УДК 517.949.2

А. Ашыралыев. канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПАДЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

Исследуются разностные схемы Паде приближенного решения задачи Коши для параболических уравнений, порожденные дробями Паде $R_{j,l}$ аппроксимации экспоненты. Устанавливаются оценки коэрцитивности разностних схем при $j = l-2, l-1$ или четных $j = l$ в разностном аналоге $C_0^\alpha(E)$ пространства Гельдера с весом и при нечетных $j = l$ в более узком пространстве чем пространства $C_0^\alpha(E)$.

Досліджуються різницеві схеми Паде наближеного розв'язку задачі Коші для параболічних рівнянь, породжених дробами Паде $R_{j,l}$ апроксимації експоненти. Установлюються оцінки коерцитивності різницевих схем при $j = l-2, l-1$ або парних $j = l$ в різницевому аналогові $C_0^\alpha(E)$ простору Гельдера з вагою і при непарних $j = l$ в більш вузькому просторі, ніж простір $C_0^\alpha(E)$.

В работах [1–6] исследовалась устойчивость (корректность) и сходимость разностных схем Паде приближенного решения задачи Коши

$$v'(t) + A\,v(t) = f(t),\ 0 \le t \le 1,\ v(0) = v_0 \tag{1}$$

для дифференциального уравнения в банаховом пространстве E с неограниченным сильно позитивным оператором A. Эти разностные схемы строятся с помощью дробей Паде $R_{j,l}$ аппроксимации экспоненты. К задаче (1), как известно [7], могут быть сведены различные краевые задачи для параболических уравнений.

Важным видом устойчивости является коэрцитивная устойчивость (корректная разрешимость) разностных схем. Такая устойчивость в отличие от других видов устойчивости позволяет устанавливать двусторонние оценки быстроты стремления к нулю погрешности решения разностных схем. Коэрцитивная устойчивость разностной схемы Роте, по–видимому, впервые исследована в [8] для первой краевой задачи для параболических уравнений второго порядка в L_2. Затем появились работы [9–11], посвященные коэрцитивной устойчивости простейших разностных схем приближенного решения начально–краевых задач для различных параболических уравнений.

В работе [12] разностные схемы трактуются как операторные уравнения в банаховых пространствах и к исследованию разностных схем привлекается теория аналитических полугрупп. Установлены неравенства коэрцитивности разностной схемы Роте в $c_0^\alpha(E)$–разностном аналоге пространства Гельдера с весом t^α. Привлечение теории аналитических полугрупп операторов оказалось эффективным при исследовании этих и других простейших разностных схем в разностных аналогах пространств Гельдера и Бохнера [13–18].

В настоящей статье результаты работ [12, 16–18] переносятся на широкий класс разностных схем Паде, порожденных дробями Паде аппроксимации экспоненты. Устанавливаются оценки устойчивости и коэрцитивности разностных схем Паде при $j = l-2, l-1$ или четных $j = l$ в $c_0^\alpha(E)$ и при нечетных $j = l$ в более узком пространстве чем пространство $c_0^\alpha(E)$.

1. Сильно позитивные операторы. Пусть E — произвольное банахово пространство и A — действующий в E линейный оператор с областью определения $D(A)$.

Определение 1. *Оператор A называется сильно позитивным, если его* *спектр* $\sigma(A)$ *находится внутри симметричного относительно положительной полуоси угла* $L(\varphi)$ *раствора* $0 < 2\varphi < \pi$, *а на сторонах* $S_1 = \{\rho \exp(i\varphi), 0 \le \rho < \infty\}$ *и* $S_2 = \{\rho \exp(-i\varphi), 0 \le \rho < \infty\}$ *этого угла и вне его для резольвенты* $(\lambda - A)^{-1}$ *оператора* A *справедлива оценка*

$$\left\| (\lambda - A)^{-1} \right\|_{E \to E} \le \frac{M(\varphi)}{1 + |\lambda|}. \tag{2}$$

Нижняя грань таких углов φ *называется спектральным углом сильно позитивного оператора и обозначается* $\varphi(A) = \varphi(A, E)$.

Для любой аналитической внутри $L(\varphi)$ функции $f(z)$, непрерывной на $L(\varphi)$, модуль которой достаточно быстро стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$, определен ограниченный оператор $f(A)$ и справедлива формула Коши – Риса

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cup S_2} f(z)(z - A)^{-1}\, dz. \tag{3}$$

Так определены операторы $\exp\{-tA\}$, $t > 0$, образующие аналитическую полугруппу операторов с производящим оператором $-A$ и с экспоненциально убывающей нормой [7].

2. Разностные схемы Паде. Известно [7], что задача Коши (1) имеет единственное решение

$$v(t) = \exp\{-tA\} v_0 + \int_0^t \exp\{-(t - s)A\} f(s)\, ds, \tag{4}$$

если $v_0 \in D(A)$ и $f'(t)$ непрерывна. На отрезке $[0, 1]$ введем равномерную сетку $[0, 1]_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \ldots, N; N\tau = 1\}$ с шагом $\tau > 0$. Воспользовавшись формулой (4), получим следующее соотношение между $v(t_k)$ и $v(t_{k-1})$:

$$v(t_k) = \exp\{-\tau A\} v(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp\{-(t_k - s)A\} f(s)\, ds. \tag{5}$$

