УДК 519.21

**В. В. Булдыгин**, д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т),
**Ю. В. Козаченко, Н. Н. Леоненко**, доктора физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

# О РАБОТАХ М. И. ЯДРЕНКО ПО ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Приведен обзор работ М. И. Ядренко по теории случайных полей на конечномерных и бесконечномерных пространствах.

Наведено огляд праць М. Й. Ядренка з теорії випадкових полів на скінченновимірних та нескінченновимірних просторах.

Интерес к теории случайных функций, зависящих от нескольких переменных (случайных полей), стимулируется, в основном, двумя причинами. С одной стороны, актуальные проблемы статистической радиофизики, статистической теории связи, статистической оптики, голографии, физики атмосферы, океанографии, статистической физики приводят к необходимости изучать случайные поля. С другой стороны, внутренняя логика теории случайных процессов естественно приводит к понятию случайного поля как обобщения случайного процесса. При этом многие проблемы теории случайных полей не имеют прямых аналогов в теории случайных процессов, поскольку параметрическое множество обладает иной геометрией, в нем действуют другие группы преобразований. Изучение случайных полей требует привлечения новых идей и методов, имеющих глубокую внутреннюю связь с такими классическими областями математики, как теория представлений групп, дифференциальные уравнения в частных производных, теория обобщенных функций и ряд других разделов современного анализа. Первоначальное становление и развитие теории случайных полей связано с именами П. Леви, А. М. Яглома, Н. Н. Ченцова, Р. Л. Добрушина, Ю. К. Беляева, А. М. Обухова и других ученых. В этом ряду особое место занимает научное творчество М. И. Ядренко, которым получен ряд основополагающих результатов, сыгравших важную роль в становлении теории случайных полей как математической дисциплины.

Остановимся на некоторых наиболее важных направлениях исследований М.И. Ядренко по теории случайных полей.

**1. Спектральная теория случайных полей.** М. И. Ядренко наряду с А.М.Ягломом по праву считается создателем спектральной теории случайных полей. Проблема ставится так: предполагая инвариантность первых двух моментов случайного поля относительно некоторой группы преобразований в пространстве параметров, нужно найти представление поля в виде ряда или стохастического интеграла по случайным мерам с ортогональными значениями. Уместно отметить, что спектральная теория случайных полей тесно связана с теорией представлений групп, теорией ортогональных функций, теорией положительно–определенных ядер.

В 1961 г. М. И. Ядренко [1] и А. М. Яглом получили следующий результат, вошедший в учебно–монографическую литературу по случайным полям: непрерывное в среднем квадратическом однородное изотропное поле допускает спектральное разложение

$$\xi(r, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} S_m^l(u) \int_0^{\infty} \mathcal{J}_{m+(n-2)/2}(\lambda r)(\lambda r)^{(2-n)/2} Z_m^l(d\lambda),$$

где $(r, u)$, $r > 0$, $u \in s_{n-1}(1)$ – сферические координаты точки $x \in R^n$, $s_{n-1}(1)$ — единичная сфера в $R^n$, $S_m^l(u)$, $u \in s_{n-1}(1)$ — действительные ортонормированные сферические гармоники степени $m$, $h(m, n)$ – число таких гармоник, $\mathcal{J}_\nu(z)$ –

бесселева функция первого рода, $Z_m^l(\cdot)$ – последовательность ортогональных случайных мер, подчиненных спектральной мере этого поля, которая участвует в представлении корреляционной функции этого поля, $c_n^2 = 2^{n-1}\Gamma(n/2)\pi^{n/2}$ — постоянная. Этот результат является дополнением к классической теореме Шенберга.

В 1959 г. М. И. Ядренко [2] ввел понятие изотропного случайного поля на сфере $s_{n-1}(1)$ в конечномерном евклидовом пространстве $R^n$, корреляционная функция которого зависит лишь от углового расстояния $\theta$ между точками $u_1$ и $u_2$ на сфере. Обобщая один результат Обухова для такого поля, он получил спектральное разложение вида

$$\xi(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \xi_m^l S_m^l(u), \, u \in s_{n-1}, \, n \geq 2, \tag{1}$$

где $\{\xi_m^l\}$ – последовательность случайных величин, подчиненных последовательности $\{b_m\}$, которая входит в спектральное разложение корреляционной функции этого поля

$$B(\cos\theta) = \left|s_{n-1}(1)\right|^{-1} \sum\nolimits_{m=0}^{\infty} b_m C_m^{(n-2)/2}(\cos\theta) h(m,n) \big/ C_m^{(n-2)/2}(1),$$

где $\sum_{m=0}^{\infty} b_m \, h(m,n) < \infty$, $C_m^{\nu}(y)$ — многочлены Гегенбауэра.

