УДК 517.51

О.Н. Литвин, д-р физ.-мат. наук (Харьк. инж.-пед. ин-т)

ИНТЕРЛИНАЦИЯ ФУНКЦИЙ 2–Х ПЕРЕМЕННЫХ НА M ($M \geq 2$) ПРЯМЫХ С НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Предложен общий алгоритм построения операторов интерлинации $\overline{O}_{MN}f(x)$, $x = (x_1, x_2)$ со свойствами

$$\left.\frac{\partial^s \overline{O}_{MN} f}{\partial v_k^s}\right|_{\Gamma_k} = \left.\frac{\partial^s f}{\partial v_k^s}\right|_{\Gamma_k} = \varphi_{ks}(x)\big|_{\Gamma_k}, \ k = \overline{1,M}; \ \ s = \overline{0,N},$$

$$\overline{O}_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha, \ 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq M(N+1) - 1, \ \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

где $\{\Gamma_k\}$ – заданное множество прямых произвольного расположения на плоскости Ox_1x_2, $\nu_k \perp \Gamma_k$. Приведено интегральное представление остатка приближения функции $f(x)$ операторами $\overline{O}_{MN} f(x)$. Рассмотрены примеры операторов интерлинации с сохранением класса $C^r(R^2)$, а также операторов, не сохраняющих класс дифференцируемости, которому принадлежит функция $f(x)$.

Запропоновано загальний алгоритм побудови операторів інтерлінації $\overline{O}_{MN}f(x)$, $x = (x_1, x_2)$ з властивостями

$$\left.\frac{\partial^s \overline{O}_{MN} f}{\partial v_k^s}\right|_{\Gamma_k} = \left.\frac{\partial^s f}{\partial v_k^s}\right|_{\Gamma_k} = \varphi_{ks}(x)\big|_{\Gamma_k}, \ k = \overline{1,M}; \ \ s = \overline{0,N},$$

$$\overline{O}_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha, \ 0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq M(N+1) - 1, \ \ x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

де $\{\Gamma_k\}$ – задана множина прямих довільного розміщення на площині Ox_1x_2, $\nu_k \perp \Gamma_k$. Наведено інтегральне зображення залишку наближення функції $f(x)$ операторами $\overline{O}_{MN}f(x)$. Розглянуто приклади операторів інтерлінації із збереженням класу $C^r(R^2)$, а також операторів, які не зберігають клас диференційовності, якому належить функція $f(x)$.

1. Одним из важных показателей качества операторов теории приближения дифференцируемых функций является степень полиномов, восстанавливаемых этими операторами, так как в силу теорем Вейерштрасса для всякой непрерывной функции существует последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к ней в замкнутой ограниченной области. Поэтому актуальной является задача построения операторов с заданными интерлинационными свойствами, имеющих наивысшую алгебраическую точность. В данной работе приводится общий метод решения этой задачи, т.е. задачи нахождения операторов $\overline{O}_{MN}f(x)$ со свойствами (Γ_k, $k = \overline{1,M}$, – заданная система линий на плоскости)

$$\frac{\partial^s \overline{O}_{MN} f(x)}{\partial v_k^s} = \frac{\partial^s f(x)}{\partial \bar{v}_k^s} = \varphi_{ks}(x), \ x = (x_1, x_2) \in \Gamma_k, \ k = \overline{1,M}, \ \ s = \overline{0,N}, \tag{1}$$

$$\overline{O}_{MN} x^\alpha \equiv x^\alpha, \ 0 \leq |\alpha| \leq M(N+1) - 1, \ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2. \tag{2}$$

Здесь $f(x)$ — интерлинируемая функция, $f(x) \in C^r(R^2)$, $N + 1 \leq r \leq M(N+1) - 1$, $\varphi_{k,s}(x) \in C^{r-s}(R^2)$, $k == \overline{1,M}$, $s = \overline{0,N}$.

