УДК 517.9

А. Е. Шишков, д-р физ.-мат. наук (Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

ОБ ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИВЕРГЕНТНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Предложен метод получения интегральных лемм возрастания решений краевых задач для широкого класса квазилинейных эволюционных уравнений. В качестве возможного применения получена точная оценка зависимости от времени носителя решения смешанной задачи и задачи Коши для общего квазилинейного дивергентного параболического уравнения.

Запропоновано метод одержання інтегральних лем зростання розв'язків граничних задач для широкого класу квазілінійних еволюційних рівнянь. Можливим застосуванням є одержана точна оцінка залежності від часу носія розв'язку змішаної задачі і задачі Коші для загального квазілінійного дивергентного параболічного рівняння.

В произвольной (возможно и неограниченной) области $G = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset\subset R^n$, $n \geq 1, T < \infty$, рассматривается смешанная задача

$$u_t + A_p^{(2m)} u \equiv u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D_x^\alpha a_\alpha(x,t,u,\nabla_x u,\ldots,\nabla_x^m u) = 0, \ m \geq 1, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \in L_2(\Omega); \quad D_x^\alpha u\big|_{\Gamma=\partial\Omega\times(0,T)} = 0 \quad \forall\,\alpha\colon |\alpha| \leq m-1. \tag{2}$$

Здесь каратеодориевы функции $a_\alpha(x, t, \xi)$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,\xi^{(0)},\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(m)})\xi_\alpha^{(m)} \geq d_1 \left|\xi^{(m)}\right|^p, \ d_1 > 0, \ p > 2, \tag{3}$$

$$a_\alpha(x,t,\xi^{(0)},\ldots,\xi^{(m)}) \leq d_2 \left|\xi^{(m)}\right|^{p-1}, \ d_2 < \infty. \tag{4}$$

Рассматривается произвольное обобщенное решение (с ограниченным интегралом энергии в случае неограниченной области Ω) задачи (1), (2), под которым понимается функция $u(x, t)$ такая, что для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$ $u(x,t) \in L_p\left(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^m\left(\Omega',\partial\Omega' \setminus \partial\Omega\right)\right)$, $u_t \in L_2(\Omega'\times(0,T))$, $u\big|_{t=0} = u_0(x)$, а также выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega'\times(0,T)} \left[u_t v + \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x,t,u,\nabla_x u,\ldots,\nabla_x^m u) D^\alpha v\right] dxdt = 0 \tag{5}$$

для произвольной функции $v(x,t) \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^m\left(\Omega'\right))$.

В работе [1] предложен метод получения интегральных лемм возрастания (в терминологии Е.М. Ландиса) для обобщенных решений задачи (1), (2) и на их основе установлены точные теоремы типа Фрагмена–Линделефа. В настоящей статье показана применимость указанного метода при изучении асимптотических свойств решений с ограниченным интегралом энергии, в частности для описания геометрии носителя решения по известной геометрии носителя начальной функции $u_0(x)$.

Обозначим $\Omega(\tau) \equiv \Omega \cap \{|x| < \tau\}$ $\forall \tau < \infty$, $G(\tau) = \Omega(\tau) \times (0,T)$, $\mu = \text{const} > 0$, $g(t) = \exp(-\mu t)$.

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $\tau_0 < \infty$ $\operatorname{supp} u_0(x) \cap \Omega(\tau_0) = \varnothing$ *и* $u(x,t)$

– произвольное обобщенное решение задачи (1), (2). *Тогда для произвольных* τ_1, τ_2: $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_0$ *выполняется следующее соотношение*:

$$J(\tau_1) = \int\limits_{G(\tau_1)} |u|^p g(t)dxdt \le \Big[D_1\mu^{-1}\tau_1^{-n(p-2)/2}(\tau_2-\tau_1)^{-mp^2/2}(I(\tau_2)-I(\tau_1))^{(p-2)/2} +$$

$$+ D_2\mu^{\theta-1}(\tau_2-\tau_1)^{-mp\theta-mp^2(1-\theta)/2}(I(\tau_2)-I(\tau_1))^{(1-\theta)(p-2)/2}\Big](J(\tau_2)-J(\tau_1), \quad (6)$$

где D_1, $D_2 < \infty$ *– постоянные, зависящие только от известных параметров задачи* (1), (2), $\theta = n(p-2)\,(2mp+n(p-2))^{-1}$, $I(\tau) \equiv \int_{G(\tau)} |u|^p\,dx\,dt$.

