УДК 517.946

А.Ф. Тедеев, канд. физ-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для решения начально-краевой задачи Дирихле уравнения высокого порядка получены оценки снизу. Получены также точные оценки $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega}|\nabla u(x,t)|$ начально-краевой задачи Неймана для уравнения второго порядка в $D=\Omega\times(t>0)$, где $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, – область с некомпактной выпуклой границей.

Для розв'язку початково-крайової задачі Діріхле рівняння високого порядку одержані оцінки знизу. Одержані також точні оцінки $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega}|\nabla u(x,t)|$ початково-крайової задачі Неймана для рівняння другого порядку в $D=\Omega\times(t>0)$, де $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, – область з некомпактною опуклою межею.

1. *Введение..* Вопросам стабилизации решений нестационарных начально–краевых задач уделяется большое внимание [1]. В работе [2] получены точные оценки скорости стабилизации $|\nabla u(x,t)|$ решения задачи Неймана:

$$u_t=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m-1}\nabla u\right),\ m>1, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega\times(t>0)}=0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega, \tag{3}$$

в цилиндре $D=\Omega\times(t>0)$, где Ω — ограниченная гладкая выпуклая область. Задача Коши (1)–(3), $\Omega=R^n$, изучалась в работе [3]. В работах автора [4–6] изучалась задача Неймана для уравнений типа (1) и его обобщений в неограниченной по x области $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$. Основным требованием к области Ω было условие изопериметрического типа. Получены точные оценки $M(t)=\operatorname{ess\,sup}_{\Omega}|\nabla u(x,t)|$ при $t\to\infty$, зависящие от геометрии области. Впервые зависящие от геометрии области оценки $M(t)$ в линейном случае были получены в работах [7, 8] (см. также список литературы в [8]).

Цель данной работы – получить оценку $N(t)=\operatorname{ess\,sup}_{\Omega}|\nabla u(x,t)|$ при $t\to\infty$ решения задачи Неймана для квазилинейных параболических уравнений в D, где Ω — выпуклая область с некомпактной границей.

2. *Допустимая скорость стабилизации решения.* Пусть $\Omega\subset R^n$, $n\geq 2$, – произвольная, вообще говоря, неограниченная область с достаточно гладкой границей, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in R^n$.

Рассмотрим в $D=\Omega\times(t>0)$ решение следующей задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu+g(u^2)u=0, \tag{4}$$

$$\left.D^{\beta}u\right|_{\partial\Omega\times(t>0)}=0,\ |\beta|\leq m-1,\ m\geq 1, \tag{5}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\Omega. \tag{6}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$Lu\equiv(-1)^m\sum_{|\alpha|=m}D^\alpha\left(a\left(\left|D^m u\right|^2\right)D^\alpha u\right),$$

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\ |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,\ D^m u=D^\alpha u,\ |\alpha|=m.$$

Предположим, что неотрицательные функции $a(s)$ и $g(s)$, $0\le s<\infty$, удовлетворяют следующим условиям: $a(0)=g(0)=0$, $a(s), g(s)\in C^1(0,\infty)$. Кроме того, пусть существуют положительные постоянные ν_1, ν_2, c_i, $i=1,\ldots,6$, такие, что

$$\nu_1\le 1+a'(s)s/a(s)\le c_1, \tag{7}$$

$$\nu_2\le 1+g'(s)s/g(s)\le c_2, \tag{8}$$

$$c_3 s^{\frac{p-2}{2}}\le a(s)\le c_4 s^{\frac{p-2}{2}},\ c_5 s^{\frac{q-2}{2}}\le g(s)\le c_6 s^{\frac{q-2}{2}}, \tag{9}$$

