УДК 517.94

М. К. Бугир, канд. физ.-мат. наук (Ин–т нар. хоз–ва, Тернополь)

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ И НЕКОЛЕБЛЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ E^n И P^n

Получены аналоги–теоремы о среднем значении для уравнения Пуассона с оператором Лапласа–Бельтрами в евклидовом и сферическом пространствах.

Одержано аналоги–теореми про середнє значення для рівняння Пуассона з оператором Лапласа–Бельтрамі в евклідовому та сферичному просторах.

1. При изучении свойств гармонических функций важную роль играет теорема о среднем значении (см., например, [1]).

Теорема 1. *Для того чтобы регулярная функция* $u(x)$ *была гармонической в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int \cdots \int_{S_r} u(x) ds = u(P_0) \tag{1}$$

для любой сферы S_r *из области* D *с центром в точке* P_0.

В формуле (1) через ω_n обозначена площадь единичной n-мерной сферы.

В данной статье теорема 1 обобщается на уравнения с частными производными более общего вида.

Для простоты сначала рассмотрим уравнение

$$Lu + p\, u = f(x) \tag{2}$$

с оператором Лапласа–Бельтрами L в главной части, который в евклидовом пространстве E^n представляет собой оператор Лапласа, в гиперболическом — оператор Даламбера; таким образом, единым подходом можно исследовать уравнения разных типов.

Через X обозначим пространство постоянной кривизны с метрикой

$$dx = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) dx_i dx_j,$$

$\{g_{ij}\}$ — метрический тензор. Введем "среднее значение"

$$M_r[u(x), P_0] = \frac{1}{A(r)} \int \cdots \int_{S_r} u(x) ds, \tag{3}$$

где через $A(r)$ обозначен нормирующий множитель $M_r(1, P_0) = 1$, S_r — сфера радиуса r с центром в точке $P_0 \in X$.

Если проинтегрируем уравнение (2) по сфере S_r пространства X и используем формулу [2, 3]

$$L_r M_r = M_r L_r, \tag{4}$$

где через L_r обозначена радиальная часть оператора L в сферических полярно–геодезических или полисферических координатах в зависимости от вида пространства, то получим

$$\frac{d}{dr}\left[A(r)\frac{dM(r)}{dr}\right]+pA(r)M(r)=\int\limits_{S_r}\cdots\int f(x)dx. \tag{5}$$

Обозначим

$$\int\limits_{S_r}\cdots\int f(x)dx\cdot ds=F(r).$$

В зависимости от вида пространства X уравнение (5) преобразуется в уравнение Бесселя или Лежандра. Рассмотрим евклидово пространство E^n, для которого уравнение (5) имеет вид

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\frac{dM}{dr}\right]+pr^{n-1}M=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S_r}\cdots\int f(x)ds\,. \tag{5'}$$

Если положить $M(r)=r^{-(n-2)/2}\psi(r)$, $\tau=\sqrt{p\operatorname{sgn}p}\;r$, то уравнение (5) преобразуется в уравнение Бесселя

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2}+\frac{1}{\tau}\frac{d\psi}{d\tau}+\left(\pm1-\frac{\nu^2}{\tau^2}\right)=\frac{1}{p\omega_n}\left(\frac{\tau}{\sqrt{p}}\right)^{-n/2+1}F\left(\frac{\tau}{\sqrt{p}}\right), \tag{6}$$

где знак "+" берется при $p>0$ и "–" при $p<0$, $\nu=(n-2)/2$. Общее решение уравнения (6) запишется через функции Бесселя следующим образом:

$$\psi(r)=J_\nu(\tau)C_1+N_\nu(\tau)C_2+\int\limits_0^\tau\left[\frac{\pi s}{2}[J_\nu(s)N_\nu(\tau)-\right.$$

$$\left.-N_\nu(s)J_\nu(\tau)\right]\left(\frac{s}{\sqrt{p}}\right)^{-n/2}F\left(\frac{s}{\sqrt{p}}\right)ds\frac{1}{p\omega_n}. \tag{7}$$

