УДК 519.21

**Л. В. Ковальчук**, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

# ПОСТРОЕНИЕ ЛОГАРИФМА ОТ ПРОЦЕССА НА МАТРИЧНОЙ ГРУППЕ ЛИ

Для процесса, принимающего значения в матричной группе Ли, строится его логарифм — процесс со значениями в соответствующей алгебре Ли. При этом сохраняются некоторые свойства процесса (стохастическая непрерывность, независимость приращений и т. д.).

Для процесу, що набуває значень у матричній групі Лі, будується його логарифм — процес зі значеннями у відповідній алгебрі Лі. При цьому зберігаються деякі властивості процесу (стохастична неперервність, незалежність приростів і т. д.).

В настоящей статье исследуются семимартингалы, принимающие значения в матричной группе Ли $G$. Таким процессам посвящены работы многих авторов. Например, в ([1], гл. V) изучаются стохастически непрерывные мультипликативные процессы на произвольных топологических группах, в [2] описывается инфинитезимальный оператор броуновского движения на экспоненциальной группе Ли.

Настоящая работа примыкает к работам [3, 4]. В [3] изучается так называемое вложение — построение броуновского движения на экспоненциальной группе Ли с помощью мультипликативного интеграла, в [4] по стохастической матричной полугруппе строится процесс с независимыми приращениями, принимающий значения в алгебре всех матриц.

Так как группа Ли локально связана со своей алгеброй экспоненциальным соответствием, то для изучения структуры процесса в группе в работе строится его "логарифм" — процесс в алгебре — таким образом, что при этом наследуются его основные вероятностные свойства (независимость приращений, стохастическая непрерывность и т. д.). При этом в определении независимости приращений у процесса на группе рассматриваются мультипликативные приращения.

Хотя в работе изучаются только матричные группы, большая часть полученных результатов справедлива для произвольной группы Ли вследствие того, что она локально изоморфна матричной.

Статья состоит из двух пунктов. П. 1 содержит вспомогательные утверждения. В п. 2 приведена основная теорема.

**1.** Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t\ge 0}, P)$ — вероятностное пространство с фильтрацией. Обозначим через $M_N$ пространство вещественных матриц размерности $N \times N$, $G$ — подгруппа $\mathrm{GL}(N)$, $g$ — ее алгебра Ли. Процессы, которые встречаются в этой работе, отображают $[0, 1] \times \Omega$ в $M_N$, $G$ или $g$. Пусть $S$ — класс стохастически непрерывных матричнозначных $(\mathfrak{F}_t)_{t\ge 0}$-семимартингалов, $\mathfrak{D}([0, 1])$ — пространство матричнозначных случайных функций на $[0, 1]$, непрерывных справа, имеющих пределы слева, $(\mathfrak{F}_t)_{t\ge 0}$-согласованных. Приращение процесса $X(t)$, $X((k+1)/n) - X(k/n)$, $k = \overline{0, n-1}$, будем обозначать $\Delta_n X(k/n)$.

**Лемма 1.** *Пусть* $F(t) \in \mathfrak{D}([0, 1])$; $X(t), Z(t) \in S$. *Тогда*

$$\mathrm{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left( F\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_n Z\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 F(\tau)\, d[X, Z]_\tau .$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 1 из [5].

**Лемма 2.** *Пусть* $F(t) \in \mathfrak{D}([0, 1])$; $X(t) \in S$. *Тогда*

$$\mathrm{P}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)\Delta_n\, X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 = [Y, Y]_1, \tag{1}$$

*где*

$$Y(t) = \int_0^t F(\tau)\, dX(\tau).$$

Доказательство. Обозначим

$$X(t) = \left(x_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{N};\; F(t) = \left(f_{ij}(t)\right)_{i,j=1}^{N}.$$

Матричные элементы $x_{ij}(t), f_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, N}$, являются стохастически непрерывными процессами без разрывов II-го рода; кроме того, $x_{ij}(t)$ — семимартингалы. Поэтому существует

$$\int_0^t f_{il}(\tau)\, d\, x_{lj}(\tau),\; i, l, j = \overline{1, N},$$

являющийся семимартингалом. Тогда процесс $Y(t)$ из условия леммы будет матрицей с элементами

$$y_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{N}\int_0^t f_{il}(\tau)\, d\, x_{lj}(\tau),\;\; i, j = \overline{1, N}.$$