В работе [3] М. И. Ядренко ввел понятие изотропного поля в конечномерном пространстве, корреляционная функция которого инвариантна относительно группы $SO(n)$. Им найдено спектральное разложение такого поля и его корреляционной функции, превращающегося в представление (1), если дополнительно предположить инвариантность относительно группы сдвигов в $R^n$. Эти представления играют существенную роль при доказательстве эргодической теоремы для изотропных полей [4].

Наряду с конечномерным случаем, М. И. Ядренко впервые нашел спектральное разложение изотропного поля на сфере $s_\infty$ в гильбертовом пространстве, а также однородного изотропного поля на всем гильбертовом пространстве. Эти результаты также являются вкладом в круг идей, связаных с теоремой Шенберга об общем виде инвариантных положительно–определенных ядер на гильбертовом пространстве.

Спектральные представления, полученные М.И. Ядренко, сыграли существенную роль при моделировании случайных полей [5] и изучении вопросов, связанных с принципом инвариантности [6].

**2. Свойство "марковости" для случайных полей.** В 1958–1960 гг. М.И. Ядренко начал изучение полей, обладающих определенным свойством "марковости" [7]. Пусть $\mathfrak{M}$ – множество жордановых достаточно гладких поверхностей $\partial D$, каждая из которых делит $R^n$ на две части: $D^-$, лежащую "внутри" $\partial D$, и $D^+$, лежащую "вне" $\partial D$. М. И. Ядренко изучает поля $\xi(x)$, $x \in R^n$, которые являются марковскими относительно $\mathfrak{M}$ в том смысле, что для любой поверхности $\partial D$ из $\mathfrak{M}$ и любых $x_1 \in D^-$ и $x_2 \in D^+$ случайные величины $\xi(x_1)$ и $\xi(x_2)$ независимы при известных значениях $\xi(x)$ на $\partial D$. Для гауссовских однородных изотропных полей М.И. Ядренко находит необходимые условия марковости относительно семейства $\mathfrak{M}$ поверхностей, содержащего все концентрические сферы. Эти условия состоят в следующем: 1) корреляционная функция поля имеет вид $B(r) = Y_n(cr)$, $Y_n(z)$ – сферическая бесселева функция; 2) с вероятностью 1 выборочные функции поля являются целыми функциями экспоненциального типа с показателем не выше $c$ и удовлетворяют уравнению $\Delta u + c^2 u = 0$, где $\Delta$ – оператор Лапласа в $R^n$; 3) поле допускает некоторое специальное спектральное разложение по винеровской мере на сфере. Исходя из этих условий, М. И. Ядренко доказал, что если для любой поверхности $\partial D \in \mathfrak{M}$ число $c^2$ не является собственным значением внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа, то поле с корреляционной функцией $B(r) = Y_n(cr)$ является полем марковского типа. При задании значений поля $\xi(x)$ на $\partial D \in \mathfrak{M}$ значения поля внутри $\partial D$ однозначно восстанавливаются. Отсюда вытекает, например, что если $\mathfrak{M}_c$ — семейство концентрических сфер, а $\xi(x)$ — гауссовское однородное изотропное марковское поле, то $\xi(x) \equiv \equiv \xi$, где $\xi$ — некоторая случайная величина, т.е. в этом классе марковским свойством обладают лишь случайные константы. М.И. Ядренко изучены и другие тонкие свойства, связанные с "вырожденностью" марковских однородных изотропных гауссовских полей. Эти результаты получили большой научный резонанс и привели к возникновению нового направления, связанного с обобщениями понятия марковости для случайных полей.

**3. Статистические задачи для однородных изотропных случайных полей.** М. И. Ядренко разработал эффективные методы решения статистических задач дла случайных полей: задач экстраполяции, фильтрации, интерполяции, оценивания коэффициентов регрессии.

Задача линейной экстраполяции ставится следующим образом [8]. Пусть $\xi(x)$ наблюдается на сфере $s_{n-1}(r) \subset R^n$ радиуса $r > 0$. Требуется отыскать $\xi(y)$ в точке $y \overline{\in} s_{n-1}(r)$. М.И. Ядренко указано явное решение этой задачи и найдена формула для среднеквадратической ошибки экстраполяции. Справедлива теорема: поле $\xi(x)$ безошибочно восстанавливается по наблюдениям на сфере $s_{n-1}(r)$ тогда и только тогда, когда его спектральная функция ступенчатая, а ее точки скачков $\lambda_i$ удовлетворяют уравнению $\lambda^{(2-n)/2} \mathcal{J}_{(n-2)/2}(\lambda r) = c$, где $c$ — некоторая постоянная.

