УДК 517.946

И.В.Скрыпник, акад. АН Украины (Ин-т прикл.математики и механики АН Украины, Донецк),
М. А.Наумова, ассист. (Донец. ун-т)

ПОТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С ТОНКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Установлена поточечная оценка решения задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка в области, ограниченная компонента дополнения к которой содержится в малой окрестности множества $\{x \in R^n\colon |x| \le 1/2, x_1 = \ldots = x_s = 0\}$.

Встановлена поточкова оцінка розв'язку задачі Діріхле для квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку в області, обмежена компонента доповнення до якої міститься у малому околі множини $\{x \in R^n\colon |x| \le 1/2, x_1 = \ldots = x_s = 0\}$.

1. *Основные предположения и главный результат.* Поточечные оценки решений нелинейных эллиптических и параболических задач стали в последнее время основой построения усредненных задач в перфорированных областях, изучения поведения решений вблизи негладкой границы и на бесконечности, установления устранимости особенностей решений нелинейных задач. Методы получения поточечных оценок разработаны И. В. Скрыпником. Роль этих оценок и некоторые из возможных приложений изложены в монографии [1].

Пусть s – целое число, $2 < s \le n - 1$, $x' = (x_1, \ldots x_s)$, $x'' = (x_{s+1}, \ldots, x_n)$. Обозначим

$$Q = \{x \in R^n\colon |x'| \le 1, |x''| \le 1\},$$

$$Q' = \{x \in R^n\colon |x'| \le d, |x''| \le H\}$$

при $d \le \frac{1}{4} \le H \le \frac{1}{2}$. Изучим поведение решения граничной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad x \in \Omega = Q \setminus F, \tag{1}$$

$$u(x) = 0 \quad x \in \partial Q, \quad u(x) = k \quad x \in \partial F, \tag{2}$$

где F — содержащееся в Q' открытое множество.

В дальнейшем предполагаем, что функции $a_i(x, p)$, $i = 1, \ldots, n$, определены при $x \in Q, p \in R^n$ и удовлетворяют условиям:

а) $a_i(x, p)$ непрерывны по p при почти всех $x \in Q$, измеримы по x при любом p, $a_i(x, 0) = 0$ при $x \in Q$, $i = 1, \ldots, n$;

б) существуют положительные постоянные ν_1, ν_2 такие, что при всех значениях $x \in Q, p \in R^n$ выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,p) p_i \ge \nu_1 (1 + |p|)^{m-2} |p|^2, \tag{3}$$

$$|a_i(x,p)| \le \nu_2 (1 + |p|)^{m-2} |p|, \quad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

с некоторым $m \in [2, s)$.

Ограничимся рассмотрением модельного уравнения только ради простоты изложения. Доказательство поточечных оценок упрощается, если в неравенствах (3), (4) заменить правые части соответственно выражениями $\nu_1 |p|^m$, $\nu_2 |p|^{m-1}$. Также можно рассмотреть случаи $1 < m < 2$, $m = s$, только при $m = s$

изменяется вид априорной оценки.

Методами теории монотонных операторов просто доказывается разрешимость задачи (1), (2) в $W_m^1(\Omega)$, если, например, дополнительное условие

$$\sum_{i=1}^{n}[a_i(x,p)-a_i(x,q)](p_i-q_i)\ge 0$$

справедливо при $x\in\Omega$, p, $q\in R^n$. Пусть $\psi_F(x)$ — функция класса $C_0^\infty(\Omega)$, равная единице на F. Функцию $u(x,k)\in W_m^1(\Omega)$ называем решением задачи (1), (2), если $u(x,k)-k\psi_F(x)\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ и для произвольной функции $\varphi(x)\in$ $\in \overset{\circ}{W}{}_m^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}a_i\left(x,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx=0. \tag{5}$$

С помощью неравенств (3), (4) легко получить оценку

$$0\le\frac{1}{k}u(x,k)\le 1 \text{ при } k\ne 0. \tag{6}$$

Целью настоящей работы является доказательство поточечной оценки

$$|u(x,k)|\le C|k|\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{s-m}{m-1}} \tag{7}$$

с постоянной C, зависящей лишь от m, n, s, ν_1, ν_2. Эта оценка носит неулучшаемый характер в том смысле, что показатель степени $\dfrac{s-m}{m-1}$ в правой части не может быть увеличен. Более того, при $\overline{F}=Q'$ может быть получена двусторонняя оценка

$$C_1|k|\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{s-m}{m-1}}\le\max_{|x'|=r}|u(x,k)|\le C_2|k|\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{s-m}{m-1}},$$

показывающая точность неравенства (7).

В дальнейшем будем считать $k>0$, так как при $k<0$ оценка (7) для $u(x,k)$ является следствием такой же оценки для функции $v(x,-k)=-u(x,k)$, являющейся решением задачи вида (1), (2), удовлетворяющей условиям а), б).

При $s=n$ оценка (7) доказана в статье [2], и эта оценка явилась основой построения усреднения квазилинейных эллиптических задач в областях с мелкозернистой границей.

Доказательство оценки (7) при $s=n-1$ существенно отличается от метода, использованного в работе [2]. Случай $s=n-1$ рассмотрен в гл.10 монографии [1], и соответствующая оценка позволила изучить усреднение квазилинейных эллиптических задач в областях с каналами. Отметим, что способ доказательства оценки (7) в случае $s=n-1$ при соответствующей его модификации позволил получить поточечную оценку решения квазилинейной параболической задачи в перфорированной области (см. [3]).

Получение оценки (7) при $s<n-1$ потребовало дальнейших значительных изменений в методе доказательства. Доказанная в данной работе оценка,

как и способ ее получения, открывают возможности изучения качественных свойств решений новых классов нелинейных уравнений, в частности, с вырождением, и построения теории усреднения для перфорированных областей, дополнения к которым содержатся в трубчатых окрестностях многообразий различной размерности.