Так как $y_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, N}$, — семимартингалы, то семимартингалом будет и $Y(t)$; следовательно, существует $[Y, Y]_t$, и по свойству квадратичной ковариации для матричных семимартингалов (теорема 1 из [5])

$$[Y, Y]_1 = \mathrm{P}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\Delta_n\, Y\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 = \mathrm{P}-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\tau)\, dX(\tau)\right)^2.$$

Поэтому выполнение равенства (1) равносильно выполнению следующего требования:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)\Delta_n\, X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\tau)\, dX(\tau)\right)^2 \xrightarrow{P} 0,\; n\to\infty.$$

Пространство матриц конечномерно, поэтому достаточно доказать поэлементную сходимость. Элементы матриц

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k}{n}\right)\Delta_n\, X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 \;\text{ и }\; \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} F(\tau)\, dX(\tau)\right)^2$$

имеют вид

$$a_{ij}^{(n)} = \sum_{s,l,p=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} f_{il}\left(\frac{k}{n}\right) f_{sp}\left(\frac{k}{n}\right)\Delta\, x_{sp}\left(\frac{k}{n}\right)\Delta\, x_{pj}\left(\frac{k}{n}\right)$$

и

$$b_{ij}^{(n)} = \sum_{s,l,p=1}^{N}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f_{il}(\tau)\, dx_{ls}(\tau)\right)\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f_{sp}(\tau)\, dx_{pj}(\tau)\right)$$

соответственно.

Покажем, что $a_{ij}^{(n)} - b_{ij}^{(n)} \xrightarrow{P} 0,\ n \to \infty,\ i, j = \overline{1, N}$. Из леммы 1 получаем

$$P - \lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = \sum_{s,l,p=1}^{N} \int_0^1 f_{il}(\tau)\, f_{sp}(\tau) d[x_{ls}, x_{pj}]_\tau.$$

Кроме того, в силу свойства совместной квадратичной ковариации скалярных семимартингалов и интегралов по ним [6] получаем

$$P - \lim_{n\to\infty} b_{ij}^{(n)} = \sum_{s,l,p=1}^{N} \left[ \int_0^1 f_{il}(\tau)\, dx_{ls}(\tau), \int_0^1 f_{sp}(\tau)\, dx_{pj}(\tau) \right]_1 =$$

$$= \sum_{s,l,p=1}^{N} \int_0^1 f_{il}(\tau)\, f_{sp}(\tau)\, d\big[x_{ls}, x_{pj}\big]_\tau,$$

что и доказывает лемму.

**Следствие.** *Существует предел по вероятности*

$$P - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| F\left(\frac{k}{n}\right) \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right\|^2.$$

**Лемма 3.** *Пусть* $h(z)$, $h(1) = 0$, *— вещественнозначная функция, аналитическая в некоторой окрестности единицы* $(1 - \alpha,\ 1 + \alpha)$, $\alpha \in (0; 1)$. *Предположим, что существует такая константа* $L > 0$, *что* $h^{(m)}(1) \le Lm!,\ m \ge 3$. *Если все мультипликативные скачки процесса* $X(t)$ *удовлетворяют условию* $\| X(\tau -) X(\tau) - I \| < \alpha$ *с вероятностью* 1, *то*

$$P - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right)^m = \sum_{\tau\in[0,1]} \Big( h\left( X(\tau-)^{-1} X(\tau) \right) -$$

$$- h'(t) \left( X(\tau-)^{-1} X(\tau) - I \right) - \frac{h''(1)}{2} \left( X(\tau-)^{-1} X(\tau) - I \right)^2 \Big), \qquad (2)$$

*где* $h(A), A \in G$, *понимается как сумма соответствующего ряда Тейлора.*

**Замечание.** Поскольку все мультипликативные скачки процесса $X(t)$ принадлежит по условию леммы области аналитичности функции $h(z)$ с вероятностью 1, то для каждого $\omega \in \Omega$, начиная с некоторого разбиения, все приращения процесса $X(t)$ вида $X(k/n)^{-1} X((k+1)/n)$ будут принадлежать области аналитичности $h(z)$; для этого и последующих разбиений определено выражение $h(X(k/n)^{-1} X((k+1)/n))$, $k = \overline{0, n-1}$, т. е. сходится соответствующий ряд Тейлора функции $h(z)$.