Отсюда следует равенство

$$\tau^{-1}(v(t_k) - v(t_{k-1})) + \tau^{-1}(I - \exp\{-\tau A\}) v(t_{k-1}) = \varphi_k, \tag{6}$$

$$\varphi_k = \tau^{-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \exp\{-(t_k - s)A\} f(s)\, ds.$$

Заменив оператор $\exp\{-\tau A\}$ приближением Паде $R_{j,l}(\tau A)$, а элементы φ_k близкими (более простыми) элементами $\varphi_k^{j,l}$, удовлетворяющими оценке

$$\| \varphi_k - \varphi_k^{j,l} \|_E \le M\tau^{j+l}, \tag{7}$$

получим разностные схемы Паде

$$\tau^{-1}(u_k - u_{k-1}) + \tau^{-1}(I - R_{j,l}(\tau A)) u_{k-1} = \varphi_k^{j,l}, \quad 1 \le k \le N, \quad u_0 = v_0. \tag{8}$$

Здесь [19]

$$R_{j,l}(z) = \frac{P_{j,l}(z)}{Q_{j,l}(z)}, \quad P_{j,l}(z) = \sum_{r=0}^{j} \frac{(j + l - r)!\, j!\, (-z)^r}{(j + l)!\, r!\, (j - r)!}, \quad Q_{j,l}(z) = \sum_{r=0}^{l} \frac{(j + l - r)!\, l!\, z^r}{(j + l)!\, r!\, (l - r)!}.$$

Известно [19], что при $l-4 \le j \le l$ корни многочлена $Q_{j,l}(z)$ лежат в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Следовательно, $R_{j,l}(z)$ имеет все свои полюсы в открытой левой полуплоскости. Отсюда и из сильной позитивности оператора A следует существование оператора $[Q_{j,l}(\tau A)]^{-1}$ и его равномерная по τ ограниченность в E. Более того, равномерно по τ ограничены операторы $(\tau A)^k[Q_{j,l}(\tau A)]^{-1}$ при $k=0, 1, \ldots, l$. Следовательно, равномерно по τ ограничен оператор $R_{j,l}(\tau A)$ при $l-4 \le j \le l$. Поэтому при любых $\varphi_k^{j,l}$, $1 \le k \le N$, и u_0 решение разностных схем (8) u_k, $1 \le k \le N$, существует и справедлива формула

$$u_k = R_{j,l}^k(\tau A) + u_0 + \sum_{r=1}^{k} R_{j,l}^{k-r}(\tau A)\varphi_r^{j,l}\tau. \tag{9}$$

Оператор $R_{j,l}(\tau A)$, определяющий разностную схему, принято называть оператором шага. Отметим, что при построении таких разностных схем важно уметь строить правую часть $\varphi_k^{j,l}$, которая удовлетворяла бы оценке (7) и была бы достаточно простой. Выбор $\varphi_k^{j,l}$ не единствен. В работе [2] показано, что $\varphi_k^{j,l}$ можно определить формулой

$$\varphi_k^{j,l} = \sum_{r=0}^{j+l-1} \vartheta_r f^{(r)}(t_{k-1}) \quad \vartheta_0 = (\tau A)^{-1}(I - R_{j,l}(\tau A)),$$

$$\vartheta_r = (-A)^{-r}\vartheta_0 + \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} A^{-(r-i+1)}\tau^{i-1} / i!, \ 1 \le r \le j+l-1,$$

если функция $f(t)$ имеет $(j+l)$ непрерывную производную, причем $f^{(r)}(t) \in$ $\in D(A^{j+l-r})$ при всех $0 \le r \le j+l$.

Разностные схемы (8) можно рассматривать как операторное уравнение

$$D_\tau \Pi(u_0)u^\tau + A_{j,l}u^\tau = \varphi_{j,l}^\tau \tag{10}$$

в линейном пространстве $E(\tau)$ векторов $\psi^\tau = \{\psi_k\}_1^N$ с компонентами из E. Здесь оператор D_τ действует из пространства $E \times E(\tau)$ векторов $u = (u_0, u_1, \ldots$ $\ldots, u_N)$ в пространство $E(\tau)$ векторов $v = (v_1, \ldots, v_N)$ согласно формуле

$$v = D_\tau u, \ v_k = \tau^{-1}(u_k - u_{k-1}), k = 1, \ldots, N;$$

оператор $A_{j,l}$ действует из пространства $E(\tau)$ векторов $u = (u_0, \ldots, u_{N-1})$ в пространство $E(\tau)$ векторов $v = (v_1, \ldots, v_N)$ согласно формуле

$$v = A_{j,l}u, \ v_k = \tau^{-1}(I - R_{j,l}(\tau A))\, u_{k-1}, \ 1 \le k \le N;$$

оператор продолжения $\Pi(u_0)$ действует из $E(\tau)$ в пространство $E \times E(\tau)$ по формуле

$$\Pi(u_0)\,(u_1, \ldots, u_N) = (u_0, u_1, \ldots, u_N).$$

Если в $E(\tau)$ ввести нормы

$$\|\psi^\tau\|_{C(\tau,E)} = \max_{1 \le k \le N} \|\psi_k\|_E,$$

$$\sum_{r=0}^{j+l-1} \|\psi^\tau\|_{C_0^\alpha(\tau,E)} = \|\psi^\tau\|_{C(\tau,E)} + \max_{1 \le k < k+r \le N} \frac{k^\alpha \|\psi_{k+r} - \psi_k\|_E}{r^\alpha},$$