2. *Предварительные интегральные и поточечные оценки.* Определим при $d < r \le 1$:

$$m(r) = \operatorname*{vrai\,max}_{|x'|=r,\,|x''|\le 1} u(x,k), \quad u_r(x,k) = \max\{u(x,k) - m(r), 0\},$$
$$E_r = \{x\colon u(x,k) > m(r)\}. \tag{8}$$

Легко проверяется включение

$$E_r \subset \{x \in R^n\colon |x'| \le r,\ |x''| \le 1\}. \tag{9}$$

Зафиксируем в дальнейшем четную бесконечно дифференцируемую функцию $\chi(t)$, $t \in R^1$, равную единице при $|t| \le \frac{1}{2}$, нулю при $|t| \ge 1$ и такую, что $-3 \le \frac{d\chi(t)}{dt} \le 0$ при $t \ge 0$. Пусть при $x'', \eta \in R^{n-s}$ $\chi_h(x'',\eta) = \chi\left(|x' - \eta|/h\right)$ для $h > 0$. Тогда $\chi_{h_1}(x'',\eta) \le \chi_{h_2}(x'',\eta)$ при $h_1 \le h_2$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существуют постоянные K_1, K_2, зависящие лишь от m, n, s, ν_1, ν_2, такие, что при $k > 0$, $d < r < 1$, $K_1 r \le h \le H$, $\eta \in R^{n-s}$, $|\eta| \le 1$ для решения $u(x, k)$ задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\int_{E_r} \left(1 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \chi_h^m(x'',\eta)\,dx \le K_2 h^{n-s}(k - m(r))kd^{s-m}(k+d)^{m-2}. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2.1 гл. 10 [1] и поэтому его опускаем.

Пусть μ – произвольное число из интервала $(0, k - m(r))$. Введем обозначения

$$[u_r]_\mu = \min\{u_r(x,k), \mu\}, \quad E_{r,m} = \{x \in \Omega\colon 0 \le u_r(x,k) \le \mu\},$$
$$F_{r,\mu} = \{x \in \Omega\colon u_r(x,k) \ge \mu\}. \tag{11}$$

Лемма 1. *Существует постоянная K_3, зависящая лишь от m, n, s, ν_1, ν_2, такая, что для решения $u(x, k)$ задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\int_{E_{r,\mu}} \left(1 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2} \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx \le K_3 H^{n-s} \mu k d^{s-m}(k+d)^{m-2} \tag{12}$$

при $k > 0$, $d < r < 1$, $0 < \mu < k - m(r)$.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 2.7 гл. 10 [1].

Теорема 2. *Существует постоянная K_4, зависящая лишь от m, n, s, ν_1, ν_2, такая, что справедлива оценка*

$$u(x,k) \le K_4 k \left(\frac{H^{n-s} d^{s-m}}{|x'|^{n-m}}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{13}$$

Аналогично доказательству леммы 2.8 гл. 10 [1] с помощью неравенства (12) могут быть получены оценки

$$m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)\le C_1 k\left(\frac{H^{n-s}d^{s-m}}{r^{n-m}}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{при } k>d,$$

$$m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)\le C_2 k\frac{H^{n-s}d^{s-2}}{r^{n-2}} \quad \text{при } k\le d, \tag{14}$$

где $r\in[2d,1]$ и C_1, C_2 — постоянные, зависящие лишь от m, n, s, ν_1, ν_2.

Далее, при $k\le d$ из второго неравенства в (14) имеем

$$m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)\le\left[m\left(\frac{r}{2}\right)\right]^{\frac{m-2}{m-1}}\left[m\left(\frac{r}{2}\right)-m(r)\right]^{\frac{1}{m-1}}\le$$

$$\le k^{\frac{m-2}{m-1}}\left[C_2 k\frac{H^{n-s}d^{s-m}}{r^{n-m}}\right]^{\frac{1}{m-1}}\left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{m-2}{m-1}}\le C_2^{\frac{1}{m-1}}k\left[\frac{H^{n-s}d^{s-m}}{r^{n-m}}\right]^{\frac{1}{m-1}}. \tag{15}$$

Из первой оценки в (14), оценки (15) и леммы 2.9 гл. 10 [1] следует неравенство (13).

Аналогично доказательствам лемм 2.8, 2.9 гл.10 [1], используя вместо оценки (12) оценку (10) при $h=k_1 r$, можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Существует постоянная K_5, зависящая лишь от m, n, s, ν_1, ν_2, такая, что для решения $u(x,k)$ задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$u(x,k)\le K_5 k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{s-m}{m}}. \tag{16}$$

3. *Оценка $I_{r,\mu}(h,\eta)$.* Пусть q — число из интервала $\left(1,\frac{m}{m-1}\right)$, выбор которого будет указан далее. Обозначим

$$I_{r,\mu}(h,\eta)=\int\limits_{\Omega}u_r^{-m+q(m-1)}(x,k)\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^m(x'',\eta)\,dx, \tag{17}$$

где $d<r<1$, $\mu\in(0,k-m(r))$, $K_1 r\le h\le H$, $\eta\in R^{n-s}$, $u_r(x,k)$ определяется по решению $u(x,k)$ задачи (1), (2) равенством (8). Сходимость интеграла в (17) будет показана в ходе доказательства следующей леммы.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(h,\eta)\le\frac{K_6}{(q-1)^m}\left\{\left(\frac{r}{h}\right)^2 I_{r,\mu}(2h,\eta)+\mu^{(q-1)(m-1)}k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu^{(q-1)(m-1)}}{h}\int\limits_{F_{r,\mu}}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^m(x'',\eta)\,dx\right\} \tag{18}$$

с постоянной K_6, зависящей только от m, n, s, ν_1, ν_2.

Доказательство. Пусть ε — произвольное число из интервала $(0,\mu)$.