Предположим, что построен оператор интерлинации $O_{M,N}$ со свойствами

(1), не обладающий наивысшей алгебраической точностью, т.е. не удовлетворяющий условиям (2). Пусть $R_{M,N}f(x)$ – остаток приближения функции $f(x)$ операторами $O_{M,N}f(x)$:

$$f(x) = O_{M,N}f(x) + R_{M,N}f(x). \tag{3}$$

Предположим, что интерлинируемая функция $f(x)$ принадлежит классу $f(x) \in \in C^r(R^2)$, $r = M(N+1)$. Тогда для нее можно записать формулу Тейлора по степеням $(x - x^{(0)})^\alpha = (x - x_1^{(0)})^{\alpha_1}(x - x_2^{(0)})^{\alpha_2}$:

$$f(x) = T_{r-1}f(x) + R_r f(x), \tag{4}$$

где $T_{r-1}f(x)$ – полином Тейлора степени $r-1$,

$$T_{r-1}f(x) = \sum_{0\le|\alpha|\le r-1} f^{(\alpha)}(x^{(0)})\frac{(x - x^{(0)})^\alpha}{\alpha!}, \ \alpha! = \alpha_1!\alpha_2!;$$

$R_r f(x)$ — остаточный член формулы Тейлора,

$$R_r f(x) = \int_0^1 \left[\frac{\partial^r}{\partial t^r} f\left(x^{(0)} + t(x - x^{(0)})\right)\right]\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt.$$

Здесь $x^{(0)} + t(x - x^{(0)}) = (x_1^{(0)} + t(x_1 - x_1^{(0)}),\ x_2^{(0)} + t(x_2 - x_2^{(0)}))$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})$ — произвольная точка.

Теорема 1. *Оператор*

$$\overline{O}_{MN}f(x) = O_{M,N}f(x) + R_{MN}[T_{r-1}f(x)] \tag{5}$$

является интерлинантом со свойствами (1), (2).

Доказательство. Оператор $\overline{O}_{MN}$ удовлетворяет условиям (1), так как этим условиям удовлетворяет оператор $O_{M,N}$, а остаток удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^s R_{M,N}f(x)}{\partial v_k^s} = 0,\ x \in \Gamma_k,\ k = \overline{1,M},\ \ s = \overline{0,N}.$$

Справедливость равенств (2) следует из того, что всякий полином $P_{r-1}(x)$ степени $r-1$ тождественно совпадает со своим полиномом Тейлора: $P_{r-1}(x) \equiv \equiv T_{r-1}[P_{r-1}(x)]$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Аналогичный результат получим, если будем использовать вместо формулы Тейлора (4) какую-нибудь иную формулу приближения функции f полиномами степени $r-1$ (например, интерполяционную формулу Эрмита). При этом, очевидно, можно ослабить требования на дифференциальные свойства функции $f(x)$ (например, рассмотреть случай, когда $f \in C^q(R^2)$, $N+1 \le q \le M(N+1)$).

Теорема 2. *Для остатка* $\overline{R}_{M,N}f(x) = (I - \overline{O}_{MN})f(x)$ *приближения функции* f *операторами* $\overline{O}_{M,N}$ *справедливо равенство*

$$\overline{R}_{M,N}f(x) = \overline{R}_{M,N}[R_r f(x)]. \tag{6}$$

Для получения равенства (6) достаточно подставить в остаточный член $R_{M,N}$ формулы (3) вместо функции f ее формулу Тейлора (4). Теорема 2 доказана.

2. Рассмотрим примеры интерлинации на M $(M \geq 2)$ прямых. (В цитируемых ниже работах примеры рассматривались при других предположениях).

