УДК 517.946

И.И. Скрыпник, канд. физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Изучаются локальные свойства решений параболических уравнений в областях, граница которых определяется разностью двух выпуклых функций. Установлены условия существования граничных некасательных и L_2-пределов.

Вивчаються локальні властивості розв'язків параболічних рівнянь в областях, границя яких визначається різницею двох опуклих функцій. Встановлено умови існування граничних недотичних та L_2-границь.

Пусть $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ – непрерывные выпуклые функции, $x \in R^n$, $t \in R^1_+$. Рассмотрим область вида

$$Q = \left\{(x, y, t): x \in R^n, t \in R^1_+, y > \varphi(x, t)\right\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t)$.

Все результаты, полученные в данной работе, справедливы для областей вида (1). При этом для простоты изложения рассмотрим полупространство

$$R^{n+1}_+ \times R^1_+ = \left\{(z, t) = (x, y, t) \in R^n \times R^1_+ \times R^1_+\right\}.$$

Для произвольного $a > 0$ определим множество

$$\Gamma_a(x, t) = \left\{(s, y, \tau): |s - x| < ay, |\tau - t| < (ay)^2\right\}, \tag{2}$$

которое является аналогом обычного кругового конуса для эллиптического случая.

Пусть W — произвольное множество из $R^{n+1}_+ \times R^1_+$, $u(z, t)$ – функция, определенная на W. Определим функцию

$$N_{W,a}(x, t) = \sup\left\{|u(z, \tau)|: (z, \tau) \in \Gamma_a(x, t) \cap W\right\} \tag{3}$$

($N_{W,a}(x, t) = 0$ при $\Gamma_a(x, t) \cap W \neq \varnothing$) — аналог нетангенциальной максимальной функции.

Если $u(z, t)$ имеет производные по z и t, определим также функцию

$$D_{W,a}(x, t) = \sup\left\{y\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| + y^2\left|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|, (z, \tau) \in \Gamma_a(x, t) \cap W\right\}. \tag{4}$$

(Положим ее равной нулю, если $\Gamma_a(x, t) \cap W = \varnothing$.)

В случае ограниченного $y_{s,\tau} = \sup\{y, (s, y, \tau) \in W\}$ определим функцию

$$N^0_{W,a}(x, t) = \sup\left\{\left|u(s, y, \tau) - u(s, y_{s,\tau}, \tau)\right|, (s, y, \tau) \in \Gamma_a(x, t) \cap W\right\}, \tag{5}$$

$$A_{W,a}(x, t) = \left\{\int_{W \cap \Gamma_a(x,t)} y^{-1-n}\left|\frac{\partial u(z, \tau)}{\partial z}\right|^2 dz d\tau\right\}^{1/2} \tag{6}$$

— аналог интеграла Лузина.

Рассмотрим в $R^{n+1}_+ \times R^1_+$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(z, t)\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i=1}^{n+1} a_i(z, t)\frac{\partial u}{\partial z_i} + a_0(z, t)u = f(z, t), \tag{7}$$

коэффициенты которого $a_{ij}(z, t)$, $a_i(z, t)$, $a_0(z, t)$ непрерывны и ограничены вместе с производными первого порядка по z и гельдеровы по t с показателем $\mu/2$ в $R_+^{n+1}\times R_+^1$, $0<\mu<1$; $f(z, t)\in H^{\mu,\mu/2}(R_+^{n+1}\times R_+^1)$, $i, j = 1,\dots, n+1$, и выполнены неравенства

$$\nu_0^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \le \nu_0|\xi|^2 \tag{8}$$

для любых $(z, t)\in R_+^{n+1}\times R_+^1$, $\xi\in R^{n+1}$, $0<\nu_0=\mathrm{const}<\infty$. Под решением понимаем классическое решение из области $C_z^2\cap C_t^1$.

Пусть

$$f_1(z,z';t,t') = \left(y|f(z,t)| + |y-y'|^{1+\mu}\frac{|f(z,t)-f(z',t)|}{|z-z'|^{\mu}} + y^{1+\mu/2}\frac{|f(z,t)-f(z,t')|}{|t-t'|^{\mu/2}}\right).$$

Определим также функцию

$$F_{W,a}(x,t) = \sup\left\{f_1(z,z',\tau,\tau'), (z,\tau),(z',\tau),(z,\tau')\in\Gamma_a(x,t)\cap W\right\}.$$

Определение. *Будем говорить, что функция $u(x, y, t)$ нетангенциально ограничена в точке $(x_0, t_0)\in R^n\times R_+^1$, если для некоторых $a, h>0$ выполнено*

$$\sup|u(x,y,t)|<\infty, (x,y,t)\in\Gamma_{a,h}(x_0,t_0),$$

где $\Gamma_{a,h}(x_0, t_0) = \Gamma_a(x_0, t_0)\cap\{0<y<h\}$.

