УДК 517.54

Д. Д. Илмурадов. асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА О КОНТИНГЕНЦИЯХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматриваются проблемы углубленного изучения характеристики контингенции произвольного множества евклидового пространства $\mathbb{R}^{m+1}$.

Розглядаються проблеми поглибленого вивчення характеристики контингенції довільної множини евклідового простору $\mathbb{R}^{m+1}$.

Пусть E — произвольное множество в $m+1$–мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Луч l, выходящий из точки $A(x) \in E \subset \mathbb{R}^{m+1}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ (точка A — неизолированная точка множества E), называется промежуточной полукасательной множества E в точке A, если существует последовательность точек $\{A_n\} \subset E$, сходящаяся к A, таких, что последовательность лучей $\{\overrightarrow{AA_n}\}$ сходится к l.

Множество всех промежуточных полукасательных множества E в точке A называется контингенцией множества E в точке A и обозначается $\operatorname{contg}_E A$ [1].

Пусть $A \in E$ — предельная точка множества E. Возьмем единичную сферу $S^m(A)$ в этой точке. Пересечение контингенции $\operatorname{contg}_E A$ с единичной сферой $S^m(A)$ называется сферической контингенцией и обозначается через

$$\operatorname{contg}^s_E A = \operatorname{contg}_E A \cap S^m(A).$$

Пусть $V^n_\varepsilon(A)$ — ε–окрестность точки A, где $\varepsilon > 0$. Спроектируем все точки множества $E \cap V^n_\varepsilon(A) \setminus \{A\}$ лучами, выходящими из точки A, на сферу $S^m(A)$. Полученное множество обозначим через $M_\varepsilon(A)$.

Можно доказать, что пересечение замыканий множеств $M_\varepsilon(A)$ по всем значениям $\varepsilon > 0$ есть сферическая контингенция

$$\operatorname{contg}^s_E A = \operatorname{contg}_E A \cap S^m(A) = \bigcap\nolimits_{\varepsilon>0} \overline{M}_\varepsilon(A).$$

Вопрос о структуре контингенции произвольного множества в $\mathbb{R}^{m+1}$ в смысле меры решен в [1].

Что касается характеристики контингенции на множестве второй категории, даже для случая графика непрерывной функции $u = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, вопрос не решен до конца, хотя здесь и получены некоторые результаты [2]. Доказано, что для любого локально-компактного множества $E \subset \mathbb{R}^{m+1}$ в точках его подмножества второй категории контингенция $\operatorname{contg}^s_E A$ есть центрально-симметричное замкнутое множество лучей. Настоящая статья посвящается дальнейшему уточнению характеристики контингенции на произвольном множестве именно для случая графика Γ непрерывной функции $u = f(x)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^m$. Определим теперь для случая графика Γ однозначной функции $u = f(x)$ так называемую цилиндрическую контингенцию в произвольной ее точке $A_0 \in \Gamma$. Пусть $S^{m-1}(x_0)$

— граница единичного шара $V^m(x_0) \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 = \text{пр}_{\mathbb{R}^m} A_0 \in D$; точки на $S^{m-1}(x_0)$ будем обозначать через φ и иногда будем их называть направлениями в точке x_0. Цилиндр $\overset{\circ}{C}{}^m(A_0) = S^{m-1}(x_0) \times \mathbb{R}^1(u)$ с образующими $\mathbb{R}^1(u)$, параллельными оси Ou, компактифицируем, добавив к каждой образующей $\mathbb{R}^1(u)$ две бесконечно удаленные точки $\pm\infty$, и полученный компактифицированный цилиндр обозначим через $C^m(A_0) = S^{m-1}(x_0) \times \overline{\mathrm{R}}^1(u)$. Точка $\overline{A}_0 = (\varphi_0, \overline{u})$ цилиндра $C^m(A_0)$ принадлежит цилиндрической контингенции графика Γ, если найдется последовательность точек $A_k \in \Gamma$ таких, что:

1) последовательность лучей $\overline{A_0 A_k}$ сходится к некоторому лучу $\vec{l} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ и при этом: а) $\vec{l}$ не параллелен оси Ou; тогда пересечение $\vec{l} \cap C^m$ над лучом φ_0 обозначим через $\overline{u}$; б) если $\vec{l}$ параллелен оси Ou, то $\overline{u}$ — несобственные точки $\pm\infty$ из C^m над лучом φ_0;

2) луч $\varphi = \varphi_0$ является полукасательной для последовательности точек $\text{пр}_{V_\varepsilon^m} A_k$.