Подставим в интегральное тождество (5) $\varphi(x)=\tilde\varphi(x)\chi_h^m(x'',\eta)$, где

$$\tilde\varphi(x)=\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{-m+q(m-1)}[u_r]_\mu-(\mu+\varepsilon)^{-m+q(m-1)}\mu\frac{u_r(x,k)}{k-m(r)}$$

с $[u_r]_\mu$, определеной равенством (11).

Используя неравенства (3), (4) и (10), получаем

$$\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^m(x'',\eta)dx\le$$

$$\le\frac{C_3}{q-1}\left\{\frac{1}{h}\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}[u_r]_\mu\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h^{m-1}(x'',\eta)dx+\right.$$

$$\left.+\mu^{(q-1)(m-1)}k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m}\right\}. \qquad (19)$$

Здесь и далее через C_j обозначаем постоянные, зависящие лишь от m, n, s, ν_1, ν_2.

Ометим, что если вместо функции $\varphi(x)$ подставить в интегральное тождество (5) функцию $\tilde\varphi(x)$, то получим неравенство вида (19), в котором отсутствуют $\chi_h^m(x'',\eta)$ в первом интеграле и интеграл в правой части, а в последнем слагаемом h заменено на H. Из такого неравенства, в силу теоремы Фату, следует сходимость интеграла в (17).

Интеграл в правой части (19) представим в виде суммы двух интегралов соответственно по $E_{r,\mu}$ и $F_{r,\mu}$, и первый из них оценим:

$$\frac{C_3}{(q-1)h}\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}[u_r]_\mu\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h^{m-1}(x'',\eta)dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^m(x'',\eta)dx+$$

$$+\frac{C_4}{(q-1)^m}\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}\left\{\frac{[u_r]_\mu^m}{h^m}+\frac{[u_r]_\mu^2}{h^2}\right\}\chi_{2h}^m(x'',\eta)dx. \qquad (20)$$

Последний интеграл оцениваем, используя неравенство Пуанкаре. Имеем при $p=2, m$:

$$\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}\frac{[u_r]_\mu^p}{h^p}\chi_{2h}^m(x'',\eta)dx\le$$

$$\le C_5\left(\frac{r}{h}\right)^p\int\limits_{E_{r,\mu}}\Big([u_r]_\mu+\varepsilon\Big)^{q(m-1)-m}\left|\frac{\partial u}{\partial x'}\right|^p\chi_{2h}^m(x'',\eta)dx. \qquad (21)$$

Из неравенств (19) – (21), переходя к пределу при $\varepsilon\to0$, получаем оценку

(18).

Лемма 3. *Существует постоянная* K_7, *зависящая лишь от* m, n, s, ν_1, ν_2, *такая, что справедлива оценка*

$$\int\limits_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}(x,k)\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \chi_h^m(x'',\eta)dx \le$$

$$\le \frac{K_7\mu^{1-q}}{(q-1)^m}\left\{k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m} +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{F_{r,\mu}}\left[\frac{1}{h^m}\mu^{(1-q)(m-1)}u_r^{q(m-1)}(x,k)+\frac{\mu^{1-q}}{h^2}u_r^q(x,k)\right]\chi_{2h}^m(x'',\eta)dx\right\}. \tag{22}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.6 гл. 10 [1].

Теорема 4. *При выполнении условий а), б) для решения* $u(x,k)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(h,\eta) \le \frac{K_8}{(q-1)^{2m}}\left\{\left(\frac{r}{h}\right)^2 I_{r,\mu}(2h,\eta) +\right.$$

$$+\mu^{(q-1)(m-1)}k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m} +$$

$$\left.+\int\limits_{F_{r,\mu}}\left[\frac{1}{h^m}u_r^{q(m-1)}(x,k)+\frac{1}{h^2}u_r^{q(m-1)-m+2}(x,k)\right]\chi_{2h}^m(x'',\eta)dx\right\}, \tag{23}$$

где $I_{r,\mu}(h,\eta)$ *определяется равенством* (17), $k > 0$, $q \in \left(1,\dfrac{m}{m-1}\right)$, $0 < \mu < k - m(r)$, $d < r < 1$, $|\eta| \le \dfrac{1}{2}$, $K_1 r \le h \le H$ *и постоянная* K_8 *зависит только от* m, n, s, ν_1, ν_2.

Доказательство. Оценим интеграл из неравенства (18):

$$\frac{1}{h}\int\limits_{F_{r,\mu}}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\chi_h^{m-1}(x'',\eta)dx \le$$

$$\le \mu^{q-1}\int\limits_{F_{r,\mu}} u_r^{-q}(x,k)\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\chi_h^m(x'',\eta)dx +$$

$$+ C_6\int\limits_{F_{r,\mu}}\left\{\mu^{(1-q)(m-1)}\frac{u_r^{q(m-1)}}{h^m}+\mu^{1-q}\frac{u_r^q}{h^2}\right\}\chi_{2h}^m(x'',\eta)dx. \tag{24}$$

Оценка (23) следует из неравенств (18), (24), если оценить первый интеграл правой части (24) по неравенству (22) и воспользоваться при $x \in F_{r\mu}$ оценкой $u_r(x,k) \ge \mu$.