то оно превратится в соответственно банаховы пространства $C(\tau, E)$ и $C_0^\alpha(\tau, E)$.
Из формулы (9) следует, что u^τ определяет аддитивный и однородный оператор $u^\tau(\varphi_{j,l}^\tau, u_0)$, действующий из $E(\tau) \times E$ в $E(\tau)$. Разностные схемы (8) называются корректной (устойчивой) схемой в пространстве $E(\tau)$, если оператор $u^\tau(\varphi_{j,l}^\tau, u_0)$ непрерывен. Так как оператор $u^\tau(\varphi_{j,l}^\tau, u_0)$ аддитивен и однороден, то корректность разностных схем (8) эквивалентна выполнению неравенства

$$\left\| u^\tau(\varphi_{j,l}^\tau, u_o) \right\|_{E(\tau)} \le M\left[\| u_0 \|_E + \left\| \varphi_{j,l}^\tau \right\|_{E(\tau)}\right],$$

где M не зависит от u_0 и $\varphi_{j,l}^\tau$, но, вообще говоря, зависит от τ.

При исследовании разностных схем изучаются не отдельные схемы при фиксированном τ, а совокупность таких схем при всех $0 < \tau \le \tau_0$. Следуя [13], рассмотрим линейное пространство $\varepsilon(E)$ векторов $\psi = \{\psi^\tau\}$, $0 < \tau \le \tau_0$, с бесконечным числом компонент; вся совокупность схем (8) порождает операторную задачу в $\varepsilon(E)$. Для этого определим действующие в $\varepsilon(E)$ операторы $\overline{D}$, $\overline{\Pi}$ и $\overline{A}_{j,l}$ покомпонентно по операторам $D(\tau)$, Π и $A_{j,l}$ соответственно и придем к операторному уравнению

$$\overline{D}\,\overline{\Pi}(u_0)u + \overline{A}_{j,l}u = \varphi_{j,l} \tag{11}$$

в векторном пространстве $\varepsilon(E)$. Его решение $u = \{u^\tau\}$ определяется совокупностью формул (9). Определим для элементов $\psi \in \varepsilon(E)$ нормы

$$\| \psi \|_{\mathfrak{C}(E)} = \| \psi \|_{C(\varepsilon)} = \sup_{0<\tau\le\tau_0} \left\| \psi^\tau \right\|_{C(\tau, E)},$$

$$\| \psi \|_{C_0^\alpha(E)} = \| \psi \|_{C_0^\alpha(\varepsilon)} = \sup_{0<\tau\le\tau_0} \left\| \psi^\tau \right\|_{C_0^\alpha(\tau, E)}.$$

В отличие от случая фиксированного τ эти пространства не совпадают: справедливы строгие вложения $C_0^\alpha(E) \subset \mathfrak{C}(E)$, причем операторы вложения непрерывны.

Очевидно, операторное уравнение (13) однозначно разрешимо при любых $u_0 \in E$ и $\varphi_{j,l} \in \varepsilon(E)$. Эта разрешимость, очевидно, эквивалентна однозначной разрешимости в $E(\tau)$ задачи (10). По формулам (9) определяется аддитивный и однородный оператор $u(\varphi_{j,l}, u_0)$, действующий из пространства $\varepsilon(E)$ в $\varepsilon(E)$.

Определение 2. *Будем говорить, что задача* (11) *корректна в банаховом пространстве* $\varepsilon(E)$, *если оператор* $u(\varphi_{j,l}, u_0)$ *как оператор из* $\varepsilon(E) \times E$ *в* $\varepsilon(E)$ *непрерывен.*

Так как $u(\varphi_{j,l}, u_0)$ – линейный оператор, то корректность задачи (11) в $\varepsilon(E)$ эквивалентна справедливости неравенства

$$\left\| u^\tau \right\|_{E(\tau)} \le M\left[\| u_0 \|_E + \left\| \varphi_{j,l}^\tau \right\|_{E(\tau)}\right]$$

с M, не зависящим не только от u_0 и $\varphi_{j,l}^\tau$, но и от τ.

Очевидно, для корректности задачи (11) в $\mathfrak{C}(E)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $k = 1, \ldots, N$ и $\tau > 0$ была справедлива оценка

$$\left\| R_{j,l}^{k}(\tau A) \right\|_{E\to E} \le M. \qquad (12)$$

В работах [1–6, 20] оценка (12) установлена для широкого класса разностных схем Паде в произвольном банаховом пространстве E.

Рассмотрим задачу (11) в пространстве $C_0^{\alpha}(E)$.

Теорема 1. *Для корректности разностной задачи* (11) *в* $C_0^{\alpha}(E)$ *необходимо и достаточно, чтобы были справедливы оценки* (12) *и*

$$\left\| R_{j,l}^{k}(\tau A) - R_{j,l}^{k+r}(\tau A) \right\|_{E\to E} \le M r^{\alpha} k^{-\alpha},\ 1 \le k < k+r \le N,\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Доказательство теоремы 1 в случае $j = 0$ и $l = 1$ проводилось в [13]. В общем случае оно проводится аналогично.

3. Корректная разрешимость разностных схем в $\mathfrak{C}(E)$. Здесь будем рассматривать уравнение (11) в банаховом пространстве $\mathfrak{C}(E)$. Элемент $u \in \mathfrak{C}(E)$ будет теперь называться решением (11), если элементы $\overline{D}\,\overline{\Pi}(u_0)u$ и $\overline{A}_{j,l}u$ принадлежат $\mathfrak{C}(E)$. Если задача (11) разрешима в $\mathfrak{C}(E)$, то, очевидно, $\varphi_{j,l} \in \mathfrak{C}(E)$.