Множество всех таких точек назовем цилиндрической контингенцией графика Γ в точке A_0 и обозначим ее через $\operatorname{contg}^c_\Gamma A_0$.

Следует заметить, что цилиндрическая контингенция определяется только для однозначной функции f.

Рассмотрим произвольную точку $A_0(x_0, u_0)$, $x_0 \in D$, графика Γ непрерывной функции f. Точки этого графика над проколотой δ_q– окрестностью $U_q(x_0) \setminus \{x_0\} \subset D$ обозначим через Γ_q; очевидно, Γ_q связно. Проекцию Γ_q из точки A_0 на цилиндр $C^m(A_0)$ обозначим через M_q; M_q также связно, причем $M_q \supset M_{q+1}$. Легко видеть, что

$$\operatorname{contg}^c_\Gamma A_0 = \bigcap\nolimits_q \overline{M}_q .$$

Отсюда следует, что $\operatorname{contg}^c_\Gamma A_0 \subset C^m$ — континуум. Докажем, что и пересечение этого континуума с произвольной образующей $\varphi = \varphi_0$ также связно. Для этого возьмем луч $\vec{l} \subset D$, выходящий из точки $x_0 \in D$, пересекающий сферу $S^{m-1}(x_0)$ в точке φ_0, и рассмотрим коническую окрестность $\Omega_q \subset D$ этого луча, состоящего из всех лучей, образующих с $\vec{l}$ угол, меньший δ_q; при этом снова будем предполагать, что $\delta_q \searrow 0$. Точки графика $\Gamma \setminus \{A_0\}$ над Ω_q, принадлежащие $1/q$–окрестности точки A_0, обозначим через $\Gamma_q(\varphi_0)$. Очевидно, $\Gamma_q(\varphi_0)$ связно. Проекцию $\Gamma_q(\varphi_0)$ из точки A_0 на цилиндр C^m обозначим через $M_q(\varphi_0)$; $M_q(\varphi_0)$ также связно, причем $M_q(\varphi_0) \supset M_{q+1}(\varphi_0)$. Легко показать, что пересечение $\operatorname{contg}^c_\Gamma A_0$ с образующей $(\varphi_0, \overline{\mathrm{R}}^1)$ цилиндра C^m есть $\bigcap_q \overline{M}_q(\varphi_0)$. Отсюда следует, что это пересечение связно.

Назовем число a (возможно $a = \pm\infty$) производным числом функции f в направлении φ, если существует последовательность точек $B_k(x_k) \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к B_0 таким образом, что последовательность направлений векторов $\vec{B_0 B_k}$ сходится по направлению к φ, причем

$$\left(f(B_k) - f(B_0)\right)\left|\vec{B_0 B_k}\right|^{-1} \to a.$$

Будем рассматривать цилиндр $C^m(A_0)$ относительно системы декартовых координат $\{\mathfrak{X}, U\}$ параллельно перенесенной в точку A_0 графика Γ функции f: $\mathfrak{X} = x - x_0$, $U = u - u_0$. Тогда нетрудно будет показать, что если a — производное число функции f в направлении φ, то точка с координатами (φ, a) принадлежит $\mathrm{contg}_{\Gamma}^{c} A_0$ и наоборот, т. е. каждая точка этой контингенции есть производное число функции f в соответствующем направлении.

Определение. *Континуум K на цилиндре C^m (и на S^m, когда K не содержит бесконечно удаленных точек $\pm\infty$) назовем регулярным, если каждая образующая цилиндра (полумеридиан сферы) пересекает его по связному множеству.*

Если $K \subset C^m$ — регулярный континуум, то естественным образом возникают две функции: $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$, $\varphi \in S^{m-1}$. Именно точки $(\varphi, \mathcal{P}(\varphi))$ и $(\varphi, Q(\varphi))$ континуума K суть, соответственно, самая верхняя и самая нижняя точка из K на образующей $\varphi = \mathrm{const}$ цилиндра C^m. Легко видеть, что функции $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ (которые могут принимать и бесконечные значения) полунепрерывны, соответственно, сверху и снизу; конечно, при этом для каждого $\varphi \in S^{m-1}$ $\mathcal{P}(\varphi) \geq Q(\varphi)$.