Замечание 1. Аналогично доказательству теоремы 4, только без использования срезывающих функций $\chi_h^m(x'', \eta)$, доказывается оценка

$$\int\limits_{E_{r,\mu}} u_r^{-m+q(m-1)}(x,k)\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx \le$$

$$\le \frac{K_8}{(q-1)^{2m}}\left\{\mu^{(q-1)(m-1)}k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{F_{r,\mu}}\left[\frac{1}{h^m}u_r^{q(m-1)}(x,k)+\frac{1}{h^2}u_r^{q(m-1)-m+2}(x,k)\right]dx.\right.$$

4. *Последовательное улучшение интегральных оценок.* Будем исходить далее из дополнительного предположения, что при некотором $\lambda \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}\right)$ и некоторой постоянной $A_1 \ge K_4$ справедлива оценка

$$u(x,k) \le A_1 k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\lambda(s-m)}, \ x \in \Omega. \tag{25}$$

Доказажем справедливость более сильной оценки вида (25) с той же постоянной A_1 и с заменой λ на некоторое $\lambda' > \lambda$. Такое последовательное улучшение поточечной оценки в итоге приведет к оценке вида (25) с заменой λ на $m-1$, т.е. к цели нашего доказательства — оценке (7). Отметим справедливость оценки (25) с $\lambda = 1/m$, что следует из теоремы 3. Последовательному улучшению поточечных оценок, которое будет осуществлено в следующем пункте, предшествует в данном пункте последовательное улучшение предварительных интегральных оценок.

Если предполагать выполненной оценку (25), то при любом $\theta \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$u(x,k) \le M(A_1)k\left(\frac{H}{|x'|}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{p}, \ x \in \Omega, \tag{26}$$

где $M(A_1) = K_4^{\theta}A_1^{1-\theta}$,

$$\alpha = \frac{n-s}{m-1}\theta, \beta = \frac{s-m}{m-1}\theta + \lambda(s-m)(1-\theta). \tag{27}$$

Оценка (26) является непосредственным следствием оценок (13), (25).

Введем при произвольных положительных числах A, r, ρ, h и $\eta \in R^{n-s}$ обозначения

$$R_{r,\rho}(A,h) = \left[Ak\left(\frac{d}{\rho}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m} +$$

$$+\left[M(A)k\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)} r^s h^{n-s-m} +$$

$$+\left[M(A)k\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2} r^s h^{n-s}, \tag{28}$$

$$J_r(h,\eta)=\int\limits_{E_r}\left\{\frac{1}{h^m}u_r^{q(m-1)}(x,k)+\frac{1}{h^2}u_r^{q(m-1)-m+2}(x,k)\right\}\chi_h^m(x'',\eta)dx \tag{29}$$

и пусть $R_r(A, h)=R_{r,r}(A,h)$.

Зафиксируем в дальнейшем значения q и θ, полагая их соответственно равными

$$q=\frac{s-m+1}{s-m},\quad \theta=\frac{s-m}{2(s-1)(n-s)}. \tag{30}$$

В этом случае, в частности, справедливо неравенство

$$(\alpha+\beta)q(m-1)<s. \tag{31}$$

Теорема 5. *Предположим, что* q, θ *определяются равенствами* (30) *и для решения* $u(x, k)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка* (25) *при* $A_1 > K_4$ *и* $\lambda\in\left[\frac{1}{m},\frac{1}{m-1}\right)$. *Существуют постоянные* $A_2, A_3, A_4\in[1,\infty)$, *зависящие лишь от* m, n, s, ν_1, ν_2, *такие, что из справедливости при некоторых* $\bar r\in[8d, 1]$, $h\in(0, H]$ *оценок*

$$J_r(h,\eta)\le A_2R_r(A_1,h), \tag{32}$$

$$I_{r,\mu}(h,\eta)\le A_3R_{r,\rho}(A_1,h),\quad \mu=m(\rho)-m(r) \tag{33}$$

при $2d\le r\le\bar r$, $|\eta|\le 1$, $\frac{r}{4^{m+1}}\le\rho\le r$, $2d\le\rho$ *и неравенства*

$$A_4\bar r\le h \tag{34}$$

следует выполнение оценок

$$J_r\left(\frac{h}{2},\eta\right)\le A_2R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right), \tag{35}$$

$$I_{r,\mu}\left(\frac{h}{2},\eta\right)\le A_3R_{r,\rho}\left(A_1,\frac{h}{2}\right),\ \mu=m(\rho)-m(r) \tag{36}$$

при $2d\le r\le\frac{\bar r}{2}$, $|\eta|\le 1$, $\frac{r}{4^{m+1}}\le\rho\le r$, $2d\le\rho$.

Доказательство. Отметим вначале, что в условиях теоремы с некоторыми постоянными C_7, C_8 справедливы оценки

$$J_r(H,\eta)\le C_7R_r(A_1,H), \tag{37}$$

$$I_{r,\mu}(H,\eta)\le C_8R_{r,\rho}(A_1,H),\quad \mu=m(\rho)-m(r). \tag{38}$$

при $2d\le r\le 1$, $|\eta|\le 1$, $2d\le\rho\le r$. Эти неравенства непосредственно следуют из замечания 1, оценок (25), (26) и условия (31).

Далее будем предполагать, что $A_2\ge C_7$, $A_3\ge C_8$. Докажем вначале неравенство (36). Пусть $\rho = 4^{m+1}$. Используя неравенства (33) и Пуанкаре, при $\mu = m\left(\frac{r}{p}\right)-m(r)$, $r\le\bar r$ получаем

$$J_r\left(\frac{h}{2},\eta\right)\le 4^m\int\limits_{E_r}\left\{\frac{1}{h^m}[u_r]_\mu^{q(m-1)}+\frac{1}{h^2}[u_r]_\mu^{q(m-1)-m+2}\right\}\chi_h^m(x'',\eta)dx+$$

$$+4^m J_{\frac{r}{p}}\left(\frac{h}{2},\eta\right) \le C_9\left(\frac{r}{h}\right)^2 I_{r,\mu}(h,\eta)+4^m J_{\frac{r}{p}}\left(\frac{h}{2},\eta\right) \le$$

$$\le C_9 A_3\left(\frac{r}{h}\right)^2 R_{r,\frac{r}{p}}(A_1,h)+4^m J_{\frac{r}{p}}\left(\frac{h}{2},\eta\right). \tag{39}$$