Из определения решения в $\mathfrak{C}(E)$ следует, что нормы $\| A_{j,l}(u^{\tau})_1 \|_E = \| A_{j,l}u_1 \|_E$ равномерно по τ ограничены.

Поэтому необходимым условием существования в $\mathfrak{C}(E)$ решения задачи (11) является равномерная по τ ограниченность норм

$$\| \tau^{-1}(I - R_{j,l}(\tau A))R_{j,l}(\tau A)u_0 \|_E.$$

Вывести отсюда необходимое условие для u_0 в общем случае пока не удалось. Для такой ограниченности, очевидно, достаточно, чтобы $u_0 \in D(A)$. Будем считать это условие выполненным.

Определение 3. *Будем говорить, что задача* (11) *корректно разрешима (коэрцитивно устойчива) в* $\mathfrak{C}(E)$, *если выполнены следующие условия:*

1) *при любых* $u_0 \in D(A)$ *и* $\varphi_{j,l} \in \mathfrak{C}(E)$ *существует единственное ее решение в* $\mathfrak{C}(E)$;

2) *задача (11) корректна в* $\mathfrak{C}(E)$.

Как отмечалось выше, эта корректная разрешимость, очевидно, эквивалентна корректной разрешимости в $C(\tau, E)$ задачи (10) равномерно по τ, $0 < \tau \le \tau_0$. Методом работы [13] доказывается, что неравенство коэрцитивности

$$\left\| \overline{D}\,\overline{\Pi}(u_0)u \right\|_{\mathfrak{C}(E)} + \left\| \overline{A}_{j,l}u \right\|_{\mathfrak{C}(E)} \le M\,[\| Au_0 \|_E + \left\| \varphi_{j,l} \right\|_{\mathfrak{C}(E)}] \qquad (13)$$

является необходимым и достаточным условием корректной разрешимости в $\mathfrak{C}(E)$ корректной задачи (11). Неравенство (13) верно тогда и только тогда, когда справедливо неравенство

$$\| D_{\tau}\overline{\Pi}(u_0)u^{\tau} \|_{C(\tau,E)} + \left\| A_{j,l}u^{\tau} \right\|_{C(\tau,E)} \le M\left[\| Au_0 \|_E + \left\| \varphi_{j,l}^{\tau} \right\|_{C(\tau,E)} \right] \qquad (14)$$

с M, не зависящим от τ. Предельный переход в (14) приводит к неравенству коэрцитивности в $C(E)$–пространстве непрерывных функций $f(t)$ со значениями из E. Поэтому аналитичность полугруппы $\exp\{-tA\}$ является необходимым условием корректной разрешимости разностной задачи (11) в $\mathfrak{C}(E)$. Ниже предполагается, что $-A$ – производящий оператор аналитической полугруппы $\exp\{-tA\}$. Так как дифференциальная задача в общем случае не является корректно разрешимой в $\mathfrak{C}(E)$, то для разностных схем (8) не может выполняться неравенство коэрцитивности (14) с $M = M(\tau)$, не зависящим от τ. Это означает, что $M(\tau) \to \infty$ при $\tau \to 0$. Изучение задачи (11) позволяет выявить порядок стремления $M(\tau)$ к ∞.

Вначале рассмотрим разностные схемы (8), порожденные дробями Паде $R_{j,l}$ при $j = l-2, l-1$. Справедливы оценки [1, 2]

$$\left\| R_{j,l}^k(\tau A) \right\|_{E\to E} \le M, \quad \left\| A R_{j,l}^k(\tau A) \right\|_{E\to E} \le M / k\tau$$

для $1 \le k \le N, \tau = N^{-1}$, с M, не зависящим от τ. Эти оценки позволяют установить следующий результат.

Теорема 2. *Для решения задачи* (10) *справедливо почти коэрцитивное неравенство*

$$\left\| D\Pi(u_0)u^\tau \right\|_{C(\tau,E)} + \left\| A_{j,l}u^\tau \right\|_{C(\tau,E)} \le M\Big[\left\| Au_0 \right\|_E +$$

$$+ \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + \left| \ln \| A \|_{E\to E} \right| \right\} \left\| \varphi_{j,l}^\tau \right\|_{C(\tau,E)} \Big]$$

с M, *не зависящим от* τ *(и* A*). (Здесь* $\| A \|_{E\to E} = \infty$ *в случае дискретизации только по времени* [13].)

Доказательство теоремы 2 в случае $j = 0, l = 1$ проводилось в [13]. В общем случае оно проводится аналогично.

