УДК 517.54

В. И. Рязанов, канд.физ.-мат.наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЙХА – ВОЛЬКЗАКА О КОНФОРМНОСТИ ПО БЕЛИНСКОМУ – ЛАВРЕНТЬЕВУ

Приведено положительное решение проблемы Райха – Волькзака относительно конформности по Белинскому – Лаврентьеву квазиконформных отображений в точке в случае произвольного модуля комплексной характеристики при соответствующем выборе ее аргумента.

Наведено позитивний розв'язок проблеми Райха – Волькзака відносно конформності за Белінським – Лаврентьєвим квазіконформних відображень у точці у випадку довільного модуля комплексної характеристики при відповідному виборі її аргументу.

Данная статья продолжает исследования поведения комплексных характеристик и дифференцируемости квазиконформных отображений в точке, начатые в работах [1–13].

В п.1 приведены некоторые общие свойства сходимости комплексных характеристик, индуцируемой локально равномерной сходимостью квазиконформных отображений. В п.2 сформулирован основной результат (теорема 1) о том, что при любом модуле комплексной характеристики всегда можно так подобрать ее аргумент, чтобы соответствующее квазиконформное отображение было конформным по Белинскому в данной точке. Наконец, в п.3 приведено доказательство этого утверждения. При этом существенно использован результат работы [13] о критериях дифференцируемости по Белинскому.

1. *О сходимости характеристик.* Согласно аналитическому определению Q–квазиконформным (Q–к.к.) отображением принято называть обобщенное гомеоморфное решение класса Соболева $W^1_{2,\mathrm{loc}}$ уравнения Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где

$$|\mu(z)| \le q = \frac{(Q-1)}{(Q+1)} < 1. \tag{2}$$

Условие (2) означает равномерную эллиптичность уравнения (1). Коэффициент μ из (1) называется комплексной характеристикой отображения f.

Обозначим через $\mathfrak{M}_q$ пространство всех комплексных характеристик Q-к.к. отображений $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, т.е. шар радиуса $q<1$ с центром в нуле пространства $\mathfrak{L}^\infty(\mathbb{C})$. Будем говорить, что μ_n сходится к μ в смысле характеристик и писать $\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \mu$, если соответствующие Q-к.к. отображения сходятся локально равномерно (л.р.), $f_n \xrightarrow{\text{л.р.}} f$ (см. [8–12]).

Абстрактные пространства со сходимостями впервые были введены Фреше (1906 г.). Урысон в 1924 г. ввел в этих пространствах дополнительную аксиому, которая в секвенциально компактных пространствах формулируется так: всякая последовательность, имеющая единственную точку накопления, сходится в этой точке.

В работах [8–12] установлен ряд общих свойств пространства характеристик, таких как метризуемость, секвенциальная компактность, локальный характер сходимости характеристик и др.

Отметим, что л.р. сходимость для Q–к.к. отображений равносильна простой (поточечной) сходимости [1, с.76]. Далее, выбирая соответствующие последовательности f_n и g_n, $n = 1, 2,\ldots$, Q–к.к. отображений и используя связь характеристик

$$\mu_{f\circ g^{-1}} = \left\{\frac{\mu_f - \mu_g}{1-\mu_f\bar\mu_g}\cdot\frac{g_z}{\bar g_z}\right\}\circ g^{-1}, \tag{3}$$

получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $\mu, \mu_n \in \mathfrak{M}_q$, $n = 1, 2, \dots$, *и* $\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \mu$ *при* $n \to \infty$. *Тогда:* 1) *для любого* $c \in \mathbb{C}$:

$$\mu_n(z+c) \xrightarrow{\text{ch.}} \mu(z+c); \tag{4}$$

2) *для любого* $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\mu_n(az)\frac{\overline{a}}{a} \xrightarrow{\text{ch.}} \mu(az)\frac{\overline{a}}{a}; \tag{5}$$

3) *для любых* c_0 *и* $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, *таких, что* $c_n \to c_0$ *при* $n \to \infty$,

$$\mu_n(z+c_n) \xrightarrow{\text{ch.}} \mu(z+c_0); \tag{6}$$

4) *для любых* a_0 *и* $a_n \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n = 1, 2, \dots$, *таких, что* $a_n \to a_0$ *при* $n \to \infty$,

$$\mu_n(a_n z)\frac{\overline{a}_n}{a_n} \xrightarrow{\text{ch.}} \mu(a_0 z)\frac{\overline{a}_0}{a_0}; \tag{7}$$