$p\ge 2$, $q\ge 2$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ пространство С. Л. Соболева, полученное пополнением $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\left(\int_\Omega\sum_{|\alpha|\le m}\left|D^\alpha u\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Пусть $u_0(x)\in\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)\cap L_2(\Omega)\cap L_q(\Omega)$. Под решением задачи (4)–(6) в D понимается функция $u(x,t)$, принадлежащая при любом $T>0$ $W_T=L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega))\cap C([0,T];L_2(\Omega))\cap L_q((0,T);L_q(\Omega))$ и удовлетворяющая (4)–(6) в слабом смысле [9]. Как известно [9], такое решение существует и единственно. Отметим, что в вопросах существования и единственности в данном случае неограниченность области не играет существенной роли. Пусть

$$\mathcal{A}(s)=\int_0^s a(\tau)d\tau,\ G(s)=\int_0^s g(\tau)d\tau,\ E(t)=\int_\Omega u^2dx,$$

$$F(t)=\int_\Omega\left(\mathcal{A}\left(\left|D^m u\right|^2\right)+G\left(u^2\right)\right)dx,\ \gamma=\min\left(\nu_1,\nu_2\right).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение задачи* (4)–(6) *в* D. *Тогда для всех* $t>0$ *справедливы следующие оценки*:

$$E(t)\ge E(0)\left(c_7\left(F(0)/E(0)\right)t+1\right)^{-1/(\gamma-1)}\ \textit{при}\ \gamma>1, \tag{10}$$

$$E(t) \geq E(0)\exp\left(-c_8 \frac{F(0)}{E(0)} t\right) \ \textit{при}\ \gamma = 1. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\Omega(R)$ – гладкое исчерпание Ω : при $R \to \infty$: $\Omega(R) \subset \Omega$, $\Omega(R_1) \subset \Omega(R_2)$, $R_1 < R_2$. Рассмотрим в $D_{T,R} = \Omega(R) \times (0, T)$ следующую задачу:

$$v_t + Lv + g(v^2)v = 0, \tag{12}$$

$$D^{\beta}v\big|_{\partial\Omega(R)} = 0, \tag{13}$$

$$v(x,0) = v_0(x),\ x \in \Omega(R), \tag{14}$$

где $v(x, t) \equiv u_R(x, t)$, $u_{0R}(x) = 0$, $x \in \Omega \setminus \Omega(R)$, $u_{0R}(x) \to u_0(x)$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega) \cap L_2(\Omega) \cap$ $\cap\, L_q(\Omega)$. Не ограничивая общности, можем считать, что функции $v(x, t)$ достаточно гладкие: этого всегда можно добиться, переходя к галеркинским приближениям [9]. Умножим обе части (12) на v_t и результат проинтегрируем по $\Omega(R)$. Получим

$$\int\limits_{\Omega(R)} v_t^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega(R)} \left(A\left(\left|D^m v\right|^2\right) + G\left(v^2\right)\right) dx. \tag{15}$$

Умножая обе части (12) на v и интегрируя по $\Omega(R)$, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega(R)} v^2 dx = -\int\limits_{\Omega(R)} \left(a\left(\left|D^m v\right|^2\right)\left|D^m v\right|^2 + g\left(v^2\right)v^2\right) dx. \tag{16}$$

Далее

$$-\int\limits_{\Omega(R)} v v_t dx \leq \left(\int\limits_{\Omega(R)} v^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega(R)} v_t^2 dx\right)^{1/2}$$

Учитывая (15) и (16), а также (7) и (8), получаем

$$\gamma F_R(t)\dot{E}_R(t) \geq E_R(t)\dot{F}_R(t), \tag{17}$$

где

$$E_R(t) = \int\limits_{\Omega(R)} v^2 dx,\ F_R(t) = \int\limits_{\Omega(R)} \left(\mathcal{A}\left(\left|D^m v\right|^2\right) + G\left(v^2\right)\right) dx.$$

Интегрируя (17), имеем

$$F_R(t) \leq \left(F_R(0)\big/\left(E_R(0)\right)^{\gamma}\right)\left(F_R(t)\right)^{\gamma},\ \gamma > 1, \tag{18}$$

$$F_R(t) \leq \left(F_R(0)/E_R(0)\right)E_R(t),\ \gamma = 1. \tag{19}$$

Из неравенства (16) с учетом оценок (18), (19), (7) и (8) находим

$$\frac{dE_R}{E_R^{\gamma}} \geq c_9 \frac{F_R(0)}{\left(E_R(0)\right)^{\gamma}} dt,\ \gamma > 1, \tag{20}$$

$$\frac{dE_R}{E_R} \geq -c_{10} \frac{F_R(0)}{E_R(0)} dt,\ \gamma = 1. \tag{21}$$