Перейдем теперь к рассмотрению разностной задачи (10), порожденной дробями Паде $R_{j,l}$. Оператор шага $R_{j,l}(\tau A)$ обладает "худшими" свойствами по сравнению с оператором шага $R_{l-2,l}(\tau A)$ и $R_{l-1,l}(\tau A)$. Справедливы оценки [1, 2]

$$\left\| R_{l,l}^k(\tau A)(I+\tau A)^{-1} \right\|_{E\to E} \le M, \tag{15}$$

$$\left\| A R_{l,l}^k(\tau A)(I+\tau A)^{-2} \right\|_{E\to E} \le \frac{M}{k\tau} \tag{16}$$

для $1 \le k \le N$ с M, не зависящим от τ. Эти оценки позволяют установить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_k^{l,l} \in D(A)$, $1 \le k \le N$. *Тогда для решений задачи* (10) *справедливо неравенство*

$$\left\| D\Pi(u_0)u^\tau \right\|_{C(\tau,E)} + \left\| A_{l,l}u^\tau \right\|_{C(\tau,E)} \le M\Big[\left\| Au_0 \right\|_E +$$

$$+ \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + \left| \ln \| A \|_{E\to E} \right| \right\} \left\| (I+\tau A)\varphi_{l,l}^\tau \right\|_{C(\tau,E)} \Big] \tag{17}$$

с M, *не зависящим от* τ *(и* A*).*

Доказательство теоремы 3 в случае $l = 1$ проводилось в [16]. В общем случае оно проводится аналогично. Неравенство (17) — это более слабое неравенство, чем неравенства в теореме 2. Однако получение таких неравенств важно для приложения. Обозначим через ν^τ вектор аппроксимации. Тогда

$$\| (I+\tau A)\nu^\tau \|_{C(\tau; E)} \sim \| \nu^\tau \|_{C(\tau, E)} \sim O(\tau^{j+l}),$$

если предположить, что $\| \tau A \nu^\tau \|_{C(\tau, E)}$ стремится к нулю при $\tau \to 0$ не медленнее, чем $\| \nu^\tau \|_{C(\tau, E)}$. Это будет иметь место в приложениях при дополнительных ограничениях на гладкость данных по пространственным переменным.

4. Случай общего пространства $C_0^\alpha(E)$. В [13] показано, что аналитичность полугруппы $\exp\{-tA\}$ является необходимым и достаточным условием корректной разрешимости простейшей разностной задачи (11) при $j = 0$ и $l = 1$, если пространство $\mathfrak{C}(E)$ определенным образом сузить или расширить. Оказывается, такой факт справедлив для широкого класса разностных схем Паде.

Решение u задачи (11) называется решением в $C_0^\alpha(E)$ этой задачи, если

$$\overline{D}\,\overline{\Pi}(u_0)u \in C_0^\alpha(E),\ \overline{A}_{j,l}u \in C_0^\alpha(E).$$

Очевидно, для разрешимости в $C_0^\alpha(E)$ задачи (11) необходимо, чтобы $\varphi_{j,l} \in$ $\in C_0^\alpha(E)$. Здесь также не удалось найти необходимое условие на u_0. Будем предполагать, что $u_0 \in D(A)$.

Определение 4. *Будем говорить, что задача* (13) *корректно разрешима в пространстве* $C_0^\alpha(E)$, *если выполнены следующие условия:*

1) *при любых* $\varphi_{j,l} \in C_0^\alpha(E)$ *и* $u_0 \in D(A)$ *существует единственное решение* $u = u(\varphi_{j,l}, u_0)$ *в* $C_0^\alpha(E)$ *задачи* (11);

2) *задача* (11) *корректна в* $C_0^\alpha(E)$.

Методом работы [13] доказывается, что неравенство коэрцитивности

$$\left\|\overline{D}\,\overline{\Pi}(u_0)u\right\|_{C_0^\alpha(E)} + \left\|\overline{A}_{j,l}u\right\|_{C_0^\alpha(E)} \le M(\alpha)\left[\left\|Au_0\right\|_E + \left\|\varphi_{j,l}\right\|_{C_0^\alpha(E)}\right]$$

является необходимым и достаточным условием корректной разрешимости в $C_0^\alpha(E)$ корректной задачи (11). Как и в случае пространства $\mathfrak{C}(E)$, из корректной разрешимости разностной задачи (11) в $C_0^\alpha(E)$ выводится корректная разрешимость дифференциальной задачи Коши (1) в $C_0^\alpha(E)$, установленная в [21]. Поэтому аналитичность полугруппы $\exp\{-tA\}$ является необходимым условием корректной разрешимости разностной задачи (11) в $C_0^\alpha(E)$. Это условие не только необходимо, но и достаточно для корректной разрешимости в $C_0^\alpha(E)$ для широкого класса разностных схем Паде.

Сначала рассматривается разностная задача (11), порожденная дробями Паде $R_{j,l}$ при $j = l-2, l-1$. Прежде всего приведем некоторые оценки гладкости для степеней оператора шага.

Лемма 1. *Для любых* $1 \le k < k+r \le N$ *и* $0 \le \alpha \le 1$ *справедливы оценки*

$$\left\|R_{j,l}^k(\tau A) - R_{j,l}^{k+r}(\tau A)\right\|_{E\to E} \le Mr^\alpha k^{-\alpha},$$

$$\left\|\tau A\left[R_{j,l}^k(\tau A) - R_{j,l}^{k+r}(\tau A)\right]\right\|_{E\to E} \le Mr^\alpha k^{-(1+\alpha)}.$$

Эти оценки позволяют установить следующий результат.

Теорема 4. *Разностная задача* (11) *корректна в пространстве* $C_0^\alpha(E)$.

Теорема 5. *Разностная задача* (12) *корректно разрешима в пространстве* $C_0^\alpha(E)$.

Доказательства теорем 4, 5 проводятся по той же схеме, что и доказательства соответствующих результатов в случае $j = 0$ и $l = 1$ [13].