Следствием соотношения (6) является непрерывная зависимость supp $u(x,t)$ от t, а также точные оценки supp $u(x, t)$ при различных конкретных supp $u_0(x)$. Так, в частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для некоторого* $\tau_0 < \infty$ $\operatorname{supp} u_0(x) \cap \{x\colon x_n < \tau_0\} = \varnothing$. *Тогда для функции* $f(T) \equiv \operatorname{supp}\{s\colon \operatorname{supp} u(x, T) \cap \{x \in R^n\colon x_n < s\} = \varnothing\}$ *выполняется*

$$f(0) - f(T) \le D_3 T^{\alpha} I_{0,T}^{\beta}, \quad (7)$$

где $D_3 < \infty$ *не зависит от* T, $I_{0,T} \equiv \int\limits_{G\cap\{x_n<\tau_0,t<T\}} |u|^p dx\,dt$, $\quad \alpha = \dfrac{2}{mp^2+n(p-2)}$,

$\beta = \dfrac{p-2}{mp^2+n(p-2)}$.

Замечание 1. В силу неравенства Пуанкаре

$$I_{0,T} \le c(f(0)-f(T))^{mp} E_0(T),$$

где $E(T) = \int\limits_{G\cap\{x_n<\tau,t<T\}} \left|\nabla_x^m u\right|^p dxdt$, $c < \infty$ не зависит от T. Поэтому, продолжая оценку (7), получаем неравенство

$$f(0) - f(T) \le D_4 T^{\alpha_1} E_0(T)^{\beta_1}, \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{1-\beta mp} \equiv \frac{2}{2mp+n(p-2)},\ \beta_1 = \frac{\beta}{1-\beta mp} \equiv \frac{p-2}{2mp+n(p-2)}$$

Оценка (8) для некоторых классов уравнений вида (1) получена Бернисом [2, 3] на основе доказанных весовых интерполяционных неравенств.

В дальнейшем понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть непрерывная при всех* $\tau \le \tau_0 < \infty$ *неубывающая неотрицательная функция* $I(\tau)$ *удовлетворяет следующему функциональному неравенству:*

$$I(\tau - dI(\tau)) \le \theta I(\tau)\ \forall \tau \le \tau_0,\ 0<\theta<1,\ 0<d<\infty,\ 0<\alpha. \quad (9)$$

Тогда $I(\tau) \equiv 0$ *при всех* $\tau < \tau' = \tau_0 - \dfrac{d}{1-\theta^{\alpha}} I(\tau_0)$..

Доказательство. Определим последовательность τ_j рекуррентным соотношением

$$\tau_j = \tau_{j-1} - d\,I(\tau_{j-1})^{\alpha}, \quad j = 1,2,\ldots \quad (10)$$

В силу соотношения (9) $I(\tau_j) \le \theta\, I(\tau_{j-1})$, поэтому

$$I(\tau_j) \le \theta^j I(\tau_0). \quad (11)$$

Теперь из соотношения (10) с учетом (11) получаем

$$\tau_j = \tau_0 - d\sum_{i=0}^{j-1} I(\tau_i)^\alpha \geq \tau_0 - dI(\tau_0)^\alpha \sum_{i=0}^{j-1} \theta^{\alpha i} = \tau_0 - \frac{d(1-\theta^{\alpha j})}{1-\theta^\alpha} I(\tau_0)^\alpha.$$

Отсюда следует $\lim\limits_{j\to\infty} \tau_j = \tau'$. Так как в силу (11) $\lim\limits_{j\to\infty} I(\tau_j) = 0$, то в силу монотонности, неотрицательности и непрерывности $I(\tau)$ следует справедливость леммы 1.