Интегрируя (20) и (21), получаем

$$E_R(t) \geq E_R(0)\left(c_{11}\left(F_R(0)/E_R(0)\right)t + 1\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}},\ \gamma < 1, \tag{22}$$

$$E_R(t) \geq E_R(0)\exp\left(-c_{12}\left(F_R(0)/E_R(0)\right)t\right),\ \gamma = 1. \tag{23}$$

Устремляя в неравенствах (22) и (23) $R \to \infty$, получаем неравенства (10) и (11). Теорема 1 доказана.

Пусть Ω – ограниченная область в R^n, $g(s) \equiv 0$, $a(s) = s^{(p-2)/2}$. Тогда из неравенства (10) следует

$$F(t) \geq c_{13} t^{-2/(p-2)}. \tag{24}$$

Кроме того, в силу неравенства Пуанкаре, из (24) получаем оценку

$$I(t) = \int_\Omega \left| D^m u \right|^p dx \geq c_{14} t^{-p/(p-2)}. \tag{25}$$

Далее, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\frac{1}{p}\dot{I}(t) \leq -(I(t))^2 / F(t) \leq -c_{15}(|\Omega|)(I(t))^{2-2/p}.$$

Интегрируя это неравенство, находим

$$I(t) \leq c_{16} t^{-p/(p-2)}. \tag{26}$$

Из неравенства (16) легко получить

$$F(t) \leq c_{17} t^{-2/(p-2)}. \tag{27}$$

Кроме того, из (24) имеем

$$\| u(x,t) \|_{L_\infty(\Omega)} \geq c_{18} t^{-1/(p-2)}. \tag{28}$$

Если $n < mp$, то в силу неравенства Ниренберга–Гальярдо

$$\| u(x,t) \|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_{19} \| D^m u \|^{\theta}_{L_p(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_2(\Omega)} \leq c_{20} t^{-1/(p-2)}, \tag{29}$$

$$\theta = n / \left(n(p-2) + 2pm\right).$$

Неравенства (24)–(29) показывают, что теорема 1 дает точную оценку снизу по крайней мере в частных случаях. Пусть теперь Ω – снова произвольная неограниченная область в R^n, $n \geq 2$, $g \equiv 0$, $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ и выполнены условия (7) и (9). Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для решения* $u(x, t)$ *задачи* (4)–(6) *для всех* $t > 0$ *справедливы следующие оценки:*

$$\| u(x,t) \|_{L_q(\Omega)} \leq c_{21}\, t^{-n(q-2)/(n(p-2)+2pm)q},\ n \geq mp, \tag{30}$$

$$\| u(x,t) \|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_{22}\, t^{-n/(n(p-2)+2pm)},\ n < mp. \tag{31}$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1 достаточно установить неравенства (30) и (31) для решения $u_R(x, t) = v(x, t)$ аппроксимирующей задачи.

Интегрируя неравенство (15) в пределах от t_1 до t_2, получаем

$$\int\limits_{\Omega(R)} \mathcal{A}\left(\left|D^m v(x,t_2)\right|^2\right) dx \le \int\limits_{\Omega(R)} \mathcal{A}\left(\left|D^m v(x,t_1)\right|^2\right) dx. \tag{32}$$

Далее, интегрируя (16), находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(R)} v^2(x,t)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega(R)} a\left(\left|D^m v\right|^2\right)\left|D^m v\right|^2 dx d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega(R)} v^2(x,0)\, dx. \tag{33}$$

Учитывая оценку (32) и условия (7) и (9), имеем

$$\int\limits_{\Omega(R)} \left|D^m v(x,t)\right|^p dx \le c_{23} / t.$$

В силу неравенства Ниренберга–Гальярдо отсюда получаем

$$\| v(x,t)\|_{L_q(\Omega(R))} \le c_{24} \| D^m v(x,t)\|^{\theta_1}_{L_p(\Omega(R))} \| v(x,t)\|^{1-\theta_1}_{L_2(\Omega(R))} \le$$

$$\le c_{25} t^{-\frac{(q-2)n}{q(n(p-2)+2pm)}},\ \theta_1 = \frac{(q-2)n}{q(n(p-2)+2pm)},\ n > mp,$$

$$\| v(x,t)\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{26} t^{-\frac{n}{n(p-2)+2pm}},\ n < mp.$$

Устремляя в этих неравенствах $R \to \infty$, приходим к неравенствам (30) и (31). Теорема 2 доказана.