5) *для любого дробно-линейного отображения* $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\mu_n(\varphi(z))\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)} \xrightarrow{\text{ch.}} \mu(\varphi(z))\frac{\overline{\varphi'(z)}}{\varphi'(z)}. \tag{8}$$

Пусть $E \subseteq \mathbb{C}$ — произвольное измеримое по Лебегу множество и $\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \mu$. Тогда, например, из теоремы Штребеля [4] и соотношения (3) на основе аксиомы Урысона следует $\chi\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \chi\mu$, где χ — характеристическая функция множества E. Функцию $\tilde{\mu} = \chi\mu$ в дальнейшем будем называть срезкой функции μ на множестве E.

Будем говорить, что последовательность измеримых множеств $E_n \subseteq \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к измеримому множеству E по мере, если сходятся по мере их характеристические функции $\chi_n \xrightarrow{\text{mes}} \chi$. Это равносильно тому, что $\operatorname{mes}(E \Delta E_n) \to 0$ при $n \to \infty$, где $E \Delta E_n = (E \setminus E_n) \cup (E_n \setminus E)$ — симметрическая разность множеств.

Далее, говорим, что последовательность множеств $E^k \subseteq \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, является исчерпанием плоскости $\mathbb{C}$ по мере, если

$$\operatorname{mes} \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = 0. \tag{9}$$

В работе [12] было установлено (лемма 5), что если $\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \mu$, $\kappa_n \xrightarrow{\text{ch.}} \kappa$ и $\mu_n - \kappa_n \to 0$ по мере при $n \to \infty$ на некотором множестве E, то $\mu = \kappa$ почти всюду (п.в.) на E. Отсюда на основе аксиомы Урысона получаем:

Предложение 2. *Пусть* E^k, $k = 1, 2, \dots$, *— некоторое исчерпание плоскости по мере и пусть* $E_n^k \subseteq \mathbb{C}$, $k, n = 1, 2, \dots$, *— некоторые измеримые множества, такие, что при каждом фиксированном* $k = 1, 2, \dots$, $E_n^k \to E^k$ *по мере при* $n \to \infty$. *Тогда для* μ *и* $\mu_n \in \mathfrak{M}_q$, $n = 1, 2, \dots$, *следующие утверждения эквивалентны:* 1) $\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \mu$ *при* $n \to \infty$;

2) $\chi^k \mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \chi^k \mu$ *для каждого* $k = 1, 2, \dots$;

3) $\chi_n^k\mu_n \xrightarrow{\text{ch.}} \chi^k\mu$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$

Здесь через χ^k и χ_n^k обозначены характеристические функции множеств E^k и E_n^k, $k, n = 1, 2,\ldots$, соответственно. Отметим, что множества $E_n^k, k = 1, 2,\ldots$, в отличие от множеств E^k, $k = 1, 2,\ldots$, могут и не образовывать исчерпание плоскости по мере ни при одном $n = 1, 2,\ldots$.

2. *К проблеме Райха – Вольькзака.* Если два квазиконформных отображения f и g имеют одинаковую комплексную характеристику μ в окрестности точки z_0, то в этой окрестности $f = \mathscr{A} \circ g$, где $\mathscr{A}$ — некоторая аналитическая функция. Таким образом, дифференциальные свойства квазиконформного отображения в точке полностью определяются комплексной характеристикой этого отображения в окрестности данной точки.

В работе [7] высказана гипотеза, что каков бы ни был модуль комплексной характеристики $g(z) = |\mu(z)|$, можно всегда так подобрать аргумент $\arg\mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в любой наперед заданной точке $z_0 \in \mathbb{C}$. Эта проблема остается открытой.

Напомним, что отображение f называется конформным в точке z_0, если оно дифференцируемо в этой точке в смысле Дарбу – Штольца:

$$f(z) - f(z_0) = f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\bar{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o\left(|z - z_0|\right)$$

и если $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$, а $f_z(z_0) \neq 0$.