Пример 1. Рациональная интерлинация без сохранения класса $C^r(R^2)$ [1]. Пусть

$$\Gamma_k\colon \omega_k(x) := x_1 a_k + x_2 b_k - \gamma_k = 0,\ k = \overline{1,M},$$

$$a_k^2 + b_k^2 = 1,\ \nu_k = \nabla\omega_k = (a_k, b_k),\ x - \omega_k(x)\nabla\omega_k(x) = (x_1 - \omega_k(x)a_k,$$
$$x_2 - \omega_k(x)b_k),\ h_1(x) + \ldots + h_M(x) \equiv 1,$$

$$h_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{M} \omega_i^{\overline{N}+1}(x) \Bigg/ \sum_{j=1}^{M} \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{M} \omega_i^{\overline{N}+1}(x),\ k = \overline{1,M},$$

$$\overline{N} = \begin{cases} N, & N = 2m+1, \\ N+1, & N = 2m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}^0$$

Тогда оператор $\overline{L}_{M,N} f(x) \in C^{r-N}(R^2 \setminus G)$, $G = \bigcup_{(i,k)} \{A_{ik}\}$, $A_{ik} = \Gamma_i \cap \Gamma_k \neq \varnothing$,

$$\overline{L}_{M,N} f(x) = \sum_{k=1}^{M} h_k(x) \left[\sum_{s=0}^{N} \varphi_{ks}(x - \omega_k(x)\nabla\omega_k) \frac{\omega_k^s(x)}{s!} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\omega_k(x)} \left[\frac{\partial^{N+1}}{\partial t^{N+1}} \sum_{0\leq|\alpha|\leq r-1} \frac{f^{(\alpha)}(x^{(0)})}{\alpha!} \left(x - (\omega_k(x) - t_k)\nabla\omega_k - x^{(0)} \right)^{\alpha} \right] \frac{(\omega_k(x) - t_k)^N}{N!} dt_k \right]$$

является интерлинантом со свойствами (1), (2). При этом

$$f(x) - \overline{L}_{M,N} f(x) = \sum_{k=1}^{M} h_k(x) \int_0^{\omega_k(x)} \left\{ \frac{\partial^{N+1}}{\partial t_k^{N+1}} \int_0^1 \left[\frac{\partial^r}{\partial t^r} f(x^{(0)} + t(x - (\omega_k(x) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - t_k)\nabla\omega_k - x^{(0)})) \right] \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt \right\} \frac{(\omega_k(x) - t_k)^N}{N!} dt_k.$$

Интегрированием по частям (по t) в последнем равенстве можно уменьшить порядок производных от f до $q \leq M(N+1)$.

Пример 2 [2]. Полиномиальная интерлинация Тейлора без сохранения класса $C^r(R^2)$.

Используем обозначения из примера 1. Пусть также

$$\tau_k = (b_k, -a_k),\ \tau_k \| \Gamma_k,\ T_p^{(k)} = (\tau_k, \nabla)^p = \left(b_k \frac{\partial}{\partial x_1} - a_k \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^p,\ \Delta_{ik} = -\Delta_{ki} = T_1^{(k)}\omega_i,$$

$$\mathfrak{N}_M = \left\{ (i,k) \mid \Gamma_i \cap \Gamma_k = A_{ik} \neq \varnothing,\ i \neq k,\ i,k \in \{1,2,\ldots,M\} \right\},\ A_{ik} \neq A_{i'k'},\ (i,k) \neq (i',k'),$$

$$D_p^{(k)} = (\Delta\omega_k, \nabla)^p.$$

Операторы $T_p^{(k)} = \partial^p / \partial\tau_k^p$ являются операторами p–го порядка дифференцирования по касательной к Γ_k; $D_p^{(k)} = \partial^p / \partial\nu_k^p$,

$$L_{kl} f(x) = \sum_{s=0}^{N} \frac{\omega_k^s(x)}{s!} \sum_{i=0}^{s} (-1)^i C_s^i D_i^{(k)} \left[\varphi_{k,s-i} \left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}} \omega_l(x) \right) \right] +$$

$$+\sum_{p=0}^{N}\frac{\omega_l^p(x)}{p!}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j C_p^j D_j^{(l)}\left[\varphi_{l,p-j}\left(A_{kl}-\frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}\omega_k(x)\right)\right]-\sum_{s,p=0}^{N}\frac{\omega_k^s\omega_l^p}{s!\,p!}(\mathcal{J}_{sp}^{kl}f),$$