Мы доказали, что цилиндрическая контингенция графика непрерывной функции $u = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^m$, в каждой точке $A \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{m+1}$ есть регулярный континуум. Покажем теперь, что и обратно, каков бы ни был регулярный континуум K на C^m, найдется непрерывная функция $u = f(x)$, график которой в некоторой точке имеет контингенцию, совпадающую с K. Прежде чем доказать это утверждение, приведем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ — полунепрерывные соответственно сверху и снизу функции на S^{m-1}, причем $\mathcal{P}(\varphi) \geq Q(\varphi)$ для всех $\varphi \in S^{m-1}$. Тогда множество точек*

$$K = \bigcup_{\varphi \in S^{m-1}} \left[\, Q(\varphi), \mathcal{P}(\varphi) \right]$$

есть регулярный континуум на цилиндре $C^m = S^{m-1} \times \overline{\mathbb{R}}^1$.

Доказательство. Сначала докажем, что K замкнут в C^m. Пусть $x_p \in K$, $x_p \to x_0 \in C^m$; докажем, что $x_0 \in K$.

Рассмотрим проекции φ_p точек x_p на S^{m-1}. Очевидно, $\lim \varphi_p = \varphi_0 = \mathrm{np}\, x_0$. Можем считать, что существуют (конечные или бесконечные) пределы $\lim\limits_{p\to\infty} \mathcal{P}(\varphi_p)$, $\lim\limits_{p\to\infty} Q(\varphi_p)$. В силу полунепрерывности $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ получим $\mathcal{P}(\varphi_0) \geq \lim \mathcal{P}(\varphi_p)$ и $Q(\varphi_0) \leq \lim Q(\varphi_p)$. Следовательно, предел отрезков $[Q(\varphi_p), \mathcal{P}(\varphi_p)]$ принадлежит отрезку $[Q(\varphi_0), \mathcal{P}(\varphi_0)] \subset K$. Поэтому x_0 есть точка этого отрезка, и значит, $x_0 \in K$. Итак, K — компакт в C^m.

Теперь докажем связность K; предположим, что K не связен; тогда $K = K_1 \cup K_2$, где K_1, K_2 — непустые компакты, которые находятся на положительном растоянии один от другого: $\rho(K_1, K_2) > 0$. Так как над каждым $\varphi \in$

$\in S^{m-1}$ точки компакта K образуют связное множество $[Q(\varphi), \mathcal{P}(\varphi)]$, то каждое такое множество принадлежит либо K_1, либо K_2. Проекции компактов K_1 и K_2 на S^{m-1} обозначим через A и B; тогда A, B — также не пустые компакты и $A \cup B = S^{m-1}$. Из связности S^{m-1} следует, что $A \cap B \neq 0$; но тогда образующая $\varphi = \varphi_0$, где $\varphi_0 \in A \cap B$, содержит отрезок $[Q(\varphi_0), \mathcal{P}(\varphi_0)]$, принадлежащий как K_1, так и K_2, что противоречит тому, что они, по предположению, не пересекаются. Это противоречие доказывает связность компакта K. Значит, K — континуум. Регулярность вытекает из того, что каждой точке $\varphi \in S^{m-1}$ соответствует отрезок $[Q(\varphi), \mathcal{P}(\varphi)]$ — связное множество. Тем самым лемма доказана.

Пусть теперь K – произвольный ограниченный регулярный континуум в C^m, т. е. $K \subset S^{m-1} \times [-M, M]$, где $M > 0$ — некоторое конечное число.

Введем функции $\mathcal{P}(\varphi), Q(\varphi)$ следующим образом. Берем для $\forall \varphi \in S^{m-1}$ самую верхнюю и самую нижнюю точки континуума K. Верхние точки образуют полунепрерывную сверху функцию $\mathcal{P}(\varphi)$, а нижние — полунепрерывную снизу функцию $Q(\varphi)$.

Рассмотрим сначала функцию $\mathcal{P}(\varphi)$. Известно, что существует монотонно невозрастающая последовательность непрерывных функций $\{p_n(\varphi)\}$, сходящаяся к функции $\mathcal{P}(\varphi)$.

Пусть $U_\varepsilon(K)$, $\varepsilon > 0$, — некоторая окрестность K; покажем, что, начиная с некоторого номера, все графики функций $p_n(\varphi)$ попадут в эту окрестность.