Как установил Б.В.Шабат (см., например, [2, с.40]), даже при непрерывной комплексной характеристике $\mu(z)$ соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ может быть недифференцируемым в указанном смысле. Однако в этом случае, как, по-видимому, впервые установил П.П.Белинский [2, с.41], $u = f(z)$ дифференцируемо в следующем смысле:

$$\Delta u = A(\rho)\left[\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z} + o(\rho)\right], \tag{10}$$

где $\mu_0 = \mu(z_0)$, $A(\rho)$ зависит только от $\rho = |\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z}|$, а $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Как показано в работе [13], при этом для любого $t > 0$

$$\lim_{\rho\to 0} A(t\rho)/A(\rho) = 1. \tag{11}$$

Дифференцируемость в смысле (10), (11) в дальнейшем именуется как дифференцируемость по Белинскому. При этом μ_0 в (10) не обязательно равно $\mu(z_0)$.

Будем также говорить, что f конформно в точке z_0 по Белинскому, если f дифференцируемо в этой точке по Белинскому и в (10) $\mu_0 = 0$. В [13] установлено, что для конформности по Белинскому в нуле отображения $f\colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$ и $f(\infty) = \infty$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\zeta \in \mathbb{C}$

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta. \tag{12}$$

При этом предел является локально равномерным относительно ζ.

В частности, отсюда при $|\zeta| = 1$ получаем

$$\lim_{r\to 0}\max_{|z|=r}|f(z)|\Big/\min_{|z|=r}|f(z)| = 1, \tag{13}$$

т.е. характеристика Лаврентьева $p(0) = 1$. В этом случае естественно говорить, что отображение f конформно в нуле в смысле Лаврентьева. Как мы видим, из обычной конформности следует конформность по Белинскому, а из последней — конформность по Лаврентьеву, означающая геометрически, что инфинитезимальный круг в данной точке переходит в инфинитезимальный круг. Отметим также, что при конформности по Белинскому из (12) имеем

$$\lim_{z\to 0}\left[\arg f(z\zeta)-\arg f(z)\right]=\arg\zeta, \tag{14}$$

$$\lim_{z\to 0}\left|f(z\zeta)\right|/\left|f(z)\right| = \left|\zeta\right|. \tag{15}$$

Таким образом, соотношения (14) и (15) являются характеристическим свойством конформности по Белинскому и геометрически означает отсутствие в данной точке относительной деформации и сохранение углов в указанном смысле. Отметим, что в отличие от обычной конформности допускается переход радиальной линии в бесконечную накручивающуюся спираль, а также бесконечно большое растяжение и сжатие в точке.

В работе [13] показано, что необходимым и достаточным условием конформности по Белинскому в нуле является сходимость $\mu(\tau z)\xrightarrow{\text{ch.}}0$ при $\tau\to$ $\to 0$ в смысле характеристик. Этот критерий в сочетании с результатами работ [8, 10] позволит нам дать положительное решение проблемы Райха – Волькзака относительно конформности по Белинскому. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $q(z)$: $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ – *произвольная измеримая функция такая, что* $0\le q(z)\le q<1$. *Тогда существует измеримая функция* $\vartheta(z)$: $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, *для которой квазиконформное отображение* $f(z)$: $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ *с комплексной характеристикой* $\mu(z)=g(z)e^{i\nu(z)}$ *и нормировками* $f(0)=0$, $f(1)=1$ *и* $f(\infty)=\infty$ *является конформным по Белинскому в нуле.*

3. *Доказательство теоремы* 1. Согласно упомянутому критерию достаточно показать, что $\mu_\tau(z)=\mu(\tau z)\xrightarrow{\text{ch.}}0$ при $\tau\to 0$ в смысле характеристик при соответствующем выборе $\vartheta(z)=\arg\mu(z)$. Семейству характеристик $\mu_\tau(z)$ отвечает семейство отображений f_τ: $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $\tau>0$,

$$f_\tau(z)=f(\tau z)/f(\tau), \tag{16}$$

нормированных условиями $f_\tau(0)=0$, $f_\tau(1)=1$ и $f_\tau(\infty)=\infty$. Сходимость $\mu_\tau(z)\xrightarrow{\text{ch.}}0$ в смысле характеристик эквивалентна сходимости $f_\tau(z)\xrightarrow{\text{л.р.}}z$ на $\mathbb{C}_0=\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, где $\mathbb{R}^-$ — отрицательная вещественная полуось [1, с.76].