Отсюда, обозначая $J_j = J_{p^{-j}r}\left(\frac{h}{2},\eta\right)$, при $r \ge 2dp^{j+1}$ имеем

$$J_j \le C_9 p^2 A_3 \sum_{i=1}^{3} R_r^{(i)}(A_1,h)p^{-\tau_i j}+4^m J_{j+1}, \tag{40}$$

где

$$R_r^{(1)}(A_1,h)=\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[A_1 k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m},$$

$$R_r^{(2)}(A_1,h)=\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[M(A_1)k\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)} r^s h^{n-s-m},$$

$$R_r^{(3)}(A_1,h)=\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[M(A_1)k\left(\frac{h}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2} r^s h^{n-s-2},$$

$$\tau_1 = 2-\lambda(s-m)(q-1)(m-1),$$

$$\tau_2 = 2-(\alpha+\beta)q(m-1)+s,$$

$$\tau_3 = 2-(\alpha+\beta)[q(m-1)-m+2]+s.$$

В силу выбора q и условия (31) $\tau_1 \ge 1$, $\tau_2 \ge 2$, $\tau_3 \ge 2$. Тем самым из (40) находим

$$J_j \le 2^n C_9 A_3\left(\frac{r}{h}\right)^2 R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right)p^{2-j}+4^m J_{j+1}. \tag{41}$$

Выбирая целое число j_0 так, чтобы $2dp^{j_0} \le r \le 2dp^{j_0+1}$, последовательным применением неравенства (41) получаем

$$J_r\left(\frac{h}{2},\eta\right) \le 2^n C_9 A_3\left(\frac{r}{h}\right)^2 R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right)\sum_{j=0}^{j_0-1}\left(\frac{4^m}{p}\right)^j+4^{mj_0}J_{j_0}.$$

Число p выбираем равным 4^{m+1} и, тем самым, из последнего неравенства следует

$$J_r\left(\frac{h}{2},\eta\right) \le C_{10}A_3\left(\frac{r}{h}\right)^2 R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right)+4^{mj_0}J_{j_0}. \tag{42}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (42), используя выбор p, j_0, неравенство (6) и включение (9):

$$4^{mj_0}J_{j_0} \le C_{11}\frac{r}{d}\{k^{q(m-1)}h^{n-s-m}+k^{q(m-1)-m+2}h^{n-s-2}\}d^s.$$

Проверяется, что правая часть последнего неравенства не превышает $C_{12}R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right)$, и из (41) следует оценка

$$J_r\left(\frac{h}{2},\eta\right) \le C_{13}\left[\left(\frac{r}{h}\right)^2 A_3+1\right]R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right), \tag{43}$$

Требуемое неравенство (35) доказывается, если подчинить A_2, A_3, A_4 условию

$$C_{13}[A_4^{-2}A_3 + 1] \le A_2. \tag{44}$$

Далее доказываем неравенство (36). Из теоремы 4, неравенств (32) и (43) при $\mu = m(\rho) - m(r)$, $r \le \dfrac{\bar r}{2}$ имеем

$$J_{r,\mu}\left(\frac{h}{2},\eta\right) \le C_{14}\left\{\left(\frac{r}{h}\right)^2 A_3 R_{r,\rho}(A_1,h) + [m(\rho)]^{(q-1)(m-1)}k(k+d)^{m-2}h^{n-s}d^{s-m} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{r}{h}\right)^2 A_3+1\right]R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right)\right\} \le C_{15}\left\{\left(\frac{r}{h}\right)^2 A_3+1\right\}R_{r,\rho}\left(A_1,\frac{h}{2}\right). \tag{45}$$

При этом использованы неравенства

$$R_{r,\rho}(A_1,h) \le C_{16}R_{r,\rho}\left(A_1,\frac{h}{2}\right), \quad R_r\left(A_1,\frac{h}{2}\right) \le R_{r,\rho}\left(A_1,\frac{h}{2}\right)$$

и оценка (25). Требуемое неравенство (36) следует из (44), если подчинить постоянные A_3, A_4 условию

$$C_{15}[A_4^{-2}A_3 + 1] \le A_3. \tag{46}$$

Окончательный выбор постоянных A_2, A_3, A_4 определяется двумя неравенствами (44), (46). Тем самым полностью доказана теорема 5.

Как уже отмечалось, предполагая $A_2 \ge C_7, A_3 \ge C_8$, обеспечиваем выполнение неравенств (32), (33) при $\bar r = \dfrac{H}{A_4}$, $h = H$. Последовательно применяя теорему 5 и используя оценку (45), получаем такое следствие.

Следствие 1. *В условиях теоремы 5 при любом* $r \in \left[2d, \dfrac{H}{A_4}\right]$ *справедлива оценка*

$$I_{r,\mu}(h,\eta) \le K_9\left[\left(\frac{r}{h}\right)^2 A_3+1\right]R_{r,\rho}(A_1,h) \tag{47}$$

для $\mu = m(\rho) - m(r)$, $r/4^{m+1} \le \rho \le r$, $A_4\bar r \le h$ *с постоянной* K_9, *зависящей лишь от* m, n, s, ν_1, ν_2.

5. *Последовательное улучшение поточечных оценок.* Определим числовые последовательности

$$r_j^1 = \frac{r}{4}(1+2^{-j}), \quad r_j^2 = \frac{r}{4}(3-2^{-j}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$h_j = \frac{h}{8} + (1-2^{-j+1})r$$

при $h \le H$, $8d \le r \le 1$. В дальнейшем $\psi_j(x')$ — функции класса $C_0^\infty(R^s)$, равные единице на $G_j' = \left\{x' : r_j^{(1)} \le |x'| \le r_j^{(2)}\right\}$, нулю вне G_{j+1}' и такие, что $0 \le \psi_j(x') \le 1$,

$\left|\frac{\partial \psi_j(x')}{\partial x'}\right| \le \frac{2^{j+4}}{r}$. Определим еще функции $\chi_{j,h}(x'',\eta) \in C_0^\infty(R^{n-s})$, равные единице при $|x''-\eta| \le h_j$, нулю при $|x''-\eta| \ge h_{j+1}$ и такие, что $0 \le \chi_{j,h}(x'',\eta) \le 1$, $\left|\frac{\partial}{\partial x''}\chi_{j,h}(x'',\eta)\right| \le \frac{2^{j+1}}{r}$.