Определим $A_{h,a}(x, t)$ аналогично $A_{W,a}(x, t)$ с заменой W на $\Gamma_{a,h}(x, t)$.

Теорема 1. *Пусть $u(z, t)$ – решение уравнения (7) в $R_+^{n+1}\times R_+^1$, $u(z, t)$, $f_1(z, z'; t, t')$ нетангенциально ограничены в каждой точке измеримого множества $E\subset R_x^n\times R_{t,+}^1$, $\operatorname{mes} E>0$. Тогда для всех $a, h>0$ функция $A_{h,a}(x, t)$ конечна почти всюду на E и решение $u(z, t)$ почти в каждой точке $(x_0, t_0)\in E$ имеет конечный предел*

$$\lim u(z,t) = l<\infty, (z,t)\to(x_0,0,t_0), (z,t)\in\Gamma_a(x_0,t_0). \tag{9}$$

Пусть далее

$$\Gamma_{a,h,H}(x,t) = \Gamma_a(x,t)\cap\{h<y<H\}.$$

Функции $F_{h,a}(x, t)$ и $N_{h,H,a}(x, t)$ определяются так же, как $F_{W,a}(x, t)$ и $N_{W,a}(x, t)$, с заменой W на $\Gamma_{a,h}(x, t)$ и $\Gamma_{a,h,H}(x, t)$ соответственно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для некоторых $H>0$, $a>a_0$, $h\in(0, h_0)$, где a_0, h_0 зависят лишь от известных величин, выполнено неравенство*

$$\int\limits_{0<y<H} y\left|\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right|^2 dzdt + \int\limits_{R_x^n\times R_{t,+}^1} F_{H,a}^2(x,t)dxdt + \int\limits_{R_x^n\times R_{t,+}^1} N_{h,H,a}^2(x,t)dxdt < \infty. \tag{10}$$

Тогда почти всюду на $R_x^n\times R_{t,+}^1$ существует конечный предел (9), являющийся функцией $u_0(x, t)\in L_2(R_x^n\times R_{t,+}^1)$. Причем если $\{\varepsilon_k\}$ – последовательность чисел $k = 1, 2,\dots$, $\varepsilon_k\to 0$ при $k\to\infty$, то

$$\sup_x \left\| u(x,\varepsilon_k,t) \right\|_{L_2\left(R_x^n \times R_{t,+}^1\right)} < \infty, \tag{11}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u(x,\varepsilon_k,t) - u_0(x,t) \right\|_{L_2\left(R_x^n \times R_{t,+}^1\right)} = 0. \tag{12}$$

Доказательства теорем 1, 2 основаны на развитии для параболического случая методов работы [1]. При рассмотрении негладкой границы используются обобщения [4] этих методов. Основой доказательства являются следующие две теоремы.

Теорема 3. *Пусть G – ограниченное открытое множество в $R_x^n \times R_{t,+}^1$,*

$$P = \operatorname{int}\left\{ R_+^{n+1} \times R_+^1 \setminus \bigcup_{(x,t)\notin G^a} \Gamma_a(x,t) \right\},$$

$u(z, t)$ — решение уравнения (7) в $R_+^{n+1} \times R_+^1$, α, $\beta \in (1, \infty)$, ω, $\rho > 0$. Тогда существует такое $a_0 > 0$, что для всех a, больших a_0, найдутся γ, δ, r_0, при которых выполняется неравенство

$$\alpha \operatorname{mes}\left\{ N_{P,a}^0 > \beta\lambda \right\} \le \operatorname{mes}\left\{ N_{P,a}^0 > \lambda \right\} + \alpha\Big[c(n) \operatorname{mes}\left\{ A_{P,a} > \gamma\lambda \right\} +$$

$$+ \operatorname{mes}\left\{ D_{P,a} > \delta\lambda \right\} + \operatorname{mes}\left\{ F_{P,a} > \rho\lambda \right\} + \operatorname{mes}\left\{ N_{P,a} > \omega\lambda \right\} \Big] \tag{13}$$