Задача линейной фильтрации М. И. Ядренко решена в следующей постановке: пусть $(\xi(x), \gamma(x))$ — двухмерное однородное изотропное поле на $R^n$, и на сфере $s_{n-1}(r)$ наблюдается поле $\xi(x)$. Найти оптимальную (в среднем квадратическом) оценку $\hat{\gamma}(y)$ значения поля $\gamma(y)$ и дисперсию этой оценки.

М.И. Ядренко рассматривает задачу экстраполяции случайного поля $\xi(x)$ по наблюдениям на счетной системе концентрических сфер с радиусами $0 < r_1 < \ldots < r_m < \ldots$ Он доказал, что для полей с ограниченным спектром можно указать такую счетную систему концентрических сфер, по наблюдениям на которой поле восстанавливается безошибочно. Найден аналог формулы Котельникова–Шеннона для случайных полей с ограниченным спектром. Этот результат важен для приложения случайных полей в статистической теории связи.

М. И. Ядренко изучены оптимальные оценки коэффициентов регрессии и среднего случайного поля, наблюдаемого на сфере. Задача регрессии для полей на сфере имеет свою специфику. В этой ситуации результаты не являются прямым обобщением соответствующих результатов для случайных процессов, полученных Гренандером, Розенблаттом, Розановым, Холево. Проиллюстрируем это таким утверждением, доказанным М.И. Ядренко: среднее по сфере является оптимальной оценкой неизвестного математического ожидания случайного поля. В то же время известно, что оценки наименьших квадратов коэффициентов регрессии случайных процессов не всегда оптимальны.

Выделим работы М.И. Ядренко об интегральных уравнениях статистики однородных изотропных случайных полей [9]. Известно, что многие линейные статистические задачи для процессов и полей могут быть сведены к решению интегральных уравнений Фредгольма первого и второго рода. Для случайных полей такие интегральные уравнения содержат кратные интегралы и решать их затруднительно. Используя спектральную теорию случайных полей, М.И. Ядренко сводит эти уравнения к одномерным, что позволяет эффективно их решать и вместе с тем получать решения соответствующих задач интерполяции, фильтрации, оценивания коэффициентов регрессии, проверки статистических гипотез.

**4. Аналитические свойства выборочных функций случайных полей.** М.И. Ядренко одним из первых занялся изучением аналитических свойств случайных полей. К 1963 г., когда опубликованы его первые результаты в этой области [9], были известны лишь основополагающие работы А.Н. Колмогорова, Г. Ханта, Ю.К .Беляева, посвященные исследованиям локальных свойств случайных полей.

В работах [9-11] впервые получены теоремы, содержащие общие условия выборочной непрерывности с вероятностью единица случайных полей, а также найдены модули непрерывности этих полей. В частности, М.И. Ядренко принадлежит такой результат. Пусть $\{r_k\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел $r_k \geq 1$, $h_m = (r_1 \cdot \ldots \cdot r_m)^{-1}$, $\xi(x)$ — сепарабельное случайное поле на $[0, 1]^n$ и

$$\sup_{|\tilde{h}_i| \leq h, i=1,\ldots,n} P\left\{ \left| \xi(x+\tilde{h}) - \xi(x) \right| \geq g(h) \right\} \leq q(h),$$

где $g(h)$, $q(h)$ – четные неубывающие функции на $(0, +\infty)$ такие, что

$$\sum\nolimits_{m=1}^{\infty} g(h_m) < \infty, \ \sum\nolimits_{m=1}^{\infty} h_{m+1}^{-n} q(h_m) < \infty .$$

Тогда с вероятностью единица существует случайная величина $H(\omega)$ такая, что $P\{H(\omega) > 0\} = 1$ и при $|\tilde{h}_i| \leq h \leq H(\omega)$

$$|\xi(x+\tilde{h}) - \xi(x)| \leq \varphi(h),$$

где

$$\varphi(h) = 2\sum\nolimits_{m=1}^{\infty} g(h_m),$$

а $N$ определяется из соотношения $h_N \leq h < h_{N-1}$. Из этого утверждения получены близкие к необходимым условия выборочной непрерывности с вероятностью единица гауссовских случайных полей.

