.. Пусть $\psi = \varphi^{-1}$ — обратное конформное отображение. По теореме Каратеодори φ и ψ продолжаются до гомеоморфизма между замыканием области G и замыканием круга D.

Рассмотрим функцию $u(z)$, гармоническую в G и непрерывную в $\overline{G}$, имеющую контурный модуль непрерывности $\omega_u(t)$ на L [1]. Обозначим через $v(z)$ функцию, гармонически сопряженную функции $u(z)$ в области G, и нормируем ее условием $v(a) = 0$. Функция $g(z) = u(z)+iv(z)$ аналитична в области G.

В данной работе исследуются достаточные условия на модуль непрерывности $\omega_u(t)$, которые гарантируют непрерывность аналитической функции $g(z)$ в $\overline{G}$, т.е. принадлежность $g(z)$ классу $A(\overline{G})$. Очевидно, что в нашем случае $g(z) \in A(\overline{G}) \Leftrightarrow v(z) \in C(\overline{G})$.

Когда область G является кругом, решение поставленной задачи хорошо известно. Если вещественная часть аналитической функции $u(z)$ имеет контурный модуль непрерывности $\omega_u(t)$ на L и при некотором $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \omega_u(t) t^{-1}\, dt < \infty, \tag{1}$$

то $g(z) \in A(\overline{G})$, причем для телесного модуля непрерывности $g(z)$ в $\overline{G}$ справедлива оценка

$$\omega_g(t) \le C_5\left(\int_0^t \omega_u(s) s^{-1} ds + t\int_t^{\pi} \omega_u(s) s^{-2}\, ds\right). \tag{2}$$

Ясно, что эта же оценка справедлива для телесного модуля непрерывности мнимой части $\omega_v(t)$ на $\overline{G}$ [1, с.126; 2, с.110].

2. В дальнейшем нам потребуется понятие приведения модуля $\mu_a(z_1, z_2, G)$ [3] семейства кривых, отделяющих точки z_1 и z_2 от точки a в G.

Пусть $\lambda(t)$ — строго монотонно убывающая функция такая, что $\forall z_1, z_2 \in L$

$$\mu_a(z_1, z_2, G) \le \lambda(|z_1 - z_2|). \tag{3}$$

Теорема 1. *Если для области G выполняется* (3) *и при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{\varepsilon} \omega_u(s) d(\lambda(s)) > -\infty, \tag{4}$$

то $v(z) \in C(\overline{G})$.

Доказательство. Перейдем с помощью конформного отображения $\psi(w)$ от области G к кругу D. Тогда функция $u \circ \psi(w)$ является гармонической в D и непрерывной в $\overline{D}$. Из (1) следует, что если для контурного модуля непрерывности $\omega_{u\circ\psi}(t)$ на ∂D выполняется условие Дини

$$\int_0^{\varepsilon} \omega_{u\circ\psi}(t) t^{-1}\, dt < \infty, \tag{5}$$

то аналитическая функция $g \circ \psi(w) \in A(\overline{D})$, где $g \circ \psi(w) = u \circ \psi(w) + iv \circ \psi(w)$. В силу непрерывности конформного отображения $\psi(w)$ имеем $g \circ \psi(w) \in \in A(\overline{D}) \Leftrightarrow g(z) \in A(\overline{G})$, поэтому для доказательства теоремы покажем, что из (4) следует (5).

Если $\omega_\psi(t)$ – телесный модуль непрерывности $\psi(w)$ на $\overline{D}$, то $\omega_{u\circ\psi}(t) \le \omega_u \circ \circ\, \omega_\psi(t)$. Используя теоремы искажения расстояний при конформном отображении [3], из (3) получаем

$$|w_1 - w_2| \ge c_2 e^{-\pi\lambda(|z_1 - z_2|)},$$

где $z_1 = \psi(w_1)$, $z_2 = \psi(w_2)$, а C_2 зависит только от G.

Из последнего неравенства следует, $\omega_\psi(t) \le s(t)$, где $s(t)$ — функция, обратная $t(s) = c_2 e^{-\pi\lambda(s)}$. На основании изложенного выше, можно записать следующую цепочку неравенств:

$$\int_0^{\varepsilon} \omega_{u\circ\psi}(t) t^{-1}\, dt \le \int_0^{\varepsilon} \omega_u \circ \omega_\psi(t) t^{-1} dt \le \int_0^{\varepsilon'} \omega_u(s) t^{-1}(s)\, d(t(s)) =$$

$$= \int_0^{\varepsilon'} \omega_u(s) t^{-1}(s) t(s)\, d(-\pi\lambda(s)) = \int_0^{\varepsilon'} \omega_u(s)\, d(-\pi\lambda(s)).$$

Следовательно, если $\int_0^{\varepsilon} \omega_u(s) d(\lambda(s)) > -\infty$, то $v(z) \in C(\overline{G})$.