для всех $\lambda > 0$, лишь только $d(G) \le r_0$. Здесь

$$d(G) = \sup\left\{ \max\left[\left| z - z' \right|, \left| t - t' \right|^{1/2} \right], (z,t), (z',t') \in G \right\}.$$

Теорема 4. *Пусть $u(z, t)$ — решение уравнения (7) в $R_+^{n+1} \times R_+^1$, α, $\beta \in (1, \infty)$, ρ, $a > 0$. Тогда найдутся такие γ, δ, что для любого $\lambda > 0$ верно неравенство*

$$\alpha \operatorname{mes}\left\{ A_{P,a} > \beta\lambda \right\} \le \operatorname{mes}\left\{ A_{P,a} > \lambda \right\} +$$

$$+ \alpha\Big[\operatorname{mes}\left\{ N_{P,a} > \gamma\lambda \right\} + \operatorname{mes}\left\{ D_{P,a} > \delta\lambda \right\} + \operatorname{mes}\left\{ F_{P,a} > \rho\lambda \right\} \Big]. \tag{14}$$

Остановимся на некоторых моментах доказательства теоремы 3. Пусть $\pi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}(x,t) = \chi_{\{A_{P_\varepsilon,a} > \gamma\lambda\}}(x,t)$, где $\chi_E(x, t)$ — характеристическая функция множества E,

$$\pi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon}(x,t) = \sup\left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q \pi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}(s,\tau)\, ds\, d\tau,\ (x,t) \in Q \right\},$$

где Q – цилиндр,

$$E = \left\{ N_{P_\varepsilon,a}^0 > \beta\lambda,\ \pi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} \le \frac{1}{2},\ D_{P_\varepsilon,a} \le \delta\lambda,\ F_{P_\varepsilon,a} \le \rho\lambda,\ N_{P_\varepsilon,a} \le \omega\lambda \right\},$$

$$G_0 = \left\{ N_{P_\varepsilon,a}^0 > \lambda \right\}.$$

Здесь $P_\varepsilon = P \cap \{y > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Покажем, что при достаточно малых δ, γ выполняется неравенство

$$\alpha \operatorname{mes} E \le \operatorname{mes} G_0. \tag{15}$$

Тогда (13) будет следовать из (15) и того, что аналогично [3, с.15]

$$\operatorname{mes}\left\{\pi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} \geq \frac{1}{2}\right\} \leq c(n)\left\|\pi_{\gamma,\lambda,\varepsilon}\right\|_{L_1\left(R^n_x \times R^1_{t,+}\right)} = c(n)\operatorname{mes}\left\{A_{P_\varepsilon,a} > \gamma\lambda\right\}.$$

Множество G_0 открыто и содержится в G. Пусть неравенство (15) не выполняется, т.е. $\operatorname{mes} G_0 < \alpha \operatorname{mes} E$. Тогда аналогично [1, 3] найдется цилиндр $Q \subset \subset G_0$, для которого $\operatorname{mes} Q \leq c_1 \alpha \operatorname{mes}\{E \cap Q\}$ и существует $(x_0, t_0) \in \partial Q$ такое, что $N^0_{P_\varepsilon,a}(x_0,t_0) \leq \lambda$. Не теряя общности считаем $Q = Q_r(0, \tau_0)$, $\tau_0 > 0$.

Выберем $\xi = \xi(n, \alpha) \in (0, 1/2)$ так, чтобы для цилиндра $Q_0 = Q_{(1-2\xi)r}(0, \tau_0)$ выполнялось $\operatorname{mes} Q_0 = \left[1 - 1/2\alpha c_1\right]\operatorname{mes} Q$. Тогда $\operatorname{mes} Q < 2\alpha\, c_1 \operatorname{mes}\{E \cap Q_0\}$. Положим $E_0 = E \cap Q_0$. Рассмотрим множества

$$V^r = \left\{(s,y,\tau) \in R^n \times R^1_+ \times R^1_+ : |s| < r - ay, \left|\tau - \tau_0\right| < r^2 - (ay)^2\right\},$$

$$V^r_\varepsilon = V^r \bigcap \{y > \varepsilon\}$$

и область

$$W_0 = \bigcup_{(x,t)\in E_0}\left(\Gamma_a(x,t) \bigcap V^r_\varepsilon\right).$$

Обозначим $\partial W^+_0 = \partial W_0 \bigcap \partial V^r_\varepsilon$, $\partial W^-_0 = \partial W_0 \setminus \partial W^+_0$. Дальнейшее доказательство вытекает из следующих утверждений.