$$\mathcal{J}_{sp}^{kl}f=\Delta_{lk}^{-p}\,\Delta_{kl}^{-s}\,(T_s^{(l)}T_p^{(k)}f)(A_{kl})=\mathcal{J}_{ps}^{lk}f,$$

$$k,l\in\{1,2,\ldots,M\},\ 0\le s,p\le N,$$

$$h_{kl}(x)=\prod_{m=1,\,m\ne k,l}^{M}\omega_m^{N+1}(x)\left\{\prod_{m=1,\,m\ne k,l}^{M}\omega_m^{-N+1}(x)\right\}_{(A_{kl})}^{(N,N)},\quad \sum_{(k,l)\in\mathfrak{N}_M}h_{kl}(x)\equiv 1.$$

Здесь

$$\{g(x)\}_{(A_{kl})}^{(N,N)}=\sum_{s,p=0}^{N}\frac{(\omega_k/\Delta_{kl})^s(\omega_l/\Delta_{lk})^p}{s!\,p!}\left[(T_s^{(l)}T_p^{(k)}g)(A_{kl})\right].$$

Тогда оператор $\overline{O}_{MN}f(x)\in C^{r-2N}(R^2)$,

$$\overline{O}_{M,N}f(x)=\sum_{(k,l)\in\mathfrak{N}_M}h_{kl}(x)\left\{L_{kl}f(x)+\int_0^{\omega_k}\int_0^{\omega_l}\left[\frac{\partial^{2N+2}}{\partial t_k^{N+1}\partial t_l^{N+1}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{0\le|\alpha|\le r-1}\frac{f^{(\alpha)}(x^{(0)})}{\alpha!}\left(A_{kl}-\frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}t_l-\frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}t_k-x^{(0)}\right)^{\alpha}\right]\frac{(\omega_k-t_k)^N(\omega_l-t_l)^N}{N!\;N!}dt_k\,dt_l\right\}$$

является интерлинантом с наивысшей алгебраической точностью и удовлетворяет условиям (1), (2). При этом

$$f(x)-\overline{O}_{M,N}f(x)=\sum_{(k,l)\in\mathfrak{N}_M}h_{kl}(x)\int_0^{\omega_k}\int_0^{\omega_l}\left\{\frac{\partial^{2N+2}}{\partial t_k^{N+1}\partial t_l^{N+1}}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^1\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}f\left(x^{(0)}+t\left(A_{kl}-\frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}t_l-\frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}t_k-x^{(0)}\right)\right)\right]\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt\right\}\frac{(\omega_k-t_k)^N(\omega_l-t_l)^N}{N!\;N!}dt_k\,dt_l.$$

Пример 3 [3]. Интерлинация на M, $M\ge 2$, параллельных прямых с сохранением класса $C^r(R^2)$. Пусть $\Omega=\{-\infty<x_1<+\infty,\ a\le x_2\le b\}$; $a\le x_{21}<\ldots<x_{2M}\le$ $\le b$; Γ_k: $\omega_k(x):=x_2-x_{2k}=0$, $k=\overline{1,M}$, $-\infty<\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_N<+\infty$. Числа β_i, $i=$ $=\overline{0,N}$, предполагаем заданными, числа λ_{Nsi} находим путем решения систем уравнений

$$\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\beta_i^p=\delta_{sp},\ 0\le s,p\le N;\ \delta_{ss}=1,\ \delta_{sp}=0,\ s\ne p.$$

Пусть

$$E_{M,N,\beta}f(x)=\sum_{k=1}^{M}\left\{h_{k0}(x_2)\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N0i}f(x_1+\beta_i(x_2-x_{2k}),x_{2k})+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{N}h_{ks}(x_2)\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_0^{x_1+\beta_i(x_2-x_{2k})}f^{(0,s)}(t,x_{2k})\frac{(x_1+\beta_i(x_2-x_{2k})-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt\right\},$$