Мажоранту $\lambda(t)$, фигурирующую в соотношении (3), можно задать непосредственно по геометрии области G. Для этого рассмотрим характеристику

$$\mu_G(t) = \sup_{\substack{t \le |z_1 - z_2| \le t_0 \\ z_1, z_2 \in L}} \mu_a(z_1, z_2, G), \tag{6}$$

где $t_0 = \mathrm{diam} L/2$. Характеристика $\mu_G(t)$ является вариантом характеристики, введенной в [4]. Очевидно, что для нее выполняется (3), поэтому остается показать строго монотонное убывание $\mu_G(t)$. По способу задания функции $\mu_G(t)$ сразу можно сказать, что она не возрастает.

Рассмотрим следующую теорему искажения [3]:

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| = 4R\sqrt{R^{-1} - e^{-2\pi\mu_a}}\, e^{-\pi\mu a}, \tag{7}$$

где $\mu_a = \mu_a(z_1, z_2, G)$, $z_1, z_2 \in L$. Из (7) видно, что

$$\inf_{\substack{t \le |z_1 - z_2| \le t_0 \\ z_1, z_2 \in L}} |\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| = 4R\sqrt{R^{-1} - e^{-2\pi\mu_G(t)}}\; e^{-\pi\mu_G(t)}. \tag{8}$$

Учитывая непрерывность $\varphi(z)$ в $\overline{G}$, мы можем утверждать, что последний inf достигается в некоторых точках $\zeta_1, \zeta_2 \in L$, т.е. $\mu_G(t) = \mu_a(\zeta_1, \zeta_2, G)$. Используя соотношение между гармонической мерой в области G относительно точки a дуги $\breve{z_1 z_2} \subset L$ и приведенным модулем [3]

$$\sin\tfrac{1}{4}m(\overset{\smile}{z_1 z_2}) = \sqrt{R}e^{-\pi\mu_a(z_1,z_2,G)}, \tag{9}$$

получаем $|\zeta_1-\zeta_2| = t$. Действительно, если $|\zeta_1-\zeta_2| > t$, то существует $\zeta_3 \in L$: $|\zeta_1-\zeta_3| = t$ и $\zeta_3 \in \overset{\smile}{\zeta_1\zeta_2}$. Используя конформную инвариантность гармонической меры, легко показать, что $m(\overset{\smile}{\zeta_1\zeta_3}) < m(\overset{\smile}{\zeta_1\zeta_2})$. Из (9) непосредственно имеем

$$\mu_a(\zeta_1,\zeta_3,G) > \mu_a(\zeta_1,\zeta_2,G) = \mu_G(t),$$

что приводит к противоречию.

Приведенные выше рассуждения показывают, что если $t_1 < t_2$, то $\mu_G(t_1) > > \mu_G(t_2)$. Кроме этого мы можем определить $\mu_G(t)$ следующим эквивалентным образом:

$$\mu_G(t) = \max_{\substack{|z_1-z_2|=t\\ z_1,z_2\in L}} \mu_a(z_1,z_2,G). \tag{10}$$

Отметим, что $\mu_G(t)$ является чисто геометрической характеристикой области G. Суммируя полученные результаты, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если выполнено условие*

$$\int_0^\varepsilon \omega_u(s)\,d(\mu_G(s)) > -\infty, \tag{11}$$

то $v(z) \in C(\overline{G})$.

Перейдем к рассмотрению некоторых подклассов жордановых областей. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[0,\infty)$ функция, $f(0) = 0$, $0 < f(x) \le x$ при $x > 0$. Будем говорить, что область G удовлетворяет $f(x)$–условию Джона [4], если $\exists K > 0, a \in G$, такие, что $\forall z \in L$ существует спрямляемая дуга l_z длины $l < K$ с естественной параметризацией $\zeta = \zeta(s)$, $\zeta(0) = z$, $\zeta(l) = a$, для которой $\operatorname{dist}(\zeta(s),L) \ge f(s)$ при $s \in [0, l]$.