Утверждение 1. *Пусть* $\theta = (\beta - 1)/2$, $z_0 = (0, a^{-1}r)$, $v(z, t) = u(z, t) - u(z_0, \tau_0)$. *Тогда*

$$\left|v(z,t)\right| \leq \frac{a}{\xi}\left(1 + \frac{a}{\xi}\right)\delta\lambda,\ (z,t) \in \partial W^+_0. \tag{16}$$

Если выполнено условие

$$\delta < \frac{\theta\xi^2}{2}\frac{1}{a(\xi + a) + 2\xi}, \tag{17}$$

то

$$\left|\ v(z,t)\right| < \frac{\theta\lambda}{2},\ (z,t) \in \partial W^+_0, \tag{18}$$

$$\sup\left\{\left|\ v(z,\tau)\right|, (z,\tau) \in \Gamma_a(x,t) \bigcap W\right\} > \theta\lambda,\ (x,t) \in E_0. \tag{19}$$

Введем при $x \in R^n$, $t \in R^1_+$, $l > 0$ обозначения

$$\Gamma(x,t;l) = \left\{(s,y,\tau) : \left|s - x\right| < a(y - l), \left|\tau - t\right| < a^2\left(y^2 - l^2\right)\right\},$$

$$M(x,t;l) = \sup\left\{\left|v(s,y,\tau)\right|, (s,y,\tau) \in \Gamma(x,t;l) \bigcap W_0\right\},$$

$$W = \left\{(x,l,t) \in W_0 : M(x,t;l) < \theta\lambda\right\},$$

$$l_1^{(x,t)} = \inf\left\{l : (x,l,t) \in W\right\}.$$

Кроме того, $\partial W^+ = \Gamma(x, t; l) \cap \partial V^r_\varepsilon$, $\partial W^- = \partial W \setminus \partial W^+$. Ввиду непрерывности $u(z, t)$ вблизи ∂W^+_0 из (18) следует, что W не пусто и $\partial W^+ = \partial W^+_0$. Покажем, что на ∂W^- выполнено условие

$$\left| l_1^{(s,\tau)} - l_1^{(x,t)} \right| \le \max\left\{ \frac{|s-x|}{a}, \frac{|t-\tau|}{a^2\left[l_1^{(s,\tau)} + l_1^{(x,t)}\right]} \right\}. \tag{20}$$

Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство, и, следовательно, можно считать справедливыми неравенства

$$l_1^{(s,\tau)} - l_1^{(x,t)} \ge \frac{1}{a}|s-x|,$$

$$l_1^{(s,\tau)} - l_1^{(x,t)} \ge \frac{|\tau - t|}{a^2\left[l_1^{(s,\tau)} + l_1^{(x,t)}\right]}.$$

Тогда $(s,\ l_1^{(s,\tau)},\ \tau) \in \Gamma(x;\ t;\ l_1^{(x,t)})$. Найдется такое $l > l_1^{(x,t)}$ и столь близкое к $l_1^{(x,t)}$, что $M(x,\ t;\ l) < \theta\lambda$ и $(s,\ l_1^{(s,\tau)},\ \tau) \in \Gamma(x;\ t;\ l)$. Теперь можно выбрать $l' < l_1^{(s,\tau)}$ так, чтобы $(s,\ l',\ \tau) \in \Gamma(x;\ t;\ l)$. При этом $\Gamma(s;\ \tau;\ l') \subset \Gamma(x;\ t;\ l)$. В самом деле, если $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \in \Gamma(s;\ \tau;\ l')$, то $|\tilde{x} - s| < a(\tilde{y} - l'), |\tau - \tilde{t}| < a^2(\tilde{y}^2 - l'^2)$. Поскольку из $(s,\ l',\ \tau) \in \Gamma(x;\ t;\ l)$, имеем $|s - x| < a(l' - l)$, $|\tau - t| < a^2(l'^2 - l^2)$. Поэтому $|x - \tilde{x}| < a(\tilde{y} - l), |t - \tilde{t}| < a^2(\tilde{y}^2 - l^2)$, что и доказывает включение $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \in \Gamma(x;\ t;\ l)$. Из включения $\Gamma(s;\ \tau;\ l') \subset \Gamma(x;\ t;\ l)$ имеем $M(s;\ \tau;\ l') \subset M(x;\ t;\ l) < \theta\lambda$. Отсюда следует принадлежность точки $(s,\ l',\ \tau)$ множеству W, а это противоречит определению $l_1^{(s,\tau)}$.