Рассмотрим разностную задачу (11), порожденную дробями Паде $R_{j,l}$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для любых* $1 \le k < k+r \le N$ *и* $0 \le \alpha \le 1$ *справедливы оценки*

$$\left\|\left[R_{l,l}^k(\tau A) - R_{l,l}^{k+r}(\tau A)\right](I+\tau A)^{-1}\right\|_{E\to E} \le Mr^\alpha k^{-\alpha}, \tag{18}$$

$$\left\| \tau A\left[R_{l,l}^{k}(\tau A)-R_{l,l}^{k+r}(\tau A)\right](I+\tau A)^{-3} \right\|_{E\to E} \le Mr^{\alpha}k^{-(1+\alpha)}. \qquad (19)$$

Доказательство оценок (18) и (19) опирается на оценку

$$\left\| (I+\tau A)\left(I-R_{l,l}(\tau A)\right)(\tau A)^{-1} \right\|_{E\to E} \le M \qquad (20)$$

и оценки (15) и (16).

Оценки (18) и (19) позволяют установить следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть* u_0, $\varphi_k^{l,l} \in D(A)$. *Тогда для решений разностной задачи* (10) *справедливо неравенство*

$$\| u^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} \le M\left[\| (I+\tau A)u_0 \|_E + \| (I+\tau A)\varphi_{l,l}^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} \right].$$

Теорема 7. *Пусть* $\varphi_k^{l,l} \in D(A^2)$, $1 \le k \le N$. *Тогда для решений разностной задачи* (10) *справедливо неравенство*

$$\| D_{\tau}\Pi(u_0)u^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} + \| A_{l,l}u^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} \le$$

$$\le M\left[\| Au_0 \|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \| (I+\tau A)^2 \varphi_{l,l}^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} \right]. \qquad (21)$$

Доказательство теорем (6) и (7), так же, как и доказательство теорем 4 и 5, проводится по схеме доказательства соответствующих результатов в случае $j=0$, $l=1$ из [13].

Из тождества

$$1 - R_{l,l}(z) = [Q_{l,l}(z) - Q_{l,l}(-z)] / Q_{l,l}(z)$$

в случае четного l, очевидно, следует оценка

$$\left\| (I+\tau A)^2 \left(I-R_{l,l}(\tau A)\right)(\tau A)^{-1} \right\|_{E\to E} \le M \qquad (22)$$

с M, не зависящим от τ. Это позволяет в неравенстве вида (21) освободиться в правой части от оператора $I+\tau A$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Для любых* $1 \le k < k+r \le N$ *и* $0 \le \alpha \le 1$ *и четных* l *справедлива оценка*

$$\left\| \tau A\left[R_{l,l}^{k}(\tau A)-R_{l,l}^{k+r}(\tau A)\right](I+\tau A)^{-2} \right\|_{E\to E} \le Mr^{\alpha}k^{-(1+\alpha)}.$$

Отсюда вытекает следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* $\varphi_k^{l,l} \in D(A)$, $1 \le k \le N$. *Тогда для решений разностной задачи* (10) *при четных* l *справедливо неравенство*

$$\| D_{\tau}\Pi(u_0)u^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} + \| A_{l,l}u^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} \le$$

$$\le M\left[\| Au_0 \|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \| (I+\tau A)\varphi_{l,l}^{\tau} \|_{C_0^{\alpha}(\tau,E)} \right].$$

Теорема 9. *Если разностная задача* (11) *при четных* l *корректна в* $\mathfrak{C}(E)$, *то она корректно разрешима в* $C_0^{\alpha}(E)$.

Справедливы ли аналогичные результаты для разностной задачи (11) в $C_0^{\alpha}(E)$ при нечетных l, автору неизвестно. Однако, удается установить близкие результаты для разностной задачи (11) при нечетных l, но в более узком пространстве, чем пространства $C_0^{\alpha}(E)$. Этому посвящен следующий пункт.

5. Случай специального пространства $\tilde{C}_0^\alpha(E)$. Рассмотрим разностную задачу (11), порожденную дробями Паде $R_{l,l}$ при нечетных l. В случае $l = 1$ приходим к схеме Кранка – Николсон. Легко проверить, что отсутствует равномерная по τ и k, $k = 1, \ldots, N$, оценка

$$\left\| k\left(I - R_{1,1}(\tau A)\right) R_{1,1}^k(\tau A) \right\|_{E \to E} \le M$$

даже в случае самосопряженного и положительно определенного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $E = H$. Однако справедлива равномерная по τ и k, $k = 1, \ldots, N$, оценка

$$\left\| k\left(I - R_{1,1}^2(\tau A)\right) R_{1,1}^k(\tau A) \right\|_{E \to E} \le M$$

в случае произвольного сильно позитивного оператора, действующего в банаховом пространстве E. Поэтому в [17] корректнуя разрешимость схемы Кранка – Николсон удалось установить в $\tilde{C}_0^\alpha(E) = \tilde{C}_0^\alpha(\varepsilon)$ с нормой

$$\| \psi \|_{\tilde{C}_0^\alpha(E)} = \sup_{0<\tau\le\tau_0} \| \psi^\tau \|_{\tilde{C}_0^\alpha(\tau, E)}.$$

Здесь $\tilde{C}_0^\alpha(\tau, E)$, $0 < \alpha < 1$, — векторное пространство сеточных функций ψ^τ с нормой

$$\| \psi^\tau \|_{\tilde{C}_0^\alpha(\tau, E)} = \| \psi^\tau \|_{C(\tau, E)} + \max_{1 \le k < k+2r \le N} \frac{k^\alpha \| \psi_{k+2r} - \psi_k \|_E}{(2r)^\alpha}.$$