где

$$h_{ks}(x_2)=\prod_{i=1,i\neq k}^{M}(x_2-x_{2i})^{N+1}\left\{\prod_{i=1,i\neq k}^{M}(x_2-x_{2i})^{-N-1}\right\}_{(x_{2k})}^{(N-s)},$$

$$\{\varphi(y)\}_{(y_k)}^{(\nu)}=:\sum_{s=0}^{\nu}\varphi^{s}(y_k)\frac{(y-y_k)^s}{s!}.$$

Тогда оператор

$$\overline{E}_{M,N,\beta}f(x)=E_{M,N,\beta}f(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{N}h_{ks}(x_2)\left\{\frac{(x_2-x_{2k})^s}{s!}\int_{x_{2k}}^{x_2}\left[\frac{\partial^q}{\partial\eta^q}\sum_{0\le|\alpha|\le r-1}\frac{f^{(\alpha)}(x^{(0)})}{\alpha!}(x_1-x_1^{(0)})^{\alpha_1}(\eta-x_2^{(0)})^{\alpha_2}\right]\times\right.$$

$$\times\frac{(x_{2k}-\eta)^{q-1-s}}{(q-1-s)!}d\eta-\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\beta_i^{N+1}\int_{x_{2k}}^{x_2}\left[\frac{\partial^{N+1}}{\partial x_1^{N+1-s}\partial x_2^{s}}\sum_{0\le|\alpha|\le r-1}\frac{f^{(\alpha)}(x^{(0)})}{\alpha!}\times\right.$$

$$\left.\times(x-x^{(0)})^{\alpha}\right](x_1+\beta_i(\eta-x_{2k}),x_{2k})\frac{(x_2-\eta)^N}{N!}d\eta\Bigg\},\ N+1\le q\le r,$$

является интерлинантом со свойствами (1), (2); $f\in C^q(R^2)\Rightarrow\overline{E}_{M,N,\beta}f\in C^q(R^2)$. При этом

$$f(x)-\overline{E}_{M,N,\beta}f(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{M}\sum_{s=0}^{N}h_{ks}(x_2)\left\{\frac{(x_2-x_{2k})^s}{s!}\int_{x_{2k}}^{x_2}\left[\frac{\partial^q}{\partial\eta^q}\int_0^1\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}f(x^{(0)}+t(x_1-x_1^{(0)},\eta-x_2^{(0)}))\right]\times\right.\right.$$

$$\times\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt\Bigg]\frac{(x_{2k}-\eta)^{q-1-s}}{(q-1-s)!}d\eta-\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\beta_i^{N+1}\int_{x_{2k}}^{x_2}\left[\frac{\partial^{N+1}}{\partial x_1^{N+1-s}\partial x_2^{s}}\int_0^1\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}f(x^{(0)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t(x_1-x^{(0)}))\right]\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt\right](x_1+\beta_i(\eta-x_{2k}),x_{2k})\frac{(x_2-\eta)^N}{N!}d\eta\Bigg\}.$$

Пример 4 [4]. Рациональная интерлинация с сохранением класса $C^r(R^2\setminus G)$, $G=\bigcup_{(i,k)}\{A_{ik}\}$.

Пусть Γ_k: $\omega_k(x)=0$, $k=\overline{1,M}$, $t_k=x_1b_k-x_2a_k$; функции h_k, ω_k определены в примере 1; числа β_i заданы, а числа λ_{Nsi} находим так, как и в примере 3. Пусть

$$\Phi_k(t_k,\omega_k)=:f(t_kb_k+\omega_ka_k+\gamma_k a_k,-t_ka_k+\omega_kb_k+\gamma_k b_k)\equiv f(x_1,x_2)\in C^r(R^2),$$

$$D_kf(x)=:\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N0i}\Phi_k(t_k+\beta_i\omega_k,0)+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_0^{t_k+\beta_i\omega_k}\Phi_k^{(0,s)}(\xi,0)\frac{(t_k+\beta_i\omega_k-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}d\xi,$$

$$D_{M,N}f(x) = h_1(x)D_1 f(x) + \ldots + h_M(x)D_M f(x),$$

$$[A_{N+1}\Phi_k](\xi,\eta) =: \left[\prod_{i=0}^{N}\left(-\beta_i\frac{\partial}{\partial t_k}+\frac{\partial}{\partial\omega_k}\right)\Phi_k\right](\xi,\eta),\ \Delta_{Ni} = \prod_{j=0,\,j\neq i}^{N}(\beta_j-\beta_i).$$