В работе [12] подробно исследованы локальные свойства однородных и изотропных случайных полей в $R^n$ и на сфере в $R^n$. Получены условия равномерной сходимости с вероятностью единица их спектральных представлений.

Доказано, что если $\xi(x)$ – сепарабельное однородное и изотропное гауссовское случайное поле в $R^n$, $M\xi(x) \equiv 0$, $\Phi(\lambda)$ — спектральная функция поля $\xi(x)$ и при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется условие $\int_0^\infty \ln^{1+\varepsilon}(1+\lambda) d\Phi(\lambda) < \infty$, то с вероятностью единица случайное поле $\xi(x)$ непрерывно в любой замкнутой ограниченной области, при этом ряд, фигурирующий в спектральном представлении поля, сходится с вероятностью единица равномерно в любой замкнутой ограниченной области.

В работе [13] М.И. Ядренко впервые исследовал условия выборочной непрерывности гауссовских случайных полей на компактах в гльбертовом пространстве, в работе [14] исследованы аналитические случайные поля.

**5. Абсолютная непрерывность и ортогональность мер, порожденных однородными и изотропными случайными полями.** Проблемы абсолютной непрерывности и ортогональности гауссовских мер в гильбертовых и более общих функциональных пространствах играют важную роль в теории гауссовских мер и в статистике случайных процессов и полей. Эти задачи изучались в работах Л. Гросса, Я. Гаека, И. Фельдмана, Ю.Розанова, А. В. Скорохода. Существующие общие условия абсолютной непрерывности или ортогональности гауссовских мер в полной мере используют тонкие свойства их ковариационных операторов. Однако, во многих ситуациях эти условия весьма сложны для конструктивной проверки. Кроме того, для конкретных классов мер, порожденных случайными процессами и полями, желательными являются условия, выраженные в их естественных характеристиках.

Решению задач, связанных с абсолютной непрерывностью и ортогональностью мер, порожденных однородными и изотропными гауссовскими случайными полями, посвящена серия работ М. И. Ядренко [15–18]. Опираясь на развитую им спектральную теорию случайных полей, М. И. Ядренко устанавливает условия абсолютной непрерывности и ортогональности, непосредственно связанные со спектральными характеристиками изучаемых полей.

Пусть $\eta_1 = \{\eta_1(x), x \in D\}$ — однородное центрированное гауссовское поле; $D$ — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$; $L_2(D)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций; $\mu_1$ — гауссовское распределение в $L_2(D)$, порожденное полем $\eta_1$. Для $\{a(x), x \in D\} \in L_2(D)$ рассмотрим поле $\eta_2(x) = \eta_1(x) + a(x)$. Пусть $\mu_2$ — распределение поля $\eta_2$ в $L_2(D)$. Предполагая существование ограниченной спектральной плотности $f(\lambda)$ у поля $\eta_1$, М.И. Ядренко показывает, что меры $\mu_1$ и $\mu_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $a(x), x \in D$, допускает продолжение $a_\infty(x), x \in \mathbb{R}^n$, преобразование Фурье которого удовлетворяет соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{a}(\lambda)|^2 (f(\lambda))^{-1} d\lambda < \infty.$$

В случае $D = \mathbb{R}^n$ это утверждение остается в силе и дает просто проверяемый критерий допустимости сдвига $a(x), x \in \mathbb{R}^n$.

При дополнительном предположении о порядке убывания спектральной плотности

$$f(\lambda) \asymp f(\lambda) \succ\!\prec \left(1 + \|\lambda\|^2\right)^{-l},$$

$l$ — натуральное число, $l > n/2$, показывается, что $\mu_1 \sim \mu_2$ тогда и только тогда, когда $(a(x), x \in D)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^l(D)$.

Если поле $\eta_1$ является однородным и изотропным и $D = s_{n-1}(r)$ — сфера радиуса $r$, то, используя установленное им спектральное представление для однородного и изотропного случайного поля, М.И. Ядренко доказал, что $\mu_1 \sim \mu_2$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{h(m,n)} \left| a_m^l(r) \right|^2 (b_m(r))^{-1} < \infty,$$

где $\{a_m^l(r)\}$ – коэффициенты Фурье функции $a(x) = a(r, u)$, $u \in s_{n-1}(r)$ по системе сферических гармоник $\left\{S_m^l\right\}$,

$$b_m(r) = \int_0^\infty \mathcal{J}^2_{m+(n-2)/2}(\lambda r)(\lambda r)^{-n+2}\, d\Phi(\lambda),$$

$\Phi(\lambda)$ — изотропная спектральная мера. Вид найденной плотности Радона–Никодима $d\mu_2 / d\mu_1$ позволил сделать заключение о том, что оценка максимального правдоподобия для $a(r, u) = a(r)$, если $\xi(r, u)$ наблюдается на сфере $s_{n-1}(r)$, совпадает со средним по сфере.