Указанное выше свойство разностной схемы Кранка – Николсон наследуется для всех разностных схем Паде при нечетных l. Именно: в силу (20) в случае нечетных l имеем

$$\left\| (I + \tau A)\left(I - R_{l,l}(\tau A)\right)(\tau A)^{-1} \right\|_{E \to E} \le M.$$

Эта оценка "хуже", чем оценка (22), из–за того, что потеряна одна степень оператора $I + \tau A$. Поэтому не выполняется равномерная по τ и k, $k = 1, \ldots, N$, оценка

$$\left\| k\left(I - R_{l,l}(\tau A)\right) R_{l,l}^k(\tau A) \right\|_{E \to E} \le M.$$

Однако, можно воспользоваться оценкой

$$\left\| (I + \tau A)\left(I + R_{l,l}(\tau A)\right) \right\|_{E \to E} \le M. \tag{23}$$

Из оценок (20) и (23) следует равномерная по τ и k, $k = 1, \ldots, N$, оценка

$$\left\| k\left(I - R_{l,l}^2(\tau A)\right) R_{l,l}^k(\tau A) \right\|_{E \to E} \le M.$$

Этот факт позволяет установить некоторое улучшение оценок гладкости степеней оператора шага $R_{l,l}(\tau A)$ и в случае произвольных нечетных l.

Лемма 4. *Для любых* $1 \le k \le N$ *справедлива оценка*

$$\left\| \sum_{r=0}^{k-1} R_{l,l}^k(\tau A) \right\|_{E \to E} \le Mk.$$

Лемма 5. *Для любых* $1 \le k < k+2r \le N$ *и* $0 \le \alpha \le 1$ *справедлива оценка*

$$\left\| \tau A\left(R_{l,l}^{k+2r}(\tau A) - R_{l,l}^k(\tau A)\right)(I + \tau A)^{-2} \right\|_{E \to E} \le M r^\alpha k^{-(1+\alpha)}.$$

Лемма 6. *Для любых* $1 \le k < k+2r \le N$ *справедлива оценка*

$$\left\| R_{l,l}^{k+2r}(\tau A) - R_{l,l}^k(\tau A) \right\|_{E \to E} \le M r k^{-1}.$$

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1992, т. 44, № 11

Эти оценки гладкости степеней оператора шага $R_{l,l}(\tau A)$ позволяют установить следующий результат.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* $\| R^k \|_{E\to E} \le M$. *Пусть оператор* $I + R_{l,l}(\tau A)$ *имеет обратный* $(I + R_{l,l}(\tau A))^{-1}$ *и* $\varphi_k^{l,l}$ *принадлежит области определения этого оператора для всех* $1 \le k \le N$. *Тогда для решений разностной задачи* (10) *справедливо неравенство*

$$\left\| D_\tau \Pi(u_0) u^\tau \right\|_{C_0^\alpha(\tau,E)} + \left\| A_{l,l} u^\tau \right\|_{\tilde{C}_0^\alpha(\tau,E)} \le$$

$$\le M\left[\left\| A u_0 \right\|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \left\| (I + R_{l,l}(\tau A))^{-1} \varphi_{l,l}^\tau \right\|_{\tilde{C}_0^\alpha(\tau,E)} \right].$$

Здесь M *не зависит от* τ, α, u_0 *и* $\varphi_{l,l}^\tau$.

Входящее в формулировку теоремы 10 условие существования обратного к оператору $I + R_{l,l}(\tau A)$, очевидно, выполнено при $l = 1$, так как

$$(I + R_{1,1}(\tau A))^{-1} = I + \tau A / 2.$$

Для произвольных нечетных l справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Если* A *– сильно позитивный оператор со спектральным углом* $\varphi(A, E) < \pi / 2l$, *то существует обратный к оператору* $I + R_{l,l}(\tau A)$ *и справедлива оценка*

$$\| (I + R_{l,l}(\tau A))^{-1} (I + \tau A)^{-1} \|_{E\to E} \le M. \tag{24}$$

Доказательство. Так как

$$\| \tau A (I + \tau A)^{-1} \|_{E\to E} \le M,$$

$$[1 + R_{l,l}(z)]^{-1} = Q_{l,l}(z) [Q_{l,l}(z) + Q_{l,l}(-z)]^{-1},$$

то для доказательства (24) достаточно установить оценки

$$\| (\tau A)^k [Q_{l,l}(\tau A) + Q_{l,l}(-\tau A)]^{-1} \|_{E\to E} \le M, \tag{25}$$

при всех $k, 0 \le k < l - 1$. Пусть сначала $0 < k < l - 1$. Тогда, воспользовавшись формулой Коши – Риса (3), получим

$$(\tau A)^k [Q_{l,l}(\tau A) + Q_{l,l}(-\tau A)]^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_1 \cup S_2} \frac{z^k}{Q_{l,l}(z) + Q_{l,l}(-z)} (z - \tau A)^{-1} dz.$$

Так как

$$Q_{l,l}(z) + Q_{l,l}(-z) = 2 \sum_{r=0}^{(i-1)/2} \frac{(2l-2r)!\; l!\; z^{2r}}{(2l)!\; (2r)!\; (l-2r)!},$$