В случае $p<0$ вместо функции $J_\nu(t)$ следует использовать $I_\nu(t)$. Обозначим через $K(t,r)$ функцию Коши соответствующего однородного уравнения (6), тогда справедливо соотношение

$$M(r)=r^{-(n-2)/2}\left[J_\nu(\sqrt{p}\,r)C_1+N_\nu(\sqrt{p}\,r)C_2\right]+\frac{1}{\omega_n p}\int\limits_0^{\sqrt{p}\,r}K(r,s)s^{-n/2}F(s)ds. \tag{8}$$

Используя свойства функции Бесселя, имеем

$$\lim_{r\to0}r^{-(n-2)/2}J_\nu(\sqrt{p}\,r)=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)};\ \lim_{r\to0}r^{-(n-2)/2}N_\nu(\sqrt{p}\,r)=\infty,$$

поэтому если нас интересуют регулярные решения уравнения (5), то в общем решении (8) постоянную c_2 следует приравнять нулю. Так как $\lim\limits_{r\to0}M(r)=$ $=u(P_0)$, пронормировав фундаментальное решение $r^{-\nu}J_\nu(\sqrt{p}\,r)$ условиями $M_1(0)=1$, $M'_1(0)=0$, получим регулярное решение уравнения (5) вида

$$M(r)=\frac{\Gamma(n/2)J_{(n-2)/2}(\sqrt{p}\,r)}{\left(\frac{\sqrt{p}\,r}{2}\right)^{(n-2)/2}}u(P_0)+\frac{r^{(n-2)/2}}{\omega_n p}\int\limits_0^{\sqrt{p}\,r}s^{-n/2}K(r,s)F(s)ds. \tag{9}$$

2. Сейчас нужно установить, когда справедливо утверждение, обратное формуле (9), т.е. по виду регулярного решения (9) восстановить вид уравнения, которому оно удовлетворяет, как это делалось с уравнением Лапласа.

Определение 1. *Решение* $u(x)$ *уравнения* (2) *будем называть неколеблющимся, если соответствующая функция* $M(r)$ *имеет не более одного нуля для любой точки* $P_0 \in X$, *и колеблющимся в противном случае.*

Определение 2. *Уравнение* (2) *будем называть неколеблющимся, если все его решения неколеблющиеся.*

Теорема 2. *Пусть уравнение* $\Delta u + pu = 0$ *неколеблющееся, тогда для того чтобы регулярная функция* $u(x)$ *ему удовлетворяла в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (9) *для любых* S_r *и* $K_r \in D$, K_r *– шар, ограниченный сферой* S_r.

Доказательство. Необходимость очевидна, она не зависит от свойств колеблемости решений уравнения (2). Для доказательства достаточности используем тот факт, что для неколеблемости уравнения (2) необходимо и достаточно выполнения неравенства $p \le 0$ [2].

Достаточность докажем для уравнения (2), так как вид правой части $f(x)$ не влияет на формулировку утверждения. Действительно, пусть, кроме функции $u(x)$, соотношению (9) удовлетворяет и другая функция $u_1(x)$, принимающая на границе S_r значение $\varphi(r)$. Такое решение всегда существует вследствие неколеблемости решений и по необходимости удовлетворяет формуле (9). Значит, соотношению (9) удовлетворяет функция $w(x) = u(x) - u_1(x)$, значение которой на границе S_r равно нулю. Поэтому задача сводится к изучению единственности решения задачи Дирихле $\Delta w + pw = 0$, $w|_{S_r} = 0$. Из (9) следует, что регулярным для уравнения (2) будет частное решение

$$M_1(r) = \left(\frac{\sqrt{p}\,r}{2}\right)^{-(n-2)/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) I_{(n-2)/2}(\sqrt{p}\,r)\,u(P_0). \tag{10}$$

Нетрудно доказать, что решение (10) "неглавное" [4], т.е. удовлетворяет условиям $M_1(r) \ge 0$, $M'_1(r) \ge 0$, так как $I_\nu(t)$ представляет собой ряд с неотрицательными членами. Кроме того, в силу начальных условий $M_1(r) > 1$ для $r > 0$.