Доказательство теоремы 1 начнем с формулировки интерполяционного неравенства Ниренберга–Гальярдо [4, с. 67]. Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область, $s \geq 1$, $r > 0$. Тогда для любого натурального $j < m$ справедливо вложение $W_q^j(\Omega) \subset W_s^m(\Omega) \bigcap L_r(\Omega)$ при любом q, удовлетворяющем соотношению

$$1/q = j/n + \theta(1/s - m/n) + (1-\theta)1/r$$

с каким–либо $\theta \in [j/m, 1]$, а также для любого $v(x) \in W_s^m(\Omega) \bigcap L_r(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\left\| \nabla_x^j v \right\|_{L_q(\Omega)} \leq K_1 (\operatorname{mes}\Omega)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{j}{n}} \| v \|_{L_n(\Omega)} + K_2 \left\| \nabla_x^m v \right\|_{L_s(\Omega)}^\theta \| v \|_{L_r(\Omega)}^{1-\theta}, \tag{12}$$

где постоянные $k_1, k_2 < \infty$ не зависят от v.

Введем необходимые срезающие функции. Пусть $\zeta(t) \in C^m(R^1)$: $\zeta(t) = 1$ при $t \leq 0$, $\zeta(t) = 0$ при $t \geq 1$, $0 < \zeta(t) < 1$ при $0 < t < 1$. Обозначим $\zeta_{\tau,\tau'}(x) = \zeta\left(\frac{|x| - \tau}{\tau' - \tau}\right)$, $x \in R^n$, $\tau < \tau' < \infty$. Очевидно, $\zeta_{\tau,\tau'}(x) = 0$ при $|x| > \tau'$, $D_x^\alpha \zeta_{\tau,\tau'}(x) = 0$ при $|x| < \tau$ $\forall \alpha$: $1 \leq |\alpha| \leq m$, а также

$$\left| D_x^\alpha \zeta_{\tau,\tau'}(x) \right| \leq \frac{a}{(\tau' - \tau)^{|\alpha|}}, \;\; a < \infty, \; |\alpha| \leq m. \tag{13}$$

Подставим в интегральное тождество (5) в качестве пробной функции $v(x,t) = u(x,t)\, g(t)\, \eta(x)$, $\eta(x) = \zeta_{\tau,\tau'}^{mp}(x)$. После простых преобразований с использованием условий (3), (4), оценок (13), неравенства Юнга с ε и интерполяционного неравенства (12) при $s = r = q = p$ в области $\Omega(\tau') \backslash \Omega(\tau)$ получаем

$$g(t) \int\limits_{\Omega_T(\tau')} u^2 \eta dx + \mu \int\limits_{G(\tau')} u^2 g \eta dx dt + 2d_1 \int\limits_{G(\tau')} \left| \nabla_x^m u \right|^p g \eta dx dt \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{K(\tau,\tau')} \left| \nabla_x^m u \right|^p g dx dt + \frac{\varepsilon^{-(p-1)} c_1}{\Delta_0^{mp}} \int\limits_{K(\tau,\tau')} |u|^p g dx dt \quad \forall \varepsilon > 0, \; c_1 < \infty, \tag{14}$$

где $K(\tau,\tau') = G(\tau') \backslash G(\tau)$, $\Delta_0 = \tau' - \tau$. Определив последовательность $\Delta_{j+1} = 2^{-1}\Delta_j$, $j = 0, 1, \ldots$, положим в (14) $\tau = \tau_0' - \Delta_j$, $\tau' = \tau_0' - \Delta_{j+1}$, и умножив на $(\tau' - \tau)^{mp} \equiv \equiv \Delta_{j+1}^{mp} \equiv 2^{-mp} \Delta_j^{mp}$, получим

$$g(T) A(\Delta_j) + \mu B(\Delta_j) + 2d_1 R(\Delta_j) \leq \varepsilon 2^{mp} R(\Delta_{j+1}) +$$

$$+ c_1 \varepsilon^{-(p-1)} 2^{mp} F(\Delta_{j+1}), \;\; j = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

где $A(\Delta_j) = \Delta_j^{mp} \int\limits_{\Omega_T(\tau' - \Delta_j)} u^2 dx$, $\quad B(\Delta_j) = \Delta_j^{mp} \int\limits_{G(\tau_0' - \Delta_j)} u^2 g dx dt$,

$$R(\Delta_j)=\Delta_j^{mp}\int\limits_{G(\tau_0'-\Delta_j)}\left|\nabla_x^m u\right|^p g\,dxdt,\qquad F(\Delta_j)=\int\limits_{K(\tau_0'-\Delta_{j-1},\tau_0'-\Delta_j)}|u|^p g\,dxdt\ .$$