Введем множество

$$S = \left\{ \left(x, l_1^{(x,t)}, t\right) : \left| v\left(x, l_1^{(x,t)}, t\right) \right| > \frac{\theta\lambda}{2} \right\} \subset \partial W^-.$$

Обозначим через $\mathfrak{P}(S)$ проекцию множества S на $R_x^n \times R_{t,+}^1$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *При условии* (17) *существует такая константа* $c = c(n,\ \alpha) > 0$, *что*

$$\operatorname{mes}\mathfrak{p}\,(S) \ge c \operatorname{mes} Q. \tag{21}$$

Утверждение 3. *Существует* $a_0 = a_0(n,\ \alpha,\ \beta,\ \nu_0)$ *такое, что для любого* $a > a_0$ *найдутся такие* $\delta(\alpha,\ \beta,\ a)$, $r_0(\alpha,\ \beta,\ a,\ \omega,\ \rho)$, *что при* $r < r_0$ *выполнено неравенство*

$$\int_W y \left| \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right|^2 dz dt \ge c \operatorname{mes} Q \lambda^2, \tag{22}$$

где $c = c(n,\ \alpha,\ \beta) > 0$.

Доказательство. Достаточно оценить интеграл

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \int_W y a_{ij}(z,t) \frac{\partial v}{\partial z_i} \frac{\partial v}{\partial z_j} dz dt.$$

Будем интегрировать по частям, используя уравнение (7).

Если ν — внешняя нормаль к ∂W, то

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \int_W y a_{ij}(z,t) \frac{\partial v}{\partial z_i} \frac{\partial v}{\partial z_j} dz dt = 2 \sum_{i,j=1}^{n+1} \int_{\partial W} y a_{ij} \frac{\partial v}{\partial z_i} v \cos(\nu, z_j) d\sigma -$$

$$- \int_{\partial W^-} a_{n+1,n+1} v^2 \cos(\nu, y) d\sigma - \int_{\partial W^+} a_{n+1,n+1} v^2 \cos(\nu, y) d\sigma -$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \int_{\partial W} a_{in+1} v^2 \cos(\nu, x_i) d\sigma + \sum_{i=1}^{n+1} \int_W y \frac{\partial a_{in+1}}{\partial z_i} v^2 dz dt -$$

$$-2 \sum_{i,j=1}^{n+1} \int_W y \frac{\partial a_{ij}}{\partial z_j} \frac{\partial v}{\partial z_i} v\, dz dt - 2 \int_W y v \frac{\partial v}{\partial t} dz\, dt -$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1} \int_W \dot{y} a_i \frac{\partial v}{\partial z_i} v dz dt - 2 \int_W y a_0 v u dz dt + 2 \int_W y f v dz dt = \sum_{k=1}^{10} I_k. \tag{23}$$

Оценим каждый из интегралов I_k, $k = 1, \dots, 10$, использовав определения W, W_0, E_0 и утверждения 1, 2. Получим

$$\left| I_1 \right| \le c\theta\delta\lambda^2 \sum_{j=1}^{n+1} \int_{\partial W} \left| \cos(\nu, z_j) \right| d\sigma \le \frac{c\theta\delta\lambda^2}{a} \int_{\mathrm{p}(\partial W)} dx\, dt \le c \frac{\theta\delta}{a} \lambda^2 \operatorname{mes} Q,$$

$$I_2 \ge - \int_S a_{n+1,n+1}(z,t) v^2(z,t) \cos(\nu, y) d\sigma =$$

$$= \int_{\mathrm{p}(S)} a_{n+1,n+1}(x, l_1^{(x,t)}, t) v^2(x, l_1^{(x,t)}, t) dx\, dt \ge$$

$$\ge \nu_0^{-1} \left(\frac{\theta\lambda}{2} \right)^2 \operatorname{mes} \mathrm{p}(S) \ge c \frac{\theta^2}{4} \lambda^2 \operatorname{mes} Q,$$