Исследован также случай $D = V_R$ — шар радиуса $R$.

Кратко остановившись на некоторых условиях абсолютной непрерывности для гауссовских полей, отличающихся лишь средним значением, подчеркнем, что в работах М.И.Ядренко детально изучены условия абсолютной непрерывности и ортогональности гауссовских мер, соответствующих случайным полям с различными корреляционными функциями.

Выше отмечены основные направления исследований в области теории случайных полей. Многие оригинальные результаты отражены М. И. Ядренко в его монографии [19], переизданной в США [20].


1. *Ядренко М. И.* Некоторые вопросы теории случайных полей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат наук.–Киев, 1961.–16 с.
2. *Ядренко М. Й.* Про ізотропні поля марковського типу на сфері // Допов. АН УРСР. Сер. А. –1959.–№ 1.–С.231–236.
3. *Ядренко М. И.* Об экстраполяции изотропных (не обязательно однородных) случайных полей // Теория вероятностей и мат. статистика.–1970.–**15,** вып. **1**.–С.240–248.
4. *Ядренко М. И.* Эргодические теоремы для изотропных случайных полей // Там же.– 1970.– Вып.2.–С.249–252.
5. *Ядренко М. И., Леоненко Н .Н.* Предельные теоремы для однородных и изотропных случайных полей // Там же.–1979.–**24,** вып. 21.–С.97–109.
6. *Ядренко М. И., Леоненко Н .Н.* О принципе инвариантности для однородных изотропных случайных полей // Теория вероятностей и ее применения.–1979.–**24**, вып.1.–С.175–181.
7. *Ядренко М. И.* Изотропные случайные поля марковского типа в евклидовом и гильбертовом пространстве // Тр. Всесоюз. совещ. по теории вероятностей и мат. статистике.–Ереван: Изд–во АН АрмССР, 1960.–С.263–279.
8. *Ядренко М. И., Попов Ю. Д.* Некоторые вопросы спектральной теории однородных и изотропных случайных полей // Теория вероятностей и ее применения.–1969.–**14**, вып.4.–С.531–549.
9. *Ядренко М. И.* О непрерывности выборочных функций случайных полей // Тез. докл. на VII Всесоюз. совещ. по теории вероятностей.–Тбилиси: Мецниереба, 1963.–С.41–44.
10. *Ядренко М. И.* Об оптимальных линейных оценках математического ожидания и коэффициентов регрессии изотропных случайных полей // Докл. АН СССР.–1973.–№6.– С.1303–1306.
11. *Ядренко М. Й.* Локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів // Вісн. Київ. ун–ту. Сер. математики та механіки.–1967.–№ 9.–С.103–112.
12. *Ядренко М. И., Козаченко Ю.В.* Локальные свойства выборочных функций случайных полей //Теория вероятностей и мат. статистика.–1967.–Ч.1.–Вып. 14.–С.53–66; Вып. 15.– С.82–98.
13. *Ядренко М. Й.* Про неперервність випадкового поля на гільбертовому просторі // Допов. АН УРСР. Сер.А.–1968.–**8**.–С.734–786.
14. *Ядренко М. Й.* Аналітичні випадкові поля // Вісн. Київ. ун–ту. Сер. математики та механіки.–1969.–№ 11.–С.53–56.
15. *Ядренко М. И.* Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих однородным и изотропным случайным полям // Теория вероятностей и мат. статистика.–1972.–Вып.7.– С.152–161.
16. *Скороход А. В., Ядренко М. И.* Об абсолютной непрерывности гауссовских мер, соответствующих однородным случайным полям // Теория вероятностей и ее применения.– 1973.– **18**, вып.1.– С.30–43.
17. *Ядренко М. И.* Об ортогональности мер, соответствующих гауссовским однородным случайным полям // Теория случайных процессов.–1973.–Вып.2.–С.131–135.
18. *Ядренко М. И.* Задача о различении гипотез для изотропных случайных полей // Кибернетика.–1973.–№ 5.–С.67–71.
19. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей.–Киев: Вища шк., 1980.–206 с.
20. *Yadrenko M. I.* Spectral theory of Random Fields.–New York: Optimization Software Inc., 1983.– 224p.


Получено 22. 06. 92