Таким образом, конформность по Белинскому f в нуле эквивалентна сходимости $F_t(\zeta)\xrightarrow{\text{л.р.}}e^{\zeta}$ при $t\to+\infty$, где

$$F_t(\zeta)=f\left(e^{\zeta-t}\right)\Big/f\left(e^{-t}\right) \tag{17}$$

— семейство отображений $F_t(\zeta)$: $\Pi\to\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{R}^-)$, $t\in\mathbb{R}$, заданных в полосе

$$\Pi=\left\{\zeta\in\mathbb{C}:\left|\operatorname{Im}\zeta\right|<\pi\right\}. \tag{18}$$

Их комплексные характеристики равны $\mathrm{M}(\zeta-t)$, где

$$\mathrm{M}(\zeta)=\mu\left(e^{\zeta}\right)e^{-2i\operatorname{Im}\zeta}, \tag{19}$$

т.е.

$$\left|\mathrm{M}(\zeta)\right|=q\left(e^{\zeta}\right) \tag{20}$$

и

$$\alpha(\zeta)=\arg\mathrm{M}(\zeta)=\vartheta\left(e^{\zeta}\right)-2\operatorname{Im}\zeta. \tag{21}$$

Пусть

$$\nu(z) = \begin{cases} \mathrm{M}(\zeta), \zeta \in \Pi, \\ 0, \zeta \in \mathrm{C} \setminus \Pi. \end{cases} \tag{22}$$

В силу леммы 5 [12] и секвенциальной компактности пространства $\mathfrak{M}_q$ доказываемое утверждение эквивалентно тому, что $\nu(\zeta - t) \xrightarrow{\text{ch.}} 0$ при $t \to +\infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Обозначим через

$$\Pi_l = \{\zeta \in \Pi : l \le \operatorname{Re} \zeta < l + 1\}, \tag{23}$$

$l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, полуоткрытые прямоугольники, образующие исчерпание полосы Π, а через χ_l характеристические функции этих прямоугольников. В дальнейшем для произвольной функции $\varphi(\zeta)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ обозначаем

$$\varphi_l(\zeta) = \varphi(\zeta)\chi_l(\zeta),\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{24}$$

и

$$\varphi^{(t)}(\zeta) = \varphi(\zeta - t),\ t \in \mathrm{R}. \tag{25}$$

Поскольку указанные операции срезания и сдвига функций не коммутируют друг с другом, то уточним обозначение

$$\varphi_l^{(t)}(\zeta) = \left[\varphi^{(t)}(\zeta)\right]_l = \varphi(\zeta - t)\chi_l(\zeta). \tag{26}$$

В этих обозначениях критерий доказываемого утверждения состоит в том, что при $t \to +\infty$

$$\nu^{(t)} \xrightarrow{\text{ch.}} 0. \tag{27}$$

В силу предложения 2 это эквивалентно тому, что при $t \to +\infty$

$$\nu_l^{(t)} \xrightarrow{\text{ch.}} 0 \tag{28}$$

для всех $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Заметим однако, что поскольку $\chi_l(\zeta) = \chi_0(\zeta - l)$, то

$$\nu_l^{(t)}(\zeta) = \nu_0^{(\tau)}(w), \tag{29}$$

где $\tau = t - l$ и $w = \zeta - l$. Таким образом, в силу предложения 1 условие (28) эквивалентно условию

$$\nu_0^{(t)} \xrightarrow{\text{ch.}} 0 \tag{30}$$

при $t \to +\infty$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть

$$k(\zeta) = \begin{cases} q\left(e^{\zeta}\right), \zeta \in \Pi, \\ 0, \zeta \in \mathrm{C} \setminus \Pi. \end{cases} \tag{31}$$

Полагаем

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} k(\zeta)e^{i\alpha_l(\zeta)}, \zeta \in \Pi_l, l = 0, 1, 2, \ldots, \\ k(\zeta), \zeta \in \mathrm{C} \setminus \Pi^+, \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\Pi^+ = \bigcup_{l=0}^{+\infty} \Pi_l, \tag{33}$$

а функции $\alpha_l(\zeta)$ подобраны так, что

$$\rho\left(\nu_0^{(l)}, 0\right) < 2^{-l},\ l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

в некоторой метрике ρ из пространства характеристик $\mathfrak{M}_q$. Это всегда можно сделать в силу теоремы замыкания для класса характеристик со значениями из семейства множеств $N(\zeta) = \left\{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| = k_0^{(l)}(\zeta)\right\}$, $\zeta \in \mathbb{C}$, состоящего в данном случае из окружностей с центром в нуле (см. [8, 10]).