Полагая $\varepsilon=2^{-mp}d_1$ и итерируя соотношение (15) по j от 0 до N, получаем

$$g(t)A(\Delta_0)+\mu B(\Delta_0)+2d_1R(\Delta_0)\le 2^{-N}2dR(\Delta_N)+$$
$$+c_2\sum_{i=1}^{N}2^{-i+1}F(\Delta_i),\ \ c_2=c_1 2^{mp}\varepsilon^{-(p-1)}\equiv c_1 2^{mp+mp(p-1)}d_1^{-(p-1)}.$$

Устремляя теперь $N\to\infty$ и учитывая, что $R(\Delta_N)\to 0$ при $\Delta_N\to 0$, окончательно имеем

$$g(T)\int\limits_{\Omega_T(\tau_0'-\Delta_0)}u^2dx+\mu\int\limits_{G(\tau_0'-\Delta_0)}u^2g\,dxdt+2d_1\int\limits_{G(\tau_0'-\Delta_0)}\left|\nabla_x^m u\right|^p g\,dxdt\le$$
$$\le 2c_2\Delta_0^{-mp}\int\limits_{K(\tau_0'-\Delta_0,\tau_0')}|u|^p g\,dxdt\quad \forall\Delta_0<\tau_0'. \tag{16}$$

Применим интерполяционное неравенство (12) к функции $u(x,t)$ при $s=q=$ $=p$, $r=2$, $j=0$ в области $\Omega_t(\tilde\tau)$, $\tilde\tau=\tau_0'-\Delta_0$, потом умножим на $g(t)$ и проинтегрируем по t:

$$J(\tilde\tau)\equiv\int\limits_{G(\tilde\tau)}|u|^p g\,dxdt\le K_1^p\tilde\tau^{-n\left(\frac{p-2}{2}\right)}\psi\left(\tilde\tau,\frac{p}{2}\right)+K_2^p\psi\left(\tilde\tau,\frac{p}{2}\right)^{1-\theta}\left(\int\limits_{G(\tilde\tau)}\left|\nabla_x^m u\right|^p g\,dxdt\right)^{\theta}.$$

Оценивая последний сомножитель справа с помощью неравенства (16), получаем

$$J(\tilde\tau)\le K_1^p\tilde\tau^{-n(p-2)/2}\psi\left(\tilde\tau,\frac{p}{2}\right)+K_2^p\psi\left(\tilde\tau,\frac{p}{2}\right)^{1-\theta}\frac{c_3}{\Delta_0^{mp\theta}}(J(\tau_0')-J(\tau_0'-\Delta_0))^{\theta}, \tag{17}$$

где $\theta=\dfrac{n(p-2)}{2mp+n(p-2)}$, $\psi(\tilde\tau,h)=\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega_t(\tilde\tau)}u^2dx\right)^h g\,dt$.

Теперь оценим функцию $\psi(\tilde\tau,p/2)$. Подставим в исходное интегральное тождество пробную функцию

$$v(x,t)=u(x,t)\eta(x)\chi_i(t);\ \ \eta(x)\equiv\zeta_{\tilde\tau,\tau_c}^{mp}(x),\ \tau_c=\tilde\tau+\frac{\Delta_0}{2}\equiv$$
$$\equiv\tau_0'-\frac{\Delta_0}{2},\ \chi_i(t)=\int\limits_0^t\left(\int\limits_{\Omega_s(\tau_c)}u^2(x,s)\eta(x)dx\right)^i g(s)ds,$$

i — натуральное. Легко заметить, что

$$\int\limits_{G(\tau_c)}u_t v\,dxdt=2^{-1}\Phi(\tau_c,i)\int\limits_{\Omega_T(\tau_c)}u^2\eta\,dx-2^{-1}\Phi(\tau_c,i+1),$$

где $\Phi(\tau_c,h)\equiv\int\limits_0^T\left(\int_{\Omega_s(\tau_c)}u^2\,\eta\,dx\right)^h g\,dt=\chi_h(T).$

Поэтому после указанной подстановки имеем

$$\Phi(\tau_c,i+1)=\Phi(\tau_c,i)\int\limits_{\Omega_T(\tau_c)}u^2\eta\,dxdt+\int\limits_{G(\tau_c)}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x,t,\ldots,\nabla_x^m u)D^\alpha v\,dxdt. \tag{18}$$