Предположим противное; пусть найдется подпоследовательность функций $\{p_{n_k}(\varphi)\}$ такая, что все графики их $B(p_{n_k}) = B_k$ содержат точки, не принадлежащие $U_\varepsilon(K)$. Выбрав какие-либо точки из них, получим последовательность точек $x_k \in B_k$ для $\forall k$, которую можем считать сходящейся: $x_k \to x_0 \in C^m$. По построению $x_0 \notin U_\varepsilon(K)$.

Пусть $\varphi_0 = \text{пр}\, x_0$. По условию последовательность $\{p_n(\varphi_0)\}$, а потому и $\{p_{n_k}(\varphi_0)\}$ сходится. Поэтому точки $\xi_k = (\varphi_0, p_{n_k}(\varphi_0))$ графиков B_k сходятся к некоторой точке $\xi_0 = (\varphi_0, \mathcal{P}(\varphi_0))$ континуума K. Очевидно, для всех n будет выполняться $p_n(\varphi) \geq \mathcal{P}(\varphi)$ для каждого значения $\varphi \in S^{m-1}$.

Пусть $\lim p_{n_k}(\varphi_k) = p_0$. По условию точка $x_0 = (\varphi_0, p_0) \notin K$, поэтому легко видеть, что $p_0 > \mathcal{P}(\varphi_0)$, более того, $p_0 \geq \mathcal{P}(\varphi_0) + \varepsilon$. При $k \geq k_0$ для всех k и некотором $\varepsilon > 0$ $p_{n_k}(\varphi_k) > p_0 - \varepsilon/3$; начиная с некоторого k выполняется неравенство $p_{n_k}(\varphi_0) < \mathcal{P}(\varphi_0) + \varepsilon/3$. Из монотонности последовательности $\{p_n(\varphi)\}$ имеем $p_{n_{k_0}}(\varphi_k) \geq p_{n_k}(\varphi_k) > p_0 - \varepsilon/3$, $k > k_0$. Из непрерывности функции $p_n(\varphi)$ вытекает $\lim p_{n_{k_0}}(\varphi_k) = p_{n_{k_0}}(\varphi_0)$. Тогда

$$p_0 - \varepsilon/3 \leq p_{n_{k_0}}(\varphi_0) < \mathcal{P}(\varphi_0) + \varepsilon/3,$$

$$p_0 - \varepsilon/3 < \mathcal{P}(\varphi_0) + \varepsilon/3, \quad p_0 - \mathcal{P}(\varphi_0) < 2\varepsilon/3.$$

В результате имеем $p_0 < \mathcal{P}(\varphi_0) + 2\varepsilon/3$. Это противоречит тому, что $p_0 \geq \mathcal{P}(\varphi_0) + \varepsilon$. Противоречие доказывает утверждение о том, что, начиная с некоторого номера, все графики функций $p_n(\varphi)$ попадают в $U_\varepsilon(K)$. Аналогичным образом можно доказать, что найдется возрастающая последовательность $\{q_n(\varphi)\}$ непрерывных функций, сходящаяся к $Q(\varphi)$ и, начиная с некоторого значения $n > N$, все графики функций $q_n(\varphi)$ попадают в $U_\varepsilon(K)$.

Пусть K — регулярный континуум на C^m. Как было указано, функции $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$, соответствующие регулярному континууму, полунепрерывны. Следует заметить, что этот континуум K может содержать и точки $\pm\infty$. Поэтому значения $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ тоже могут обращаться в $\pm\infty$.

Построим следующие усеченные функции

$$u = \mathcal{P}_n(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \mathcal{P}(\varphi) > \sqrt{n}, \\ \mathcal{P}(\varphi), & -\sqrt{n} \leq p(\varphi) \leq \sqrt{n}, \\ -\sqrt{n}, & \mathcal{P}(\varphi) < -\sqrt{n}, \end{cases}$$

и

$$v = Q_n(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{n}, & Q(\varphi) > \sqrt{n}, \\ Q(\varphi), & -\sqrt{n} \leq Q(\varphi) \leq \sqrt{n}, \\ -\sqrt{n}, & Q(\varphi) < -\sqrt{n}. \end{cases}$$

Легко показать, что $\mathcal{P}_n(\varphi)$ и $Q_n(\varphi)$ — полунепрерывные соответственно сверху и снизу функции. Этим функциям ввиду леммы соответствует некоторый регулярный континуум K_n, причем $K_n \subset K_{n+1}$ для $\forall n$. Кроме того, очевидно, все K_n содержатся в K. Тогда регулярный континуум K можно представить следующим образом: $K = \overline{\bigcup_n K_n}$; $\operatorname{lt}_n K_n = K$ при $n \to \infty$.