Подставим в интегральное тождество (5) функцию

$$\varphi(x) = [u_r(x,k)]^{\rho+1}[\varphi_{j,h}(x,\eta)]^{\sigma+m},$$

где $\varphi_{j,h}(x,\eta) = \psi_j(x')\,\chi_{j,h}(x'',\eta)$, ρ, σ — произвольные положительные числа. Оценивая на основании неравенств (3), (4) и Юнга, получаем

$$\int_\Omega \left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 u_r^\rho(x,k)\varphi_{j,h}^{\sigma+m}(x,\eta)dx \le$$

$$\le C_{16}(\sigma+m)^m \int_\Omega \left\{u_r^{\rho+2}(x,k)\left(\frac{2^j}{r}\right)^2 \varphi_{j,h}^{\sigma+m-2}(x,\eta) + \right.$$

$$\left. + u_r^{\rho+m}(x,k)\left(\frac{2^j}{r}\right)^m \varphi_{j,h}^{\sigma}(x,\eta)\right\}dx. \tag{48}$$

Дальнейшие оценки проводятся по-разному в зависимости от того, какое из следующих ниже неравенств справедливо:

$$\mu_{j+1}(h,\eta) > r, \tag{49}$$

$$\mu_{j+1}(h,\eta) \le r, \tag{50}$$

где

$$\mu_{j+1}(h,\eta) = \operatorname{vrai\,max}\{u_r(x,k): x \in C_{j+1}(h,\eta)\},$$

$$G_{j+1}(h,\eta) = \{x = (x',x''): x' \in G'_{j+1}, |x''-\eta| \le h_{j+1}\}.$$

Если выполнено неравенство (49), продолжим оценку (48), используя (49) и определение $\mu_{j+1}(h,\eta)$. Получим

$$\int_\Omega \left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 u_r^\rho(x,k)\varphi_{j,h}^{\sigma+m}(x,\eta)dx \le$$

$$\le C_{17}(\sigma+m)^m \frac{2^{jm}}{r^m}\mu_{j+1}^{m-2}(h,\eta)\int_\Omega u_r^{\rho+2}(x,k)\varphi_{j,h}^{\sigma}(x,\eta)dx. \tag{51}$$

Далее применяем леммы 1.3 гл. 8 [1], подставляя вместо p, q значения m, $q(m-1)$. В результате получаем оценку

$$[\mu_j(h,\eta)]^{q(m-1)+\frac{n}{m}(m-2)} \le C_{18}\frac{2^{jn}}{r^n}[\mu_{j+1}(h,\eta)]^{(m-2)\frac{n}{m}}\int_\Omega u_r^{q(m-1)}(x,k)\varphi_{j,h}^{m}(x,\eta)dx. \tag{52}$$

Отметим, что непосредственное применение леммы 1.3 гл. 8 [1] приводит к показателю степени $\varphi_{j,h}(x,\eta)$ в (52), равному $q(m-1)$. Для того чтобы этот показатель равнялся m, достаточно произвести незначительные изменения в доказательстве леммы 1.3 гл. 8 [1].

Если же выполнено неравенство (50), продолжим оценку (48), используя (50) и определение $\mu_{j+1}(h, \eta)$. Будем иметь

$$\int_{\Omega}\left(1+\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)^{m-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{2} u_r^{\rho}(x,k)\varphi_{j,h}^{\sigma+m}(x,\eta)dx \le$$

$$\le C_{19}(\sigma+m)^m \frac{2^{jm}}{r^m}\int_{\Omega} u_r^{\rho+2}(x,k)\varphi_{j,h}^{\sigma}(x,\eta)dx. \qquad (53)$$

Далее применяем лемму 1.2 гл. 8 [1], подставив вместо p, q значения $2, q(m-$ $-1)-m+2$. Получаем оценку

$$[\mu_j(h,\eta)]^{q(m-1)-m+2} \le C_{20}\frac{2^{\frac{jmn}{2}}}{r^n}\int_{\Omega} u_r^{q(m-1)-m+2}(x,k)\varphi_{j,h}^{2}(x,\eta)dx. \qquad (54)$$

Относительно показателя степени $\varphi_{j,k}(x, \eta)$ в (54) справедливо замечание, сделанное выше по поводу оценки (52).

Таким образом, справедлива такая лемма.

Лемма 4. *Предположим, что при некоторых j, h, η для решения $u(x, k)$ задачи* (1), (2) *справедливо одно из неравенств* (49), (50). *Тогда соответственно выполняется одна из двух оценок* (52), (54).

Последовательное улучшение поточечных оценок обеспечивает следующая теорема.

Теорема 6. *Существует постоянная K_{10}, зависящая лишь от m, n, s, ν_1, ν_2, такая, что из справедливости при некотором $\lambda \in \left[\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}\right)$ неравенства* (25) *следует выполнение оценки*

$$u(x, k) \le K_{10}A_1^{1-\theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\beta}, \qquad (55)$$

где β, θ определяются соответственно равенствами (27), (30).

Доказательство. Покажем, что для обеспечения неравенства (55) достаточно установить оценку

$$\mu_1(h(r), \eta) \le CA_1^{1-\theta}k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta} \qquad (56)$$

при $r \in \left[2d, \frac{H}{A_4}\right]$, $h(r) = A_4 r$, $\eta \in R^{n-s}$, $|\eta| \le 1$ с постоянной A_4, определяемой теоремой 5, и постоянной C, зависящей лишь от m, n, s, ν_1, ν_2.