Второе слагаемое в правой части (18) стандартно с использованием интерполяционного неравенства (12) и основной оценки (16) при $\mu = 0$ оценивается сверху через

$$\Phi(\tau_c, i)\frac{c_3}{\Delta_0^{mp}} \int\limits_{K(\tau_0' - \Delta_0, \tau_0')} |u|^p \, dxdt \equiv \frac{c_3\Phi(\tau_c, i)}{\Delta_0^{mp}}(I(\tau_0') - I(\tau_0' - \Delta_0)).$$

Поэтому, еще раз применяя при оценке $\int_{\Omega_t(\tau_c)} u^2 dxdt$ сверху неравенство (16) с $\mu = 0$, из (18) получаем

$$\Phi(\tau_c, i+1) \le \frac{c_4\Phi(\tau_c, i)}{\Delta_0^{mp}}(I(\tau_0') - I(\tau_0' - \Delta_0)). \tag{19}$$

Отметим легко получаемую с помощью неравенства Гельдера оценку

$$\Phi\left(\tau_c, \frac{p}{2}\right) \le \left(\Phi\left(\tau_c, \left[\frac{p}{2}\right] + 1\right)\right)^{\theta_1} \left(\Phi\left(\tau_c, \left[\frac{p}{2}\right]\right)\right)^{1-\theta_1},$$

где $\theta_1 = p/2 - [p/2]$, $[h]$ — целая часть числа h. Комбинируя эту оценку и неравенство (19), находим

$$\psi(\tilde{\tau}, p/2) \le \Phi(\tau_c, p/2) \le c_5 \Delta_0^{-mp(p-2)/2} (I(\tau_0') - I(\tilde{\tau}))^{(p-2)/2} \Phi(\tau_c, 1).$$

Оценивая $\Phi(\tau_c, 1)$ с помощью (16), получаем

$$\psi(\tilde{\tau}, p/2) \le c_6 \mu^{-1} \Delta_0^{-mp^2/2} (I(\tau_0') - I(\tilde{\tau}))^{(p-2)/2} (J(\tau_0') - J(\tilde{\tau})). \tag{20}$$

Подставив эту оценку в (17), получаем необходимую оценку (6) с $D_1 = c_6 K_1^p$, $D_2 = c_3 c_6^{1-\theta} K_2^p$, $\tau_2 = \tau_0'$, $\tau_1 = \tilde{\tau}$. Тем самым теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Положим в неравенстве (6) $\mu = T^{-1}$, $\tau_2 = \tau$, $\tau_2 - \tau_1 = \Delta\tau \equiv T^{\alpha} I(\tau)^{\beta}$, где

$$\alpha = \frac{1-\theta}{mp\theta + \frac{mp^2}{2}(1-\theta)} \equiv \frac{2}{mp^2 + n(p-2)},$$

$$\beta = \frac{(1-\theta)(p-2)}{2mp\theta + mp^2(1-\theta)} \equiv \frac{p-2}{mp^2 + n(p-2)}.$$

При этом в силу неотрицательности $I(\tau)$ получаем соотношение

$$I(\tau - T^{\alpha} I(\tau)^{\beta}) \le eR[I(\tau) - I(\tau - T^{\alpha} I(\tau)^{\beta})], \tag{21}$$

где

$$R = D_2 + D_1(\tau - \Delta\tau)^{-n(p-2)/2} \Delta\tau^{mp\theta/(1-\theta)} \equiv$$
$$\equiv D_2 + D_1(\tau - \Delta\tau)^{-n(p-2)/2} T^{\alpha mp\theta/(1-\theta)} I(\tau)^{\beta pm\theta/(1-\theta)}.$$

Обозначим $\nu = 2eD_2/(1 + 2eD_2)$. Зафиксируем теперь произвольное $T < \infty$ и найдем столь большое $s < \infty$, чтобы выполнялось неравенство

$$D_1\left(\tau_0 + s - \frac{1}{1-\nu^{\beta}} T^{\alpha} I_{0,T}^{\beta}\right)^{-n(p-2)/2} T^{\alpha mp\theta/(1-\theta)} I_{0,T}^{\beta mp\theta/(1-\theta)} \le D_2. \tag{22}$$