Действительно, пусть $U_{1/n}(K_n)$ — некоторая $1/n$–окрестность ограниченного регулярного континуума K_n.

Тогда справедливо следующее соотношение:

$$K_n = K(Q_n, \mathcal{P}_n) \subset U_{1/n}(K_n).$$

Так как $\operatorname{lt}_n K_n = K$, то, очевидно, $\operatorname{lt}_n U_{1/n}(K_n) = K$. Поэтому легко видеть, что $\lim \mathcal{P}_n(\varphi) = \mathcal{P}(\varphi)$ и $\lim Q_n(\varphi) = Q(\varphi)$. В $1/n$–окрестности $U_{1/n}(K_n)$ найдутся графики непрерывных функций $p_n(\varphi)$ и $q_n(\varphi)$, которые также сходятся, соответственно, к $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$ и, очевидно, $p_n(\varphi) \leq \sqrt{n} + 1/n$ и $q_n(\varphi) \geq -(\sqrt{n} + 1/n)$, т. е. $\lim p_n(\varphi) = \mathcal{P}(\varphi)$ и $\lim q_n(\varphi) = Q(\varphi)$. Значит, мы построили последовательности непрерывных функций $\{p_n(\varphi)\}$ и $\{q_n(\varphi)\}$ (о монотонности ничего нельзя сказать), сходящиеся, соответственно, к $\mathcal{P}(\varphi)$ и $Q(\varphi)$.

Рассмотрим функцию вида

$$f(r, \varphi) = r\left(A \sin^2(\pi/2r) + B\right)$$

и подберем $A = A(\varphi)$ и $B = B(\varphi)$ так, чтобы максимальное значение отношения

f/r на отрезке $[1/2n, 1/(2n-1)]$ равнялось $p_n(\varphi)$, а минимальное — $q_n(\varphi)$.

Легко видеть, что для этого должно быть

$$A = p_n(\varphi) - q_n(\varphi),$$
$$B = q_n(\varphi).$$

Тогда

$$f(r,\varphi) = r(p_n(\varphi) - q_n(\varphi))\sin^2(\pi/2r) + q_n(\varphi)\, r.$$

Для отрезка $[1/(2n+1), 1/2n]$ потребуем, чтобы $\max f/r$ равнялся $p_{n+1}(\varphi)$, а $\min f/r$ — $q_n(\varphi)$; тогда

$$f(r,\varphi) = r(p_{n+1}(\varphi) - q_n(\varphi))\sin^2(\pi/2r) + q_n(\varphi) r.$$

Таким образом,

$$f(r,\varphi) = \begin{cases} r\big(p_n(\varphi) - q_n(\varphi)\big)\sin^2(\pi/2r) + q_n(\varphi)r, & r \in [1/2n,\ 1/(2n-1)], \\ r\big(p_{n+1}(\varphi) - q_n(\varphi)\big)\sin^2(\pi/2r) + q_n(\varphi)r, & r \in [1/(2n+1),\ 1/2n], \end{cases}$$

причем полагаем $f(0,0) = 0$.

Покажем, что для построенной функции контингенция ее графика в начале координат совпадает с данным регулярным континуумом K.

Выберем произвольное направление $\varphi_0 \in S^{m-1}(0)$; покажем, что максимальным и минимальным производным числом функции $f(r,\varphi_0)$ будет соответственно $\mathcal{P}(\varphi_0)$ и $Q(\varphi_0)$. Действительно, на отрезке вида $[1/(2n+1),\ 1/(2n-1)]$ имеем

$$\max \frac{f(r,\varphi_0)}{r} = p_n(\varphi_0), \quad \min \frac{f(r,\varphi_0)}{r} = q_n(\varphi_0),$$

а поэтому

$$\varlimsup_{r\to 0} \frac{f(r,\varphi_0)}{r} = \lim p_n(\varphi_0) = \mathcal{P}(\varphi_0)$$