В заключение данного пункта отметим, что результаты теорем 1 и 2 справедливы для решения задачи Коши. Оценка снизу для решения задачи Коши при $m = 1$, $a(s) = s^{(m-1)/2}$, $g(s) \equiv 0$ получена также в работе [3].

3. *Равномерные оценки* $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\Omega} |\nabla u(x,t)|$. В цилиндре $D = \Omega \times (t > 0)$, где $\Omega \subset R^n$, $n \ge 2$, Ω — неограниченная область с некомпактной границей $\partial\Omega$, рассмотрим решение $u(x, t)$ следующей задачи:

$$u_t = \operatorname{div}\left(a\left(|\nabla u|^2\right)\nabla u\right), \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega\times(t>0)} = 0, \tag{35}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega,\ u_0 \in L_2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega) \cap W^1_{m+1}(\Omega). \tag{36}$$

Здесь функция $a(s) > 0$, $s > 0$, $a(0) = 0$, $a(s) \in C^\infty\left(R^1_t \setminus 0\right)$ и, кроме того, удовлетворяет условиям (7) и

$$c_{27}\, s^{(m-1)/2} \le a(s) \le c_{28}\, s^{(m-1)/2},\ m \ge 1, \tag{37}$$

$\dfrac{du}{d\nu}$ — производная по внешней нормали к $\partial\Omega$. Под решением $u(x, t)$ задачи (34)–(36) в D понимается функция, принадлежащая классу $V_T = C([0, T], L_2(\Omega)) \cap L_{m+1}\left((0,T), W^1_{m+1}(\Omega)\right)$ $\forall\, T > 0$ и удовлетворяющая (34)–(36) в слабом смысле [6]. Существование и единственность решения доказываются обычными методами.

Предположим, что $\partial\Omega \subset C^2$ и выпукла. Кроме того, предположим, что Ω удовлетворяет условию изопериметрического типа в следующем смысле [8]. Рассмотрим функцию $l(v) = \inf \operatorname{mes}_{n-1}(\partial Q \cap \Omega)$, где Q – произвольное открытое подмножество в Ω, а $\inf$ берется по всем Q таким, для которых $|Q| = v$. Будем говорить, что $\Omega \in \mathfrak{U}(g)$, если $\forall v > 0 \;\; l(v) \geq g(v)$, где $g(v)$ — положительная непрерывная монотонно неубывающая функция такая, что $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ $(0 < \varepsilon_0 \leq 1/n)$ монотонно не убывает для всех $v > 0$. Пусть $\Omega(R) \subset \Omega$, $R > 0$ – семейство выпуклых областей класса C^2, исчерпывающих Ω при $R \to \infty$, причем $\Omega(R_1) \subset \Omega(R_2)$, $R_1 < R_2$. Рассмотрим в цилиндре $D_R = \Omega(R) \times (t > 0)$ следующее семейство задач:

$$\frac{\partial u_R}{\partial t} = \operatorname{div}\left(a\left(\left|\nabla u_R\right|^2 + R^{-\lambda}\right)\nabla u_R\right), \lambda > \lambda_0(n,m), \tag{38}$$

$$\left.\frac{\partial u_R}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega(R)} = 0, \tag{39}$$

$$u_R(x,0) = u_{0R}(x),\; x \in \Omega(R). \tag{40}$$

Здесь $u_{0R}(x) \in C^\infty\left(\overline{\Omega(R)}\right)$, $u_{0R} = 0$, $x \in \Omega \setminus \Omega(R)$, $u_{0R} \to u_0$ в $L_2(\Omega) \cap W^1_{m+1}(\Omega)$.