$$\left| I_3 \right| \le c \frac{a^2}{\xi^2} \left(1 + \frac{a}{\xi} \right)^2 \delta^2 \lambda^2 \int_{\partial W^+} \left| \cos(\nu, y) \right| d\sigma \le c \frac{a}{\xi^2} \left(1 + \frac{a}{\xi} \right)^2 \delta^2 \lambda^2 \operatorname{mes} Q,$$

$$\left| I_4 \right| \le c \frac{\theta^2 \lambda^2}{a^2} \sqrt{1 - a^2} \operatorname{mes} Q,$$

$$\left| I_5 \right| + \left| I_6 \right| + \left| I_8 \right| \le c \frac{r}{a} \theta\delta\lambda^2 \operatorname{mes} Q,$$

$$\left| I_9 \right| \le c \frac{r^2}{a^2} \omega\theta\lambda^2 \operatorname{mes} Q,$$

$$\left| I_{10} \right| \le c \frac{r}{a} \rho\omega\lambda^2 \operatorname{mes} Q.$$

Осталось оценить I_7. Приблизим W семейством областей W_ε с гладкой границей. Определим

$$l_2^{(x,t)} = \sup\{ l : (x, l, t) \in W \} \in \partial V^r.$$

Имеем

$$l_2^{(x,t)} = \frac{1}{a} \min\left\{ r - |x|, \sqrt{r^2 - |t - \tau_0|} \right\}.$$

Легко проверить, что

$$\left| l_2^{(x,t)} - l_2^{(s,\tau)} \right| \le \max\left\{ \frac{|s-x|}{a}, \frac{|\tau - t|}{a^2\left[l_2^{(x,t)} + l_2^{(s,\tau)}\right]} \right\}. \tag{24}$$

Доопределим $l_1^{(s,\tau)}$ на Q. На $\partial\mathfrak{P}(W)$ имеем $\lim\limits_{\substack{(s,\tau)\to(x,t)\\(s,\tau)\in\mathrm{p}(W)}} l_1^{(s,\tau)} = l_2^{(x,t)}$. Поэтому определим $\tilde{l}^{(s,\tau)}$ на Q следующим образом:

$$\tilde{l}^{(s,\tau)} = \begin{cases} l_1^{(s,\tau)}, (s,\tau) \in \mathrm{p}(W); \\ l_2^{(s,\tau)}, (s,\tau) \in Q \setminus \mathrm{p}(W). \end{cases}$$

Она является непрерывной на Q. Так как $\mathfrak{P}(W)$ — строго внутреннее множество Q, то на нем и в его малой окрестности с некоторой константой c^* выполнено неравенство

$$\tilde{l}^{(s,\tau)} \ge c^* > 0, \tag{25}$$

причем $\tilde{l}^{(s,\tau)}$ является липшицевой на Q. Пусть $\varepsilon > 0$ — малое число. Определим в $Q_\varepsilon = \{(x, t): |x| < r - \varepsilon, |t - \tau_0| < r^2 - \varepsilon^2\}$ функции

$$l_{1,\varepsilon}^{(x,t)} = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^1} \varphi_1\left(\frac{|x-s|}{\varepsilon}\right)\varphi_2\left(\frac{|t-\tau|}{\varepsilon}\right) l_1^{(s,\tau)}\, ds d\tau,$$

$$l_{2,\varepsilon}^{(x,t)} = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^1} \varphi_1\left(\frac{|x-s|}{\varepsilon}\right)\varphi_2\left(\frac{|t-\tau|}{\varepsilon}\right) l_2^{(s,\tau)} ds d\tau,$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty$, с носителями на $[-1, 1]$ такие, что

$$\int\limits_{R^n} \varphi_1(|s|) ds = 1, \int\limits_{R^1} \varphi_2(|\tau|) d\tau = = 1.$$

Теперь

$$W_\varepsilon = \left\{(x,y,t) \in Q_\varepsilon, l_{1,\varepsilon}^{(x,t)} < y < l_{2,\varepsilon}^{(x,t)}\right\}.$$

В силу (20) имеем

$$\left| l_{i,\varepsilon}^{(x',t)} - l_{i,\varepsilon}^{(x'',t)} \right| \le \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^1} \varphi_1\left(\frac{|\zeta|}{\varepsilon}\right)\varphi_2\left(\frac{|\zeta_0|}{\varepsilon}\right) \times$$

$$\times \left| l_i^{(x'+\zeta, t+\zeta_0)} - l_i^{(x''+\zeta, t+\zeta_0)} \right| d\zeta d\zeta_0 \le \frac{|x' - x''|}{a}, i = 1,2.$$