Если предполагать доказанной оценку (56), то из определения $\mu_1(h(r), \eta)$ при соответствующем выборе η следует

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le CA_1^{1-\theta}k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}.$$

И далее, применяя лемму 2.9 гл. 10 [1], из последнего неравенства и оценки

(26) получаем

$$u(x,k) \le C\frac{2^\beta}{2^\beta-1}A_1^{1-\theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^\beta + m\left(\frac{H}{A_4}\right) \le$$

$$\le C\frac{2^\beta}{2^\beta-1}A_1^{1-\theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^\beta + K_4^\theta A_1^{1-\theta}kA_4^{\alpha+\beta}m\left(\frac{d}{H}\right)^\beta$$

при $8d \le |x'| \le \frac{H}{A_4}$. Отсюда следует неравенство (55) для $|x'| \le \frac{H}{A_4}$. При $|x'| > \frac{H}{A_4}$ доказываемую оценку (55) получаем из (26).

Докажем неравенство (56). При этом достаточно зафиксировать значение η таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu_1(h(r),\eta) \ge m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r). \tag{57}$$

Возможны две ситуации при выбранных значениях r, η:

$$\mu_2(h(r),\eta) > r, \tag{58}$$

$$\mu_2(h(r),\eta) \le r. \tag{59}$$

Пусть вначале выполнено условие (58) и $j \ge 1$. Тогда $\mu_{j+1}(h(r),\eta) > r$ и $k > d$. В соответствии с леммой 4, используя неравенство (52), получаем

$$[\mu_j(h(r),\eta)]^{q(m-1)+\frac{n}{m}(m-2)} \le$$

$$\le C_{18}\frac{2^{jn}}{r^n}[\mu_{j+1}(h(r),\eta)]^{(m-2)\frac{n}{m}}\int\limits_\Omega u_r^{q(m-1)}(x,k)\varphi_{j,h(r)}^m(x,\eta)\,dx.. \tag{60}$$

Оценим интеграл в правой части (60). Применяя неравенства Пуанкаре и (47), имеем

$$\int\limits_\Omega u_r^{q(m-1)}(x,k)\varphi_{j,h(r)}^m(x,\eta)dx \le \int\limits_{G_{j+1}} u_r^{q(m-1)}(x,k)\chi_{j,h}^m(x'',\eta)dx \le$$

$$\le C_{21}r^m\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial x'}[u_r(x,k)]_{\mu_{j+1}}^{\frac{q(m-1)}{m}}\right|^m\chi_{j,h(r)}^m(x'',\eta)dx \le$$

$$\le C_{22}r^m\int\limits_{E_{r,\mu_{j+1}}} u_r^{q(m-1)-m}(x,k)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^m\chi_{j,h(r)}^m(x,\eta)dx \le C_{23}r^m R_{r,r_{j+1}^{(1)}}(A_1,h(r)). \tag{61}$$

Здесь $\mu_{j+1} = \mu_{j+1}(h(r),\eta)$, $C_{23} = C_{22}K_9[A_4^{-2}A_3 + 1]$.

Отметим, что в силу (57)

$$m\left(\frac{r}{2}\right) - m(r) \le \mu_{j+1}(h(r),\eta) \le m\left(r_{j+1}^{(1)}\right) - m(r)$$

и тем самым обеспечены условия для μ_{j+1}, достаточные для применения оценки (47).

Из (60), (61) получаем

$$[\mu_j(h(r),\eta)]^{q(m-1)+\frac{n}{m}(m-2)} \le$$

$$\le C_{24} 2^{jn}[\mu_{j+1}(h(r),\eta)]^{(m-2)\frac{n}{m}}\left\{\left[A_1 k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k^{m-1}\left(\frac{d}{r}\right)^{s-m} +\right.$$

$$\left.+\left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)} + \left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2} [\mu_{j+1}(h(r),\eta)]^{(m-2)}\right\}. \quad (62)$$

Оценим первое слагаемое в фигурных скобках, замечая, что

$$\left[A_1 k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k^{m-1}\left(\frac{d}{r}\right)^{s-m} =$$

$$= \left\{A_1^{\frac{q-1}{q}} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)\frac{q-1}{q}+\frac{s-m}{m-1}\frac{1}{q}}\right\}^{q(m-1)} \le C_{25}\left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)}, \quad (63)$$

так как в силу (30) и выбора λ справедливы неравенства

$$\frac{1}{q} > \theta,\ \lambda(s-m)\frac{q-1}{q} + \frac{s-m}{m-1}\frac{1}{q} - \beta = (s-m)\left(\frac{1}{q}-\theta\right)\left(\frac{1}{m-1}-\lambda\right) > 0.$$

Из неравенств (60), (63) получаем для

$$z_j = \mu_j(h(r),\eta)\left\{A_1^{1-\theta} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right\}^{-1} \quad (64)$$

оценку

$$z_j^{q(m-1)+\frac{n}{m}(m-2)} \le C_{26} 2^{jn}\left\{z_{j+1}^{(m-2)\frac{n}{m}} + z_{j+1}^{(m-2)\left(\frac{n}{m}+1\right)}\right\}. \quad (65)$$

Далее достаточно предполагать, что $z_{j+1} \ge 1$, ибо в противном случае доказываемое неравенство (56) справедливо при $C = 1$. Если же $z_{j+1} \ge 1$, то из (65) имеем

$$z_j \le C_{27} 2^{a_j} z_{j+1}^{b}, \quad (66)$$

где $a = \dfrac{nm}{q(m-1)m + n(m-2)}$, $b = \dfrac{(m-2)(n+m)}{q(m-1)+n(m-2)} \le 1$.