Из общей теории невырожденных квазилинейных параболических уравнений следует, что решение задачи $u_R(x,t) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}(R), R^+\right)$. В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,\, t)$ *– решение задачи* (34)–(36) *в* D. *Тогда равномерно по* $t \in (0, \infty)$

$$\left\|u_R(x,t) - u(x,t)\right\|_{L_2(\Omega(R))} \to 0 \;\; \text{при} \;\; R \to \infty.$$

Лемма 2. *Пусть* $u(x,\, t)$ *— решение задачи* (34) – (36) *в* D. *Тогда для всех* $t > 0$ *справедливы следующие оценки:*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c_{29}\|u_0\|^2_{L_1\left(\Omega_{2R(t)}\right)}\left(J_{-1}\left(\|u_0\|^{m-1}_{L_1\left(\Omega_{2R(t)}\right)} t\right)\right)^{-1} \equiv \tilde{w}_1(t), \tag{41}$$

где

$$J(s) = s^{m-1}\mathcal{P}_m(s),\; \mathcal{P}_m(s) = \int\limits_0^s \frac{d\xi}{\xi}\int\limits_0^\xi \frac{\theta^m}{(g(\theta))^{m+1}}\,d\theta,$$

$\Omega_R = \Omega \cap (|x| < R)$, *функция* $R(t)$ $\forall\, t > 0$ *определяется из условия*

$$t \leq KJ\left(\frac{\|u_0\|^2_{L_1(\Omega_{2R})}}{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega\setminus\Omega_R)}}\right)\|u_0\|^{-(m-1)}_{L_1(\Omega_{2R})},\;\; K > 0. \tag{42}$$

Если дополнительно $u_0 \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, *то*

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c_{30}\|u_0\|^2_{L_1(\Omega)}\left(J_{-1}\left(\|u_0\|^{m-1}_{L_1(\Omega)} t\right)\right)^{-1} \equiv \tilde{w}_2(t). \tag{43}$$

Лемма 3. *Пусть* $u(x, t)$ *– решение задачи* (34)–(36) *в* D *и* $\tilde{w}(t)$ *— любая оценивающая* $\|u(x,t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ *функция, удовлетворяющая условию: существует такая положительная постоянная* $\kappa > 0$, *что* $t^{\kappa}\tilde{w}(t)$ *монотонно не убывает при всех* $t > 0$. *Тогда для всех* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\nabla u(x,t)\|^{m+1}_{L_{m+1}(\Omega)} \le c_{31}\tilde{w}(t)/t. \tag{44}$$

Доказательство лемм 1-3 опускаем. Лемма 2 доказывается методами, приведенными в работе [6]. Перейдем к равномерным оценкам $N(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|\nabla u(x,t)|$. Обозначим

$$\tilde{N}(t) = \tilde{E}_1(t) \Big/ \left(\tilde{J}_{-1}\left(\left(\tilde{E}_1(t)\right)^{m-1} t\right)\right)^{1/(m+1)},$$

где

$$\tilde{J}(s) = s^{(m-1)/(m+1)}\mathcal{P}_1(s),\ \tilde{E}_1(t) = \left(\tilde{w}_1(t)/t\right)^{1/(m+1)},$$

если $u_0(x) \in L_2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$; $\tilde{E}_1(t) = \left(\tilde{w}_2(t)/t\right)^{1/(m+1)}$, если $u_0 \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $u(x, t)$ *– решение задачи* (34)–(36) *в* D, $u_0(x) \in L_2(\Omega) \cap \cap L_\infty(\Omega) \cap W^1_p(\Omega)$, $m + 1 \le p \le \infty$. *Предположим, что существует* $\kappa_1 > 0$ *такая, что* $\tilde{N}(t)t^{\kappa_1}$ *монотонно не убывает при всех* $t > 0$. *Тогда для всех* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$N(t) \le c_{32}\tilde{N}(t). \tag{45}$$