Для доказательства утверждения достаточно показать, что любая функция $u(x)$, удовлетворяющая формуле (10), может принимать экстремальное значение только на границе области. Если допустить противное, т.е. что функция $w(x)$ принимает положительное максимальное значение в некоторой внутренней точке P_0, то для наибольшего шара K_r с центром в точке P_0, принадлежащего области D, она имеет цепочку неравенств $\max\limits_{x \in K_r} w(x) = u(P_0)$, $w(P_0) \ge$ $\ge M(r) \ge M_1(r) w(P_0)$, $M_1(r) \le 1$, $r \ge 0$, что невозможно. Невозможен и отрицательный минимум, ибо тогда функция $-w(x)$ имеет положительный максимум, $w(x) = 0$, следовательно, нужно исключить случай отрицательного максимума. Поэтому $w(x) \cong 0$, $x \in K_r$. Те же рассуждения можно привести для любой точки $P_0 \in D$, отсюда $w(x) = 0$ для всех $x \in D$, т.е. функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (2).

Замечание 1. Формула вида (9) получена Е. И. Моисеевым в работе [5] с более сложной функцией под интегралом.

Сооношение вида (9) можно обобщить и на сферические пространства P^n.

Пусть кривизна такого пространства $k^2 = 1$, тогда если положить $M(r) = \sin^{-(n-2)/2}\psi(r)$, то уравнение (5) преобразуется в уравнение

$$\psi'' + \operatorname{ctg} r\psi' + \left[\frac{n(n-2)}{4} - \left(\frac{n-2}{2\sin r}\right)^2 + p\right]\psi = \tilde{f}(r), \tag{11}$$

которое приводится к уравнению Лежандра и для которого вблизи особой точки $r = 0$ для целых ν

$$P_\nu^m(r) = \frac{(-1)^m 2^{-m/2}\Gamma(\nu + m + 1)}{m!\Gamma(\nu - m + 1)}\sin^{m/2} r \tag{12}$$

(в случае четного n одно из фундаментальных решений имеет асимптотическое поведение [1, с.164]).

Согласно преобразованию в нуле решение $M_1(r) = \sin^{-\nu} r P_\nu^{(n-2)/2}$ $(\cos r)$ для четного n ограничено, второе — неограничено. Следовательно, регулярное решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$M(r) = \frac{m!\Gamma(\nu - m + 1)2^m}{\Gamma(\nu + m + 1)} P_\nu^m(\cos r)\sin^{-m/2} r u(P_0), \tag{13}$$

где константа подсчитана из предельного перехода $M(0) = \dfrac{\Gamma(\nu + m + 1)}{2^m m!\Gamma(\nu - m + 1)}$.

Решение $M_1(r) = \sin^{-m} r P_\nu^m(\cos r)$ "неглавное", что вытекает из представления функции Лежандра через гипергеометрическую функцию

$$M(r) = \frac{2^m m!\Gamma(\nu - m + 1)}{\Gamma(\nu + m + 1)} F\left(1 + m + \nu,\ m - \nu;\ m + 1;\ \sin^{-m/2}\frac{r}{2}\right),$$

$$F\left(1 + m + \nu,\ m - \nu;\ m + 1;\ \sin^2\frac{r}{2}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^{2n}\frac{r}{2},$$

где

$$a_1 = \frac{\left(m + \frac{1}{2} + \nu\right)\left(m + \frac{1}{2} - \nu\right)}{m + 1} = -\frac{p}{m + 1},$$

$$a_2 = -\frac{p\left(\frac{n}{2} - p\right)}{2!(m + 1)(m + 2)}$$

и т.д. В случае, когда $p < 0$, коэффициенты последнего ряда положительные, поэтому частное решение $M_1(r)$ также будет положительным. Так как

$$\frac{d}{dr}\sin^{2n}\frac{r}{2} = n\sin^{2(n-1)}\frac{r}{2},\ 0 < r < \pi,$$

производная от функции $M_0(r)$ неотрицательная, следовательно, решение $M_1(r)$ "неглавное". Отсюда по аналогии с теоремой 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть n четное и уравнение* (2) *неколеблющееся в пространстве P^n. Тогда для того чтобы регулярная функция $u(x)$ ему удовлетворяла, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* (13) *для любых P_0 и $S_r \in D(P^n)$.*