Поэтому

$$\left| \frac{\partial l_{i,\varepsilon}^{(x,t)}}{\partial x} \right| \le \frac{1}{a}, i = 1,2, \tag{26}$$

$$\left| l_{i,\varepsilon}^{(x,t')} - l_{i,\varepsilon}^{(x,t'')} \right| \le \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^1} \varphi_1\left(\frac{|\zeta|}{\varepsilon}\right)\varphi_2\left(\frac{|\zeta_0|}{\varepsilon}\right) \left| l_i^{(x+\zeta, t'+\zeta_0)} - l_i^{(x+\zeta, t''+\zeta_0)} \right| d\zeta\, d\zeta_0 \le$$

$$\le \frac{|t' - t''|}{a^2} \max_{|\zeta|<\varepsilon, |\zeta_0|<\varepsilon} \left[l_i^{(x+\zeta, t'+\zeta_0)} + l_i^{(x+\zeta, t''+\zeta_0)} \right]^{-1}, i = 1,2$$

Так как выполнено (24), то при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} l_i^{(x,t)} < l_i^{(x+\zeta, t+\zeta_0)} < 2 l_i^{(x,t)}, \left|\zeta\right| < \varepsilon, \left|\zeta_0\right| < \varepsilon, \ i = 1,2.$$

Тогда

$$\left| \frac{\partial l_{i,\varepsilon}^{(x,t)}}{\partial t} \right| \le \frac{1}{a^2 l_{i,\varepsilon}^{(x,t)}}, \ i = 1,2. \tag{27}$$

Имеем

$$\left|I_{7,\varepsilon}\right| = 2\left| \int\limits_{W_\varepsilon} y \frac{\partial v}{\partial t} v \cos(\nu, t) d\sigma \right| = 2\left| \int\limits_{\partial W_\varepsilon^-} y v^2 \cos(\nu, t) d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\partial W_\varepsilon^+} y v^2 \cos(\nu, t) d\sigma \right| \le \frac{2}{a^2} \int\limits_{\mathrm{p}(\partial W_\varepsilon)} v^2 dx dt \le \frac{c}{a^2} \theta^2 \lambda^2 \operatorname{mes} Q.$$

Выберем a_0 так, чтобы при $a > a_0$ вполнялось неравенство

$$I_2 - \left|I_4\right| - \left|I_7\right| \ge 2^{-4} \cdot c\theta^2 \lambda^2 \operatorname{mes} Q. \tag{28}$$

Зафиксировав a, выберем δ, r_0 столь малыми, чтобы при $r < r_0$

$$\left|I_1\right| + \left|I_3\right| + \left|I_5\right| + \left|I_6\right| + \left|I_8\right| + \left|I_9\right| + \left|I_{10}\right| \le 2^{-8} \cdot c\theta^2 \lambda^2 \operatorname{mes} Q. \tag{29}$$

Теперь из (28), (29) следует (22).

Введем множества

$$E_1 = \left\{ \psi^*_{\gamma,\lambda,\varepsilon} \le \frac{1}{2} \right\} \cap Q, \ E_1 = \left\{ A_{P_\varepsilon, a} \le \gamma\lambda \right\} \cap Q,$$

$$W_1 = \bigcup_{(x,t)\in E_1} \left(\Gamma_a(x,t) \cap V_\varepsilon^r \right).$$

Утверждение 4. *Справедливо неравенство*

$$\int\limits_{W_1} y \left| \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right|^2 dz dt \le c \frac{1}{a^{n+2}} \gamma^2 \lambda^2 \operatorname{mes} Q. \tag{30}$$

В завершение доказательства теоремы 3 заметим, что при достаточно малых γ неравенства (22), (30) противоречат одно другому. Поэтому неравенство, противоположное (15), невозможно, а значит, теорема доказана.

1. *Burkholder D. L., Gundy R. F.* Distribution function inequalities for the area integral// Studia Math.– 1972.– **44**, №6.– P. 527–544.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В.А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.– М.: Наука, 1967.– 736 с.
3. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.– М.: Мир, 1973.– 342 с.
4. *Шелепов В. Ю*. О граничных свойствах решений эллиптических уравнений в многомерных областях, представимых с помощью разности выпуклых функций // Мат. сб.– 1987.– **133**, №4.– С. 446–468.

Получено 01.04.92