Доказательство. Пусть $\zeta_R(x)$ — гладкая срезающая функция $\Omega(R)$: $\zeta_R = 1$ при $x \in \Omega(R/4)$; $0 \le \zeta_R \le 1$ при $x \in \Omega(R)$, $\zeta_R = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega(R/2)$. Продифференцируем обе части (38) по x_j, полученное соотношение умножим на

$$\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{(p-1)/2} v_{x_j}\zeta_R^{p+1},\ v = u_R(x,t),\ p \ge m+1,$$

и результат проинтегрируем по $\Omega(R)$. В итоге получим

$$\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega(R)}\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{\frac{p+1}{2}}\zeta_R^{p+1}dx =$$

$$= \int_{\Omega(R)}\left(a\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)v_{x_i}\right)_{x_i x_j}\zeta_R^{p+1}\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{\frac{p}{2}}dx \equiv A_1. \tag{46}$$

Правую часть в (46) преобразуем интегрированием по частям следующим образом:

$$A_1 = -\int_{\Omega(R)}\left(\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{\frac{p-1}{2}} v_{x_j}\zeta_R^{p+1}\right)_{x_i}\left(a\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)v_{x_i}\right)_{x_j}dx +$$

$$+ \int_{\partial\Omega(R)} a\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)v_{x_i}\nu_i\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{\frac{p-1}{2}} v_{x_j}\zeta_R^{p+1}ds \equiv A_2 + A_3.$$

В силу выпуклости $\Omega(R)$ [2] и условия (39) интеграл по границе A_3 неположителен. Далее, с помощью преобразований, аналогичных приведенным в [2], легко получить неравенство

$$-A_2 \geq c_{33} \frac{p-1}{(p+m)^2} \int\limits_{\Omega(R)} \left| \nabla \left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda} \right)^{\frac{p+m}{4}} \right|^2 \zeta_R^{p+1} dx -$$

$$- c_{34}(p+1) \int\limits_{\Omega(R)} \left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda} \right)^{\frac{p+m}{2}} |\nabla \zeta_R|^2 \zeta_R^{p-1} dx. \qquad (47)$$

Обозначим $w = \zeta_R(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda})^{1/2}$. Из неравенств (46), (47) имеем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} w^{p+1} dx \leq -c_{35} \int\limits_{\Omega} \left| \nabla w^{\frac{p+m}{2}} \right|^2 dx +$$

$$+ c_{36}(p+1)^2 \int\limits_{\Omega(R)} \left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda} \right)^{\frac{p+m}{2}} |\nabla \zeta_R|^2 \zeta_R^{p-1} dx. \qquad (48)$$

Воспользуемся мультипликативным неравенством

$$\|\nabla f\|^2_{L_2(\Omega)} \geq c_{37} \frac{\|f\|^{\lambda/(\lambda-1)}_{L_\lambda(\Omega)} \|f\|^{-(2-\lambda)/(\lambda-1)}_{L_1(\Omega)}}{\mathcal{P}_1\left(\dfrac{\|f\|^{\lambda/(\lambda-1)}_{L_1(\Omega)}}{\|f\|^{\lambda/(\lambda-1)}_{L_\lambda(\Omega)}} \right)}, \qquad (49)$$

$f \in W_2^1(\Omega) \cap L_1(\Omega)$, $\Omega \in \mathfrak{U}(g)$, $1 < \lambda \leq 2$. Неравенство (49) и его обобщения можно найти в работах [5, 7, 10]. Полагая в неравенстве (49) $f = w^{(p+m)/2}$, из (48) получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} w^{p+1} dx \leq -c_{38} \frac{\left(\int\limits_{\Omega} w^{p+1} dx \right)^{(p+m)/(p+2-m)}}{\left(\int\limits_{\Omega} w^{\frac{p+m}{2}} dx \right)^{\frac{2(m-1)}{p+2-m}} \mathcal{P}_1\left(\dfrac{\left(\int\limits_{\Omega} w^{\frac{p+m}{2}} dx \right)^{\frac{2(p+1)}{p+2-m}}}{\left(\int\limits_{\Omega} w^{p+1} dx \right)^{\frac{p+m}{p+2-m}}} \right)} + \varepsilon_p(R), \qquad (50)$$