Доказательство леммы 3. Поскольку $X(t)$ — стохастически непрерывный семимартингал, то для любого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0; 1]$ $X(t)$ имеет с вероятностью 1 конечное число $\varepsilon$-колебаний.

Для каждого $\varepsilon = 1/l,\ l \ge 1$, определим набор моментов остановки $\tau_i^l$ следующим образом:

$$\tau_i^l = 0,\ \tau_{i+1}^l = \inf\left\{ t : \left\| X(t) - X(\tau_i^l) \right\| \ge \frac{\varepsilon_l}{2} \right\}.$$

Таких моментов с вероятностью 1 конечное число $r^l = r^l(\omega)$. Поэтому для каждого $\omega \in \Omega$ существует такое достаточно большое $N^l = N^l(\omega)$, что для любого $n > N^l$ на каждом интервале $(k/n, (k+1)/n]$, $k = \overline{0, n-1}$, будет не более одной точки $\tau_i^l$, $i = \overline{1, r(\omega)}$.

Обозначим через $k_i^l$, $i = \overline{1, r^l(\omega)}$, те индексы, для которых $\tau_i^l \in \left(k_i^l / n;\right.$ $\left.(k_i^l + 1)/n\right]$. Тогда для всех остальных $k = \overline{0, n-1}$, $k \neq k_i^l$, $i = \overline{1, r^l(\omega)}$, выполнено следующее: если $t_1, t_2 \in (k/n, (k+1)/n]$, то

$$\| X(t_1) - X(t_2) \| \le \| X(t_1) - X(\tau_i^l) \| + \| X(t_2) - X(\tau_i^l) \| < \varepsilon_l$$

с вероятностью 1 , где $\tau_i^l < k/n < t_1, t_2 \le (k+1)/n < \tau_{i+1}^l$.

Для каждого $\varepsilon_l$, $l \ge 1$, разобьем сумму в левой части (2) на два слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right)\right)^m = \sum_{i=1}^{r^l(\omega)} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k_i^l}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k_i^l}{n}\right)\right)^m +$$

$$+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_i^l,\, i=\overline{1, r^l(\omega)}}}^{n-1} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k_i^l}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k_i^l}{n}\right)\right)^m = I_1^{n,l}(\omega) + I_2^{n,l}(\omega).$$

При $n \to \infty$

$$I_1^{n,l}(\omega) \to \sum_{\{\tau: \| X(\tau) - X(\tau-) \| \ge 1/l\}} \Big( h\left(X(\tau-)^{-1} X(\tau)\right) - h'(1)\left(X(\tau-)^{-1} X(\tau) - I\right) -$$

$$- \frac{h''(1)}{2}\left(X(\tau-)^{-1} X(\tau) - I\right)^2 \Big).$$

Оценим $\left\| I_2^{n,l}(\omega) \right\|$. Поскольку $X(t)^{-1}$, $t \in [0; 1]$, не имеет разрывов II-го рода, то для каждого $\omega \in \Omega$ существует такая константа $C = C(\omega)$, что

$$\| X(t)^{-1} \| \le C(\omega),\ t \in [0; 1].$$

Тогда

$$\left\| I_2^{n,l}(\omega) \right\| \le \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_i^l,\, i=\overline{1, r^l(\omega)}}}^{n-1} L \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{C(\omega)}{l} \right)^{m-2} \left\| X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right\|^2$$

Для каждого $\omega \in \Omega$ при $l > C(\omega)$: $| C(\omega) / l | < 1$; для таких $l$

$$\left\| I_2^{n,l}(\omega) \right\| \le L \frac{C(\omega)}{l - C(\omega)} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right\|^2.$$

В силу следствия из леммы 2 последовательность

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\| X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right\|^2,\ n \ge 1,$$

имеет предел по вероятности; значит, из любой ее подпоследовательности можно выделить подпоследовательность

$$\sum_{k=0}^{n_j - 1} \left\| X\left(\frac{k}{n_j}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n_j}\right) \right\|^2,\ j \ge 1, \tag{*}$$

с неслучайными и не зависящими от $\varepsilon_l$, $l \ge 1$, индексами $n_j$, $j \ge 1$, сходящуюся с вероятностью 1 к тому же самому пределу. Тогда при любом $n_j, j \ge 1$, последовательность

$$\sum_{k=0}^{n_j-1} \left\| X\left(\frac{k}{n_j}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n_j}\right) \right\|^2, \ j \ge 1,$$