Таким образом, по построению

$$\nu_0^{(l)} \xrightarrow{\text{ch.}} 0 \tag{35}$$

при $l \to \infty$, $l = 1, 2, \ldots$. Покажем, что это влечет (30). В силу секвенциальной компактности пространства $\mathfrak{M}_q$ для этого достаточно проверить, что

$$\nu_0^{(t_n)} \xrightarrow{\text{ch.}} 0 \tag{36}$$

при $n \to \infty$ для произвольной последовательности $t_n \in \mathbb{R}^+$, $n = 1, 2, \ldots$, с $t_n \to \infty$. Пусть $l_n = [t_n]$ и $\lambda_n = \{t_n\}$ – целая и дробная части t_n, $n = 1, 2, \ldots$, соответственно. Тогда $l_n \to \infty$ при $n \to \infty$, а $\lambda_n \in [0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_n \to \lambda_0 \in [0, 1]$.

Для любого $\lambda \in [0, 1]$

$$\chi_0(\zeta) = \chi_0(\zeta)\left[\chi_0(\zeta - (\lambda - 1)) + \chi_0(\zeta - \lambda)\right] = \kappa^\lambda(\zeta) + \eta^\lambda(\zeta),$$

где κ^λ и η^λ – характеристические функции полуоткрытых прямоугольников

$$P^\lambda = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\zeta| < \pi,\ 0 \le \operatorname{Re}\zeta < \lambda\right\}$$

и

$$R^\lambda = \left\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\zeta| < \pi,\ \lambda \le \operatorname{Re}\zeta < 1\right\}.$$

Как видим, $\Pi_0 = P^\lambda \cup R^\lambda$. В указанных обозначениях

$$\nu_0^{(t_n)}(\zeta) = \chi_0(\zeta)\nu(\zeta - l_n - \lambda_n) = \chi_0(\zeta)\left[\nu_0^{(1+l_n)}\left(\zeta - \left(\lambda_n - 1\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \nu_0^{(l_n)}\left(\zeta - \lambda_n\right)\right] = \kappa^{\lambda_n}(\zeta)\nu_0^{(1+l_n)}\left(\zeta - \left(\lambda_n - 1\right)\right) + \eta^{\lambda_n}(\zeta)\nu_0^{(l_n)}\left(\zeta - \lambda_n\right).$$

Поэтому в силу предложений 1 и 2 из (35) получаем (36), что и завершает доказательство.

1. *Lehto O., Virtanen K.* Quassikonforme Abbildungen.– Berlin ect.: Springer, 1965.– 269 P.
2. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений.– Новосибирск: Наука, 1974.– 98 с.
3. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами//Мат. сб.–1957.– **43**, № 4.– С. 451–503.
4. *Strebel K.* Ein konvergenzsatz für Folgen quasiconformer Abbildungen// Comment. math. helv.– 1969.– **44**, №4.– S. 469–475.
5. *Teichmuller O.* Untersuchungen über konforme und quasiconforme Abbildungen// Deutsche Math. -1938.– **3**.– P. 621–673.
6. *Wittich H.* Zum Beweis eines Satzes uber quasiconforme Abbildungen//Math.Z.–1948.– **51**.– P.278-288.
7. *Reich E., Walczak H.* On the behaviour of quasiconformal mappings at the point// Trans. Amer. Math. Soc.– 1965.– **117**, №5.– P. 338–351.
8. *Ryazanov V. I.* Some quations of convergence and compactness for quasiconformal mappings// Amer. Math. Soc. Transl.– 1986.– **131**, №2.– P. 7–19.
9. *Ryazanov V. I.* On necessary and sufficient condition for convergence of complex dilatations// Pliska: Stud. math. bulg.– 1989.– **10**.– P. 39–44.
10. *Рязанов В. И.* Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений// Теория отображений и приближение функций.– Киев: Наук. думка, 1983.– С. 50–62.
11. *Рязанов В. И.* О сходимости характеристик квазиконформных отображений // Укр. мат. журн.– 1986.– **38**, №2.– С. 200–204.
12. *Рязанов В. И.* О компактификации классов с интегральными ограничениями на характеристики Лаврентьева // Сиб. мат. журн.– 1992.– **33**, №1.– С. 87–104.
13. *Рязанов В. И.* Критерий дифференцируемости по Белинскому и его следствия // Укр. мат. журн.– 1992.– **44**, №2.– С. 295–300.

Получено 01.04.92