где $\varepsilon_p(R) = c_{39} \dfrac{(p+1)^2}{R^2} \|\nabla u_0\|^{p+m}_{L_{p+m}(\Omega)}$. Здесь мы воспользовались (48) при $\zeta_R \equiv 1$:

$$\|w\|^{p+1}_{L_{p+1}(\Omega(R))} \leq \left\| |\nabla v|^2 + R^{-\lambda} \right\|^{(p+1)/2}_{L_{(p+1)/2}(\Omega(R))} \leq \left\| |\nabla v_0|^2 + R^{-\lambda} \right\|^{(p+1)/2}_{L_{(p+1)/2}(\Omega)}. \qquad (51)$$

Рассмотрим последовательность чисел $p_k = 2^{k+1} + m - 2$, $k = 1, 2, \ldots$, и последовательность

$$E_k(t) = \|w\|^{p_k+1}_{L_{p_k+1}(\Omega(R))}.$$

Тогда из неравенства (50) следует

$$\frac{d}{dt}E_k(t) \le -c_{38}\frac{\left(E_k(t)\right)^{\beta_k}}{\left(E_{k-1}(t)\right)^{\beta_k-1}\mathcal{P}_1\left(\frac{\left(E_k(t)\right)^{\beta_k+1}}{\left(E_{k-1}(t)\right)^{\beta_k}}\right)}, \tag{52}$$

где $\beta_k = (p_{k-1}+1)/(p_k - p_{k-1})$.

Рассмотрим

$$\Delta_k(t) = \tilde{E}_k(t) - E_k(t),\ \tilde{E}_k(t) = c_{40}\left(\tilde{E}_1(t)\right)^{p_k+1}\times$$

$$\times\left(\tilde{J}_{-1}\left(\left(\tilde{E}_1(t)\right)^{m-1}t\right)\right)^{-\frac{(p_k-m)}{m+1}}\left(\prod_{i=1}^{k}\left(\theta_1 p_i\right)^{\frac{\theta_2}{p_i+1}}\right)^{p_k+1},\ \theta_1,\theta_2>0.$$

При $k=1$ справедливо неравенство

$$E_1(t) \le c_{40}\tilde{E}_1^{m+1}(t) \quad \forall t>0 \tag{53}$$

при достаточно больших $R > R_0$. Действительно, несложно показать, что при достаточно больших $R > R_0$

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega(R))} \le c_{41}\tilde{w}_1(t),\ u_0 \in L_2(\Omega)\cap L_\infty(\Omega), \tag{54}$$

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega(R))} \le c_{42}\tilde{w}_2(t),\ u_0 \in L_1(\Omega)\cap L_\infty(\Omega). \tag{55}$$

Кроме того, точно так же, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(R)}\mathcal{A}\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)dx \le -c_{43}\left(\int_{\Omega(R)}\mathcal{A}\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)dx\right)^2 \Big/ \int_{\Omega(R)} v^2\,dx. \tag{56}$$

Следовательно, интегрируя (56) с учетом (54) и (55), получаем

$$\int_{\Omega(R)}\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{\frac{m+1}{2}}dx \le c_{44}\tilde{E}_1^{m+1}(t).$$

Точно так же, как в работах [5, 6], доказывается, что при достаточно больших $\theta_1 > \tilde{\theta}_1,\ R > R_0$ для всех $t>0,\ k>1$ справедливо неравенство $\Delta_k(t) \ge 0$, т.е.

$$\left(E_k(t)\right)^{1/(p_k+1)} \le \left(\tilde{E}_k(t)\right)^{1/(p_k+1)}. \tag{57}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем

$$N_R(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega(R)}\left(\left(|\nabla u_R|^2 + R^{-\lambda}\right)\zeta_R^2\right)^{1/2} \le c_{45}\tilde{N}(t). \tag{58}$$

В силу леммы 1 и оценки (51) находим $\varliminf_{R\to\infty} N_R(t) \le c_{45}\tilde{N}(t)$. Кроме того,

$$\varliminf_{R\to\infty}\|\nabla u(x,t)\|_{L_R(\Omega)} \le \varliminf_{R\to\infty}\left(\int_{\Omega(R)}\left(\zeta_R\left(|\nabla v|^2 + R^{-\lambda}\right)^{1/2}\right)^R dx\right)^{1/R} \le$$

$$\le \varliminf_{R\to\infty} \left|\Omega(R)\right|^{1/R} N_R(t) \le c_{45}\tilde{N}(t).$$

Следовательно, теорема 3 доказана.