то

$$\left| Q_{l,l}(z) + Q_{l,l}(-z)^2 \right| = 4 \sum_{r=0}^{(i-1)/2} \left[\frac{(2l-2r)!\; l!\; \rho^r}{(2l)!\; (2r)!\; (l-2r)!} \right]^2 +$$

$$+ 8 \sum_{r=0}^{\frac{i-1}{2}-1} \sum_{s=r+1}^{\frac{i-1}{2}} \left[\frac{l!}{(2l)!} \right]^2 \frac{(2l-2r)!\; (2l-2s)!\; \rho^{2r+2s} \cos 2(s-r)\varphi}{(2r)!\; (l-2r)!\; (2s)!\; (l-2s)!} = \psi(\rho).$$

Поэтому $\psi(\rho)$ не обращается в нуль в угле

$$\Gamma = \{ z \in \mathbb{C}^+ : z = \rho e^{\pm i\varphi}, 0 \le \rho < \infty, 0 \le \varphi \le \pi / 2l \}$$

и справедлива оценка

$$\psi^{-1}(\rho) \le M \min\{1, \rho^{-2(l-1)}\}.$$

Отсюда из оценки (2) вытекает

$$\left\| (\tau A)^k \left[Q_{l,l}(\tau A) + Q_{l,l}(-\tau A) \right]^{-1} \right\|_{E \to E} \le M \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho^k}{[\psi(\rho)]^{1/2}} \frac{d\rho}{\rho + \tau} \le$$

$$\le M_1 \left[\int\limits_0^1 \rho^{k-1} d\rho + \int\limits_1^{\infty} \rho^{k-l} d\rho \right] \le M_2.$$

Оценка (25) при $1 \le k \le l-2$ установлена. Оценка (25) при $k = 0$ и $l - 1$ очевидна. Лемма 7 доказана.

1. *Соболевский П. Е.,Хоанг Ван Лай.* Разностные схемы оптимального типа приближенного решения параболических уравнений (банахов случай) // Укр. мат. журн,– 1981.– **33**, №1.– С. 39 – 46.
2. *Алибеков Х. А., Соболевский П. Е.* Об одном способе построения и исследования схем класса Паде // Дифференц. уравнения и их применения. – 1982. – Вып. 32. – С. 9 – 29.
3. *Hersh R., Kato T.* High-accuracy stable difference schemes for well-posed initial value problem // SIAM J. Numer. Anal. – 1979. – **16**, № 4. – P. 670 – 682.
4. *Brenner Ph., Thomee V.* On rational approximations of semigroups // Ibid. – P. 683 – 694.
5. *Brenner Ph., Grouzeix M., Thomee V.* Single step methods for inhomogeneous linear differential equations in Banach space // PAIRO J. Numer. Anal. – 1982. – **16**, № 1. – P. 5 – 26.
6. *Бакаев Н. Ю.* Оценки устойчивости разностных схем для дифференциального уравнения с постоянным оператором. I // Дифференциальные уравнения с частными производными. – Новосибирск: Наука, 1989. – С. 3 – 14.
7. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 464 с.
8. *Соболевский П. Е., Тиунчук М. Ф.* О разностном методе приближенного решения квазилинейных эллиптических и параболических уравнений // Тр. мат. ф-та Воронеж. ун-та. – 1970. – Вып. 1. – С. 82 – 106.
9. *Андреев В. Б.* Об устойчивости по начальным данным разностных схем для параболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики.– 1971.– **11**, №6.– С. 1462 – 1475.
10. *Гриф А. Г.* Об устойчивости в $W_2^{2,1}$ разностных схем для параболических уравнений // Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. – С. 88 – 112.
11. *Ионкин Н. И., Мокин Ю. И.* О параболичности разностных схем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 2. – С. 402 – 417.
12 *Соболевский П. Е.* О коэрцитивной разрешимости разностных уравнений // Докл. АН СССР. – 1971. – **201**, № 5. – С. 1063 – 1066.
13. *Соболевский П. Е.* Теория полугрупп и устойчивость разностных схем // Теория операторов в функциональных пространствах. – Новосибирск: Наука, 1977. – С. 304.– 337.
14. *Поличка А. Е., Соболевский П. Е.* О корректной разрешимости разностных параболических уравнений в пространствах Бохнера // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1978. – **36**. – С. 29 – 57.
15. *Поличка А. Е., Соболевский П. Е.* Новые L_p–оценки для разностных параболических задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1963. – **3**, № 2. – С. 266 – 298.
16. *Ашыралыев А. О., Соболевский П. Е.* Корректная разрешимость разностной схемы Кранка–Николсон для параболических уравнений // Изв. АН Туркм. ССР. Сер. физ. – техн., хим. и геолог. наук. – 1981. – № 6. – С. 10 – 16.
17. *Ашыралыев А. О., Соболевский П. Е.* О коэрцитивной устойчивости разностной схемы Кранка–Николсон в пространствах // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их применение. – Куйбышев: Куйбышев. ун-т, 1982. – С. 16 – 24.
18. *Ашыралыев А. О.* Об одной чисто неявной разностной схеме второго порядка аппроксимации для параболических уравнений // Изв. АН Туркм. ССР. Сер. физ. – техн., хим. и геолог. наук. – 1987. – № 4. – С. 3 – 13.
19. *Бейкер Дж., Грейвс-Морис П.* Аппроксимация Паде. – М.: Мир, 1986. – 504 с.
20. *Ашыралыев А. О., Соболевский П. Е.* Разностные схемы для параболических уравнений // Дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. – Ашхабад, 1985. – С. 39 – 40.
21. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений //Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 52 – 56.

Получено 23. 04. 91