Замечание 2. В работе [2] показано, что для $n = 3$ регулярное решение уравнения (5) имет вид

$$M(r) = \frac{\sin\sqrt{p+1}\,r}{\sqrt{p+1}\sin r}u(P_0),\ p+1<0,\ M(r)=\frac{r}{\sin r}u(P_0),\ p=-1 \tag{14}$$

и является "неглавным", следовательно, теорема 3 справедлива и для $n = 3$. Полученные результаты обобщаются и на более сложные объекты, чем уравнение (2), в частности, на систему уравнений второго порядка

$$Lu + Pu = f(x) \tag{15}$$

с квадратной матрицей порядка k.

Обозначим

$$m_i(r) = \frac{1}{A(r)}\int\cdots\int_{S_r} u_i(x)ds. \tag{16}$$

Определение 3. *Однородную систему уравнений* (15) *будем называть неколеблющейся в области* $D \in X$, *если для любых точек* $P_0 \in D$ *функция* $v(r) = \sqrt{m_1^2(r)+\ldots+m_k^2(r)}$ *имеет не более одного нуля.*

Теорема 4. *Пусть матрица* P *имеет только простые собственные значения и система уравнений*

$$Lu + Pu = 0$$

неколеблющаяся. Тогда для того чтобы регулярная функция $u(x)$ *удовлетворяла этой системе уравнений в области* D, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* $u = T\cdot z$, *где* T — *матрица, приводящая матрицу* P *к диагональной форме, а векторы* $z_i(r)$ *удовлетворяют формулам* (9) *для пространства* E^n *или* (12), (14) *для* P^n, *для любых* S_r *и* $K_r \in D$.

Второй интересный случай представляет собой уравнение с полигармоническим оператором

$$L^2u + c_1Lu + c_2u = f(x). \tag{17}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$L^2u + c_1Lu + c_2u = 0 \tag{17'}$$

через корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0 \tag{18}$$

представляется в виде системы уравнений

$$Lu - \lambda_1 u = u_1,\ Lu_1 - \lambda_2 u_1 = 0. \tag{19}$$

Определение 4. *Уравнение* (17′) *будем называть неколеблющимся в области* $D \subset X$, *если для любых точек* $P_0 \in D$ *функция* $M(r)$ *имеет не более трех нулей, учитывая их кратность.*

Отметим, что в работе [2] установлены необходимые и достаточные условия неколеблемости уравнения (17′) такого вида.

Теорема 5. *Пусть уравнение* (17′) *неколеблющееся и корни уравнения* (18) *разные. Тогда для того чтобы регулярная функция* $u(x)$ *в пространстве* E^n *ему удовлетворяла, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$M(r) = u(P_0)f_1(r) + \Delta u(P_0)f_2(r), \tag{20}$$

где

$$f_1(r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)^{-\nu}\left[I_\nu\left(\sqrt{\lambda_1}\, r\right)\right]\lambda_2^{(n-2)/4} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} I_\nu\left(\sqrt{\lambda_2}\, r\right),$$

$$f_2(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}\, r}{2}\right)^{-\nu} I_\nu\left(\sqrt{\lambda_2}\, r\right) \tag{21}$$

для любых S_r *и* $K_r \in D$.