Примеры. 1. Пусть $\Omega \in \mathfrak{U}(g)$, $g(v) \ge c_{46}v^{1-\alpha_0}$, $v > v_0$, $1/n \le \alpha_0 \le 1$, $u_0 \in L_1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Тогда при достаточно больших $t > 0$

$$E_1(t) \le c_{47}t^{-\left((m+1)\alpha_0+m\right)/(m+1)\left((m+1)\alpha_0+m-1\right)} \equiv c_{47}\tilde{E}_1(t).$$

Следовательно, в качестве $\tilde{N}(t)$ можно взять

$$\tilde{N}(t) = c_{48}\, t^{-(1+\alpha_0)/(m-1+\alpha_0(m+1))} = c_{48}\, t^{-\beta_1(\alpha_0)}. \tag{59}$$

Отметим, что в случае $\alpha_0 = \dfrac{1}{n}$, $\beta_1 = \dfrac{n+1}{(m-1)n+m+1}$, Ω — область типа конуса. Если же $\alpha_0 = 1$, $\beta_1 = 1/m$, Ω — область типа цилиндра.

2. Пусть $\Omega \in \mathfrak{U}(g)$, $g(v) \ge c_{46}v^{1-\alpha_0}$, $v > v_0$, $1/n \le \alpha_0 \le 1$, $c_{49}(1+|x|)^{-\alpha} \le u_0(x) \le c_{50}(1+|x|)^{-\alpha}$, $\dfrac{1}{2\alpha_0} < \alpha \le \dfrac{1}{\alpha_0}$. Тогда при $\dfrac{1}{2\alpha_0} < \alpha < \dfrac{1}{\alpha_0}$ для достаточно больших $t > 0$

$$\tilde{N}(t) = c_{51}\, t^{-(1+\alpha)/(\alpha(m-1)+m+1)}, \tag{60}$$

если же $\alpha = 1/\alpha_0$, то при достаточно больших $t > 0$

$$\tilde{N}(t) = c_{52}(\ln\tau)^{1+2\alpha_0}\, \tau^{-(\alpha_0+1)/(m-1+(m+1)\alpha_0)}, \tag{61}$$

где $t = c_{53}\tau\big/(\ln\tau)^{m-1+2\alpha_0(m+1)}$.

В заключение отметим, что результаты теоремы 3 являются новыми, по-видимому, и для случая $m = 1$.

1. *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка//Успехи мат. наук.–1987.–**42**, вып.2.–С. 135–176.
2. *Alikakos N., Rostamian R.* Gradient estimates for degenerate diffusion equations. I. // Math. Ann. – 1982.– **259**.– P. 53–70.
3. *Alikakos N., Rostamian R.* Gradient estimates for degenerate diffusion equations. II. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.– 1982.– **91**, № 3–4.– P. 335–346.
4. *Тедеев А.Ф.* Двусторонние оценки скорости стабилизации решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Докл. АН УССР.– 1991.– № 14.– С. 11–13.
5. *Тедеев А.Ф.* Стабилизация решения третьей смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений второго порядка в нецилиндрической области // Изв. вузов. Математика.– 1991.– № 1.– С. 63–73.
6. *Тедеев А.Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения.– 1991.– **27**, № 10.– С. 1795–1806.
7. *Гущин А.К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин–та АН СССР. – 1973.– **126**.– С. 5–45.
8. *Гущин А.К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Мат. сб.– 1982.– **119**, №4.– С. 451–508.
9. *Вишик М.И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высоких порядков // Там же.– 1962.– **59** (доп).– С. 289–325.
10. *Тедеев А.Ф.* О мультипликативных неравенствах в областях с некомпактной границей // Укр. мат. журн.– 1992.– **44**, №2.– С. 260–268.

Получено 01. 04. 92