Поскольку мы рассматриваем решение задачи (1), (2) с ограниченным интегралом энергии, то $I_{0,T} < \infty$. Поэтому при любом $T < \infty$ требуемое конечное s можно найти. Зафиксируем теперь точку $x_0 = (x_0', x_0^{(n)}) \in R^n$, $x_0' \in R^{n-1}$,

$x_0^{(n)} = -s$, и в качестве исходного семейства конечных подобластей, исчерпывающих Ω, будем иметь $\Omega'(\tau) = \Omega \cap \{x: |x - x_0| < \tau\}$. Очевидно, неравенство (21) остается справедливым для функции $I(\tau) = \int\limits_{\Omega'(\tau)\times(0,T)} |u|^p dxdt$ при всех $\tau < \tau_0 + s$; $I(\tau_0+s) \le I_0 \equiv \int\limits_{G\cap\{x:\, x_n<\tau_0\}} |u|^p dx\, dt < \infty$. Определим последовательность $\tau_{i+1} = \tau_i - \Delta\tau_i \equiv \tau_i - T^\alpha I(\tau_i)^\beta$, $i = 1, 2, \ldots$, $\tau_1 = \tau_0 + s + T^\alpha I(\tau_0 + s)^\beta$. Тогда соотношение (21) можно записать в виде

$$I(\tau_{i+1}) \le \nu I(\tau_i), \quad \nu_i = \frac{eR(\tau_i)}{1+eR(\tau_i)} < 1. \tag{23}$$

Покажем, что для всех номеров $i > 0$ $\nu_i \le \nu$ или

$$R(\tau_i) \le 2D_2. \tag{24}$$

Пусть это неравенство справедливо для $i \le j-1$. Покажем, что оно справедливо и для $i = j$:

$$R(\tau_j) = D_2 + D_1\left(\tau_j - T^\alpha I(\tau_j)^\beta\right)^{-n(p-2)/2} T^{\alpha m p\theta/(1-\theta)} I(\tau_j)^{\beta m p\theta/(1-\theta)}.$$

Из определения последовательности τ_i и неравенства (24) для $i \le j-1$ следует

$$\tau_j - T^\alpha I(\tau_j)^\beta = \tau_0 + s - \sum_{i=1}^{j} T^\alpha I(\tau_i)^\beta - T^\alpha I(\tau_0+s)^\beta \ge$$

$$\ge \tau_0 + s + T^\alpha I(\tau_0+s)^\beta \frac{(1-\nu^{\beta(j+1)})}{(1-\nu^\beta)} \ge \tau_0 + s - \frac{1}{1-\nu^\beta} T^\alpha I_0^\beta.$$

Отсюда в силу условия (22) на выбор s вытекает справедливость оценки (24) и при $i = j$. Следовательно, $\nu_i < \nu < 1 \quad \forall i > 0$. Тогда в силу леммы 1 из неравенства (23) следует $I(\tau) \equiv 0$ при $\tau < \tau' \equiv \tau_0 + s - \frac{1}{1-\nu^\beta} T^\alpha I(\tau_0+s)^\beta$, а это доказывает теорему 2.

Замечание 2. Предложенный метод изучения геометрических свойств решений уравнений вида (1) достаточно универсален. Во-первых, его использование позволяет получать эффекты, связанные с наличием в уравнении дополнительных нелинейностей: двойного вырождения старшей части уравнения, младших нелинейных слагаемых, учитывающих, например, абсорбцию. Во-вторых, этот метод применим при изучении аналогичных вопросов для других типов уравнений, например для квазилинейных дивергентных уравнений второго порядка по t вида

$$u_{tt} A_p^{(2m)} u_t + A_q^{(2m+2)} u + F(u, u_t) = 0,$$

где $A_p^{(2m)}$, $A_q^{(2m+2)}$ — квазилинейные эллиптические операторы порядков $2m$ и $2m+2$, $m \ge 1$.

1. *Акулов В.Ф., Шишков А.Е.* Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Мат.сб.– 1991. – **182**, №8.– С.1200–1210.
2. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption //Proc. Roy. Soc. Edinburgh.–1986.–**104**.–P.1–19.
3. *Bernis F.* Quaiitative prorerties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations.– IMA Prepr.184. Univ. of Minnesota, 1985.
4. *Мазья В.Г.* Пространства Соболева.– Л.: Изд–во Ленингр. ун–та, 1985.– 416с.

Получено 01.04.92