ограничена некоторой константой $M(\omega)$. Поэтому

$$\left\| I_2^{n_j,l}(\omega) \right\| \le \frac{LC(\omega)M(\omega)}{l - C(\omega)},$$

при $l \to \infty$

$$\left\| I_2^{n_j,l}(\omega) \right\| \to 0, \text{ с вероятностью } 1, j \ge 1.$$

Все предельные точки подпоследовательности $I_1^{n_j,l}(\omega) + I_2^{n_j,l}(\omega), j \ge 1$, будут лежать в шаре с центром $I_1^{n_j,l}(\omega)$ и радиусом, не превышающим $LC(\omega) \times \times M(\omega) / (l - C(\omega))$. При $l \to \infty$ радиус стремится к нулю с вероятностью 1, и поэтому предельная точка последовательности единственная:

$$\sum_{\tau \in [0;1]} \left( h\left(X(\tau-)^{-1} X(\tau)\right) - h'(1)\left(X(\tau-)^{-1} X(\tau) - I\right) - \frac{h''(1)}{2}\left(X(\tau-)^{-1} X(\tau) - I\right)^2 \right).$$

Таким образом, из любой подпоследовательности последовательности

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right)^m; \ n \ge 1,$$

можно выбрать сходящуюся с вероятностью 1 подпоследовательность, и все такие подпоследовательности будут сходиться к одному пределу. Поэтому сама последовательность будет сходиться к тому же пределу по вероятности.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Тогда*

$$P - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} h\left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) =$$

$$= P - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \Delta_n X\left(\frac{k}{n}\right) \right)^m =$$

$$= h'(1)\, Y(1) + \frac{h''(1)}{2}[Y, Y]_1 + \sum_{\tau \in [0;\, 1]} \left( h\left(X(\tau -)^{-1} X(\tau)\right) - \right.$$

$$\left. - h'(1)\left(X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I\right) - \frac{h''(1)}{2}\left(X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I\right)^2 \right), \tag{3}$$

где

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)^{-1}\, dX(\tau),$$

Доказательство. Разобьем левую часть в (3) на четыре слагаемых:

$$\sum_{k=0}^{n-1} h(1) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h'(1)}{1!} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} X\left(\frac{k+1}{n}\right) - I \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h''(1)}{2} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} X\left(\frac{k+1}{n}\right) - I \right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \left( X\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} X\left(\frac{k+1}{n}\right) - I \right)^m .$$

Первое слагаемое — это $\sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0$. Второе слагаемое стремится по вероятности к

$$h'(1) \int_0^1 X(\tau)^{-1} \, d X(\tau).$$

Третье слагаемое согласно лемме 2 стремится по вероятности к $\frac{h''(1)}{2}[Y, Y]_1$, а четвертое в силу леммы 3 — к правой части равенства (2).

**Замечание.** До сих пор для простоты рассматривались равномерные разбиения отрезка $[0; 1]$. Однако полученные результаты справедливы для любого разбиения $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ отрезка $[0; t], t \in [0; 1]$, т. е.

$$P - \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\left( X\left(t_k\right)^{-1} X\left(t_{k+1}\right)\right) = P - \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(1)}{m!} \times$$

$$\times \left( X\left(t_k\right)^{-1} X\left(t_{k+1}\right) - I\right)^m = h'(1) Y(t) + \frac{h''(1)}{2}[Y, Y]_t +$$

$$+ \sum_{\tau \in [0;1]} \left( h\left(X(\tau -)^{-1} X(\tau)\right) - h'(1) \left(X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{h''(1)}{2} \left(X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I\right)^2 \right). \qquad (4)$$

Процесс, стоящий в правой части (4), построенный по исходному процессу $X(t)$, будем обозначать $h(X)(t)$, $t \in [0;1]$. Этот процесс также является семимартингалом, поскольку $h(X)(t) - h'(1)\, Y(t)$ будет иметь ограниченную вариацию.

**Следствие 1.** *Пусть процесс* $X(t)$ *непрерывен с вероятностью* 1. *Тогда процесс*

$$h(X)(t) = h'(1) Y(t) - \frac{h''(1)}{2} \langle Y, Y \rangle_t$$

*также непрерывен с вероятностью* 1.