Доказательство. Проинтегрируем по сфере S_r уравнение (19_2), тогда согласно формуле (10)

$$M_1(r) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}\, r}{2}\right)^{-\nu} I_\nu\left(\sqrt{\lambda_2}\, r\right) u_1(P_0).$$

Неоднородное уравнение (19_1) преобразуется заменой $M(r) = r^{-\nu}\psi(r)$ в уравнение Бесселя

$$\psi'' + \frac{\psi'}{r} - \left(\lambda_2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right)\psi = r^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}\right)^{-\nu} I_\nu\left(\sqrt{\lambda_2}\, r\right) u_1(P_0). \tag{22}$$

Обозначим $\Gamma(n/2)\left(\sqrt{\lambda_2}/2\right)^{-\nu} u_1(P_0) = A$. Тогда после замены $\tau = r\sqrt{\lambda_1}$ получим стандартное уравнение Бесселя вида (6) с правой частью $f(\tau) = (A/\lambda_1) I_\nu\left(\tau\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}\right)$. Согласно [7, с.77] частное решение уравнения (22) имеет вид

$$\tilde{\psi}(\tau) = \frac{A\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} I_\nu\left(\tau\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right). \tag{23}$$

Отсюда, используя сделанные замены и тот факт, что $u_1(P_0) = \Delta u(P_0) - \lambda_1 u(P_0)$, получаем формулу (20).

Обратное утверждение доказывается аналогично доказательству теоремы 2. Если допустить противное, что функция $w(x)$ на границе некоторой сферы S_r принимает нулевое значение и имеет положительное максимальное значение в центре этой сферы P_0, то вследствие того, что можно менять местами корни λ_1 и λ_2 $(\Delta w(P_0) \geq 0, f_2 > 0)$, получаем цепочку неравенств

$$M(r) \geq f_1(r)u(P_0),\ u(P_0) \geq f_1(r)u(P_0);$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{r\sqrt{\lambda_1}}{2}\right)^{-\nu} I_\nu\left(\sqrt{\lambda_1}\, r\right) + \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{r\sqrt{\lambda_2}}{2}\right)^{-\nu} I_\nu\left(\sqrt{\lambda_2}\, r\right) \leq 1,$$

что невозможно хотя бы из–за того, что первый член суммы — решение "неглавное".

Замечания. 3. Как показано в работе [6], в случае кратных корней в частном решении (23) меняется порядок функции Бесселя, а значит, функции $f_1(r)$, что не влияет на выводы теоремы [5].

4. Из доказательства последней теоремы видно, что аналогичные результаты легко сформулировать для полигармонического уравнения произвольного порядка.

5. Теорему из [3] можно аналогичным образом обобщить на полигармонические уравнения, а также обобщенные сферические пространства [3].

6. Используя функцию усреднения с положительным весом

$$M^*(r) = A^{-1}(r)\int_{S_r^*}\cdots\int G(x)u(x)ds\,,$$

можно получить аналогичные утверждения (в случае пространства E^n) для уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+pu=f(x), \tag{24}$$

где $\{a_{ij}\}$ — симметрическая матрица. Весовая функция имеет вид $G(x) = (\nabla\rho^*(x)\,a(x)\nabla\rho(x))\,/\,|\,\nabla\rho(x)\,|$, где $\rho(x)$ строится по фундаментальному решению главной части уравнения (24) $Pu=0$. Сфера S_r^* определяется уравнением $\rho(x) = r$. В частном случае уравнение с постоянными коэффициентами S_r^* определяется уравнением $\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}x_ix_j=cr^2$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы $\{a_{ij}\}$.

Следствие 1. *Для того чтобы регулярная функция* $u(x)$ *удовлетворяла уравнению*

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0$$

в области D, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{S_r^*}\cdots\int G(x)u(x)ds=u(P_0)$$

для любой сферы $S_r^*\in D$ *с центром в точке* P_0.

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 8[illegible]0 с.
2. *Бугир М. К.* О неколеблемости решений линейных дифференциальных уравнений в пространствах постоянной кривизны // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, №11. – С.1956 – 1961.
3. *Хелгансон С.* Преобразование Радона. – М.: Мир, 1983. – 150 с.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – М.: Наука, 1965.– 296 с.
6. *Коренев В. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.

Получено 13.03.91