Теорема 3. *Пусть G удовлетворяет $f(x)$–условию Джона. Если при некотором* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \omega_u(s) f^{-1}(s)\,ds < \infty \tag{12}$$

то $v(z) \in C(\overline{G})$

Доказательство. Из теоремы 2 работы [4] следует оценка для приведенного модуля:

$$\mu_a(z_1,z_2,G) \le C_3 \int_{|z_1-z_2|/4}^{K} \frac{ds}{f(s)} \tag{13}$$

где $z_1,z_2 \in L$, а C_3 зависит только от G.

Выберем функцию $\lambda(t)$ равной правой части в (13). Тогда

$$\int_0^\varepsilon \omega_u(s)\,d\left(C_3\int_{s/4}^{K} f^{-1}(s)\,ds\right) = -C_3\int_0^\varepsilon \omega_u(s) f^{-1}(s/4)\,ds \ge -C_4\int_0^{\varepsilon'} \omega_u(s) f^{-1}(s)\,ds.$$

По теореме 1 условие (12) гарантирует непрерывность $v(z)$ в $\overline{G}$.

Следствие 1. *Если G удовлетворяет ax-условию Джона, где* $0 < a < 1$, *то для непрерывности $v(z)$ в $\overline{G}$ достаточно, чтобы*

$$\int_0^\varepsilon \omega_u(s) s^{-1}\,ds < \infty. \tag{14}$$

Следствие 2. *Если G удовлетворяет ax^α-условию Джона* ($\alpha > 1$), *то* *для непрерывности* $v(z)$ *в* $\overline{G}$ *достаточно, чтобы*

$$\int_0^{\varepsilon}\omega_u(s)s^{-\alpha}\,ds<\infty\ . \tag{15}$$

Отметим следующее [4]:

1) ax-условию Джона удовлетворяют области с квазиконформной границей, липшицевы области и области с внутренним условием клина раствора α фиксированного радиуса;

2) ax^{α}–условию Джона удовлетворяют локальные $\mathrm{Lip}\,1/\alpha$-области и области, граница которых состоит из конечного числа квазиконформных дуг, гладких в окрестностях точек стыка и образующих в них нулевые углы порядка касания не выше α.

Условие (14) является точным даже для круга (см., например, [2, с.131]). Показать точность условия (12) не удалось.

3. Мы можем выписать оценку телесного модуля непрерывности функции $g(z)$ в $\overline{G}$ через $\omega_u(t)$ и телесные модули непрерывности прямого и обратного конформных отображений $\omega_{\varphi}(t)$ и $\omega_{\psi}(t)$. Для этого нужно воспользоваться рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве теоремы 1. Сначала переносим $g(z)$ с помощью отображения $z=\psi(w)$ в круг D, затем оцениваем модуль непрерывности полученной функции в круге по (2) и переносим ее с помощью отображения $w=\varphi(z)$ снова в область G.

Рассмотрим частный случай, когда $\varphi,\psi\in\mathrm{Lip}\,1$. Используя ту же схему, из (2) получаем

$$\omega_g(t)\le C_5\left(\int_0^t\omega_u(s)s^{-1}\,ds+t\int_t^{\pi}\omega_u(s)s^{-2}ds\right), \tag{16}$$

где C_5 не зависит от t.

Следовательно, при $\varphi,\psi\in\mathrm{Lip}\,1$ для области G справедлива теорема Привалова [5, с.400]. А именно, если $u(z)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha<1$, на границе области L, то $g(z)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ на $\overline{G}$.

В [6] построен пример области G, для которой $\varphi,\psi\in\mathrm{Lip}\,1$, но $L=\partial G$ не является асимптотически конформной кривой. Таким образом, существуют области, для которых справедлива теорема Привалова при всех $\alpha\in(0,1)$, с границами, не являющимися асимптотически конформными кривыми. Этот пример дополняет результаты работы [7, с.162–163].

1. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 270с.
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470с.
3. *Belyi V. I.* Development of the method of conformal invariants and quasiconformal quasiinvariants from the viewpoint of application to problems of polynomial approximation // Approxim. function spaces: Proc. Int. Conf. (Gdansk, Aug. 27–31, 1979). –Amsterdam, etc.: North–Holl. Publ. comp., 1981. – P.102–121.
4. *Маймескул В. В.* Оценки роста сопряженных гармонических полиномов в областях комплексной плоскости // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, №6. – С.772–777.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1966. – 628с.
6. *Lesley F. D.* Domains with Lipschitz mapping functions // Ann.Acad.sci. Fenn. Ser. A. Math. – 1983. – **8**. – P.219–233.
7. *Андриевский В. В.* Об одной теореме И.И.Привалова // Anal..math.–1990.–**16**, №3.–P.159-172.

Получено 01.04.92