Неравенство (66) доказано сейчас при выполнении условия (58) для $j \ge 1$. Последовательным применением этого неравенства получаем оценку

$$\mu_1(h(r),\eta) \le C_{28} A_1^{1-\theta} k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}, \quad (67)$$

что и доказывает неравенство (56) в случае (58).

При получении дальнейших оценок будем предполагать выполнение неравенства (59). В этом случае достаточно ограничиться доказательством при дополнительном предположении

$$r > kA_1^{1-\theta}\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}, \tag{68}$$

так как в противном случае доказываемая оценка (56) непосредственно следует из неравенства

$$\mu_1(h(r), \eta) \le \mu_2(h(r), \eta) \le r.$$

Получим оценку $\mu_1(h(r), \eta)$, предположив, что выполнено условие (59). Начнем с дополнительного предположения $k > d$. Применяя лемму 4, находим

$$[\mu_1(h(r),\eta)]^{q(m-1)-m+2} \le C_{29}\frac{1}{r^n}\int\limits_{\Omega} u_r^{q(m-1)-m+2}(x,k)\varphi_{1,h(r)}^m(x,\eta)dx.$$

Оценим последний интеграл, использовав неравенства Пуанкаре и (47). В результате получим

$$[\mu_1(h(r),\eta)]^{q(m-1)-m+2} \le C_{30}r^{2-m}\left\{\left[A_1k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k^{m-1}\left(\frac{d}{r}\right)^{s-m} + \right.$$

$$\left. +\left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)} + \left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2} r^{m-2}\right\}. \tag{69}$$

И, применяя далее неравенства (63) (68), получаем оценку

$$[\mu_1(h(r),\eta)]^{q(m-1)-m+2} \le C_{31}\left[(A_1^{1-\theta})k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2}$$

что и доказывает неравенство (56) в случае (59), если $k > d$.

Осталось еще получить неравенство (56), если $k \le d$ и выполнено условие (59). В соответствии с леммой 4 используем оценку (54). Оценивая интеграл в правой части (54) по неравенству Пуанкаре, а затем применяя оценку (47), находим

$$[\mu_1(h(r),\eta)]^{q(m-1)-m+2} \le C_{32}\left\{\left[A_1k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k\left(\frac{d}{r}\right)^{s-2} + \right.$$

$$\left. +\left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)} r^{2-m} + \left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2}\right\}. \tag{70}$$

Оценм первое слагаемое в фигуной скобке в (70):

$$\left[A_1k\left(\frac{d}{r}\right)^{\lambda(s-m)}\right]^{(q-1)(m-1)} k\left(\frac{d}{r}\right)^{s-2} \le C_{33}\left[M(A_1)k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{(q-1)(m-1)+1}, \tag{71}$$

что обеспечивается выбором значений λ, q, θ. Используя (68), из (70), (71) получаем

$$[\mu_1(h(r),\eta)]^{q(m-1)-m+2} \le C_{34}\left[(A_1^{1-\theta})k\left(\frac{d}{r}\right)^{\beta}\right]^{q(m-1)-m+2},$$

откуда следует неравенство (56).

Тем самым как в случае (58), так и в случае (59), доказана оценка (56), а следовательно, и полностью доказана теорема 6.

6. *Доказательство основной оценки.* Доказанная в предыдущем пункте теорема 6 о последовательном улучшении поточечных оценок позволяет просто получить основной результат данной работы.

Теорема 7. *Предположим, что выполнены условия а), б). Тогда существует постоянная* K, *зависящая лишь от* m, n, s, ν_1, ν_2, *такая, что для решения* $u(x, k)$ *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$|u(x, k)| \leq K|k|\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{s-m}{m-1}}. \tag{72}$$

Доказательство. Как отмечалось выше, достаточно рассматривать только случай положительного k. Покажем, что число K можно выбрать в виде

$$K = \max\{1, K_4, K_5, K_{10}^{\frac{1}{\theta}}\}, \tag{73}$$

где K_4, K_5, K_{10} — постоянные, определенные соответственно в теоремах 2, 3, 6, и θ — число, определенное равенством (30).

Определим последовательность λ_i, $i = 1, 2, \ldots$:

$$\lambda_i = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m(m-1)}(1-\theta)^{i-1} \tag{74}$$

и покажем, что при $i = 1, 2, \ldots$ справедливы оценки

$$u(x, k) \leq Kk\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{(s-m)\lambda_i}, \tag{75}$$

где постоянная K определена равенством (73).

При $i = 1$ оценка (75) следует из (73) и теоремы 3, так как $\lambda_1 = \dfrac{1}{m}$. Дальше оценка (75) доказывается индукцией по i. Если предположить ее справедливость при $i = i_0$, $i_0 \geq 1$, то, применяя теорему 6, получаем оценку

$$u(x, k) \leq K_{10}K^{1-\theta}k\left(\frac{d}{|x'|}\right)^{\frac{s-m}{m-1}\theta+\lambda_{i_0}(s-m)(1-\theta)} \tag{76}$$

По выбору K имеем $K_{10}K^{1-\theta} \leq K$. Из (74) получаем

$$\frac{s-m}{m-1}\theta + \lambda_{i_0}(s-m)(1-\theta) = (s-m)\lambda_{i_0+1}.$$

Тем самым из неравенства (76) следует оценка (75) при $i = i_0 + 1$.

Замечая, что $\lambda_i \to \dfrac{1}{m-1}$ при $i \to \infty$, предельным переходом по i из (75) получаем (72), что и завершает доказательство теоремы 7.

1. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.– М.: Наука, 1990.– 448с.
2. *Скрыпник И. В.* О поточечных оценках некоторых емкостных потенциалов // Общая теория граничных задач.– Киев: Наук. думка, 1983.– С.198–206.
3. *Скрыпник И. В.*Поточечная оценка решения модельной нелинейной параболической задачи // Нелинейные граничные задачи.–1991.–Вып.3.–С. 72–86.

Получено 01.04.92