**Следствие 2.** *Если процесс* $X(t)$ *имеет независимые мультипликативные приращения, то процесс* $h(X)(t)$ *имеет независимые аддитивные приращения.*

Доказательство. По определению

$$h(X)(t) = P - \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} h\left( X\left(t_k\right)^{-1} X\left(t_{k+1}\right)\right).$$

Тогда для $s, t \in [0; 1], s < t$:

$$h(X)(t) - h(X)(s) = P - \lim_{\max \Delta u_k \to 0} \sum_{k=0}^{l-1} h\left( X\left(u_k\right)^{-1} X\left(u_{k+1}\right)\right),$$

где $s = u_0 < u_1 < \ldots < u_l = t$.

При $k = \overline{0, l-1}$ слагаемые $h\left( X\left(u_k\right)^{-1} X\left(u_{k+1}\right)\right)$ не зависят от мультипликативных приращений процесса $X(t)$ до момента $s$ включительно, а значит, и от $h(X)(s)$. Следовательно, разность $h(X)(t) - h(X)(s)$ также не зависит от $h(X)(s)$, $0 \le s < t \le 1$.

**2.** Рассмотрим случай, когда в теореме 1 $h(z) = \ln z$. Тогда если $\| X(\tau -)^{-1} \times \times X(\tau) - I \| < 1$, с вероятностью 1, $\tau \in [0; 1]$, то существует $\ln (X)(t)$, и выполняется равенство

$$\ln (X)(t) = Y(t) - \frac{1}{2}[Y, Y]_1 + \sum_{\tau \in [0;\, 1]} \Big( \ln \left( X(\tau -)^{-1} X(\tau) \right) - $$
$$- \left( X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I \right) + \frac{1}{2} \left( X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I \right)^2 \Big). \tag{5}$$

Пусть $G < GL(N)$, $g$ — ее алгебра Ли (касательное пространство в единице). Тогда в окрестности $U_I$ единицы $I$ в группе $G$ такой, что $U_I = \{ A \in G \colon \| A - - I \| \le \alpha < 1 \}$, действует отображение $U_I \to V$, где $V$ — некоторая окрестность нуля в алгебре $g$. В этой окрестности матричная функция ln является аналитической, и для нее справедлива теорема 1. Кроме того, процесс $\ln (X)(t)$ будет принимать значения в алгебре $g$. Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $X(t)$, $t \in [0; 1]$, — стохастически непрерывный процесс, принимающий значения в группе Ли $G$, являющийся семимартингалом. Предположим, что его мультипликативные скачки такие, что*

$$\| X(\tau -)^{-1} X(\tau) - I \| < 1 \quad \textit{с вероятностью } 1,\ \tau \in [0; 1].$$

*Тогда существует процесс $x(t)$, $t \in [0; 1]$, на ее алгебре Ли $g$, определенный равенством (5), который будем называть логарифмом процесса $X(t)$. Этот процесс также будет стохастически непрерывным семимартингалом. При этом:*

*1) если $X(t)$ непрерывен с вероятностью 1, то $x(t) = Y(t) - \frac{1}{2}\langle Y, Y \rangle_t$ также непрерывен с вероятностью 1;*

*2) если $\tau$ — точка скачка процесса $X(t)$, то процесс $x(t)$ также будет иметь скачок в этой точке и $x(\tau) - x(\tau -) = \ln (X(\tau -)^{-1} X(\tau))$, где логарифм определен как соответствующий ряд Тейлора;*

*3) если $X(t)$ имеет независимые мультипликативные приращения, то $x(t)$ имеет независимые аддитивные приращения.*

**Замечание.** Если не стремиться к тому, чтобы процесс $x(t)$ принимал значения именно в алгебре Ли $g$ группы Ли $G$, то достаточно положить

$$x(t) = \int_0^t X(\tau)^{-1} \, dX(\tau),$$

как это сделано в [4].


1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1986. – 320 с.
2. *Feinsilver P.* An operator approach to processes on Lie groups // Probl. theory on vect. spaces. – 1987. – **1391**, №6. – P. 59 – 65.
3. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. – М.: Мир, 1972. – 182 с.
4. *Скороход А. В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. – 1982. – **34**, №6. – С. 157 – 185.
5. *Ковальчук Л. В.* Некоторые свойства матричных мартингалов // Стохастические уравнения и граничные теоремы. – Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1991. – С. 91 – 101.
6. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов: – М.: Наука, 1986. – 512 с.


Получено 20. 06. 91