и

$$\varliminf_{r\to 0} \frac{f(r,\varphi_0)}{r} = \lim q_n(\varphi_0) = Q(\varphi_0).$$

Докажем теперь, что для любой последовательности направлений $\{\varphi_m\}$, сходящейся к φ_0, и любой последовательности точек (r_m, φ_m) выполняются неравенства

$$\varlimsup \frac{f(r_m,\varphi_m)}{r_m} \le \mathcal{P}(\varphi_0),$$

$$\varliminf \frac{f(r_m,\varphi_m)}{r_m} \ge Q(\varphi_0),$$

из чего будет следовать, что все производные числа f в направлении φ_0 в точности совпадают с отрезком $[Q(\varphi_0), \mathcal{P}(\varphi_0)]$. Будем доказывать первое неравенство; второе доказывается аналогично.

Обозначим через $[1/(2n_m+1),\ 1/(2n_m-1)]$ отрезок, содержащий r_m, и предположим, что последовательности $\{p_{n_m}(\varphi_m)\}$, $\{q_{n_m}(\varphi_m)\}$ сходятся.

$$\frac{f(r_m,\varphi_m)}{r_m}=\begin{cases}\left(p_{n_m}(\varphi_m)-q_{n_m}(\varphi_m)\right)\sin^2\pi/2r_m+q_{n_m}(\varphi_m), & r_m\in[1/2n_m,\ 1/(2n_m-1)],\\ \left(p_{n_m+1}(\varphi_m)-q_{n_m}(\varphi_m)\right)\sin^2\pi/2r_m+q_{n_m}(\varphi_m), & r_m\in[1/(2n_m+1),\ 1/2n_m].\end{cases}$$

Отсюда

$$q_{n_m}(\varphi_m)\le\frac{f(r_m,\varphi_m)}{r_m}\le p_{n_m}(\varphi_m).$$

Возможны следующие случаи: 1)

$$\mathcal{P}(\varphi_0)\neq+\infty,\ \mathcal{Q}(\varphi_0)\neq-\infty.$$

Тогда найдется окрестность $U(\varphi_0)\subset S^{m-1}$ такая, что для $\forall\ \varphi\in U$ будет выполняться $\mathcal{P}(\varphi)<N$, а для всех $n_m>N$ $\mathcal{P}_{n_m}(\varphi)=\mathcal{P}(\varphi)$.

Отсюда следует, что в этой окрестности $U(\varphi_0)$ $p_{n_m}(\varphi)\searrow\mathcal{P}(\varphi)$. Или $\max\frac{f(r,\varphi)}{r}\le p_{n_m}(\varphi)$. Тогда $\overline{\lim}\,\frac{f(r,\varphi)}{r}\le\mathcal{P}(\varphi)$.

2) $\mathcal{P}(\varphi_0)=+\infty$. В этом случае $p_n(\varphi_0)\nearrow\infty$, и первое неравенство выполняется; $\mathcal{Q}(\varphi_0)=-\infty$; второе неравенство тоже справедливо.

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathcal{P}(\varphi_0)=-\infty$. Тогда найдется окрестность $U(\varphi_0)$ такая, что для $\forall\ \varphi\in U$ $\mathcal{P}(\varphi)<-N$ для достаточно больших N и $\boldsymbol{p}_n(\varphi)<-N+1/n$. Тогда

$$\lim\frac{f(r_m,\varphi_m)}{r_m}=-\infty=\mathcal{P}(\varphi_0).$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. *Цилиндрическая контингенция графика непрерывной функции* $u=f(x)$, $x\in D\subset\mathbb{R}^m$, *в каждой точке* $A\in\Gamma\subset\mathbb{R}^{m+1}$ *есть регулярный континуум; и наоборот, для всякого регулярного континуума* K *на* C^m *найдется непрерывная функция* $u=f(x)$, *график которой в некоторой его точке имеет цилиндрическую контингенцию, совпадающую с этим континуумом* K.

1. *Сакс С*. Теория интеграла.– М.: Изд-во иностр. лит., 1949.– 494 с.
2. *Трохимчук Ю. Ю*. О дифференциальных свойствах вещественных и комплексных функций // Десятая математическая школа.– Киев: Ин–т математики АН УССР, 1974.– С. 330–360.

Получено 19.12.91