Тогда оператор $\overline{D}_{M,N}f(x) \in C^r(R^2\setminus G)$,

$$\overline{D}_{M,N}f(x) = D_{M,N}f(x) + \sum_{k=1}^{M}h_k(x)\int_0^{\omega_k}\left\{\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_0^{t_k+\beta_i(\omega_k-\eta)}\left[A_{N+1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sum_{0\le|\alpha|\le r-1}\Phi_k^{(\alpha)}(0,0)\frac{t_k^{\alpha_1}\omega_k^{\alpha_2}}{\alpha!}\right](\xi,\eta)\frac{(t_k+\beta_i(\omega_k-\eta)-\xi)^{N-1}}{(N-1)!}d\xi\right\}d\eta$$

обладает свойствами (1), (2). При этом

$$f(x)-\overline{D}_{M,N}f(x) = \sum_{k=1}^{M}h_k(x)\int_0^{\omega_k}\left\{\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_0^{t_k+\beta_i(\omega_k-\eta)}\left[A_{N+1}\int_0^1\left[\frac{\partial^r}{\partial t^r}\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\Phi_k(tt_k,t\omega_k)\right]\frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}dt\right](\xi,\eta)\frac{(t_k+\beta_i(\omega_k-\eta)-\xi)^{N-1}}{(N-1)!}d\xi\right\}d\eta.$$

Замечание 2. В случаях, когда рассматриваются рациональные операторы интерлинации (т.е. с рациональными весовыми функциями), следует учитывать, что эти операторы не определены на множестве $\{A_{ik}\}$, однако их можно доопределить в точках A_{ik} так, что доопределенная функция будет принадлежать классу $C^N(R^2)$.

Замечание 3. Легко видеть, что по данным $\{\varphi_{ks}(x)\}$ можно определить $f^{(\alpha)}(A_{ik})$, $0\le|\alpha|\le N$, однако если $r > N+1$, то этих данных недостаточно для нахождения полинома Тейлора $T_{r-1}f(x)$.

Покажем на примере, как можно получить операторы интерлинации с наивысшей алгебраической точностью, пользуясь только лишь информацией о следах функции $\{\varphi_{k0}(x)\}$.

Пример 5. Пусть среди прямых Γ_k, $k=\overline{1,M}$, нет параллельных, причем никакие три из них не пересекаются в одной точке. Тогда общее число точек пересечения A_{ik} равно C_M^2. С другой стороны, всякий полином от двух переменных степени $M-1$ имеет C_{M+1}^2 коэффициентов. Поэтому если мы проведем еще одну, вспомогательную прямую Γ_{M+1} так, что она пересечет все предыдущие прямые в точках, не совпадающих с уже имеющимися точками A_{ik}, то в результате общее число точек A_{ik}; $i,k=\overline{1,M+1}$, $i\neq k$, будет равно C_{M+1}^2, т.е. будет равно числу коэффициентов полинома $P_{M-1}(x)$. Тогда оператор

$$l_{M,0}f(x) = \sum_{(\mu,\nu)\in\mathfrak{N}_{M+1}}\ \prod_{m=1,\,m\neq\mu,\nu}^{M+1}\frac{\omega_m(x)}{\omega_m(A_{\mu\nu})}f(A_{\mu\nu})$$

обладает свойствами: $l_{M,0}f(A_{\mu\nu}) = f(A_{\mu\nu})$, $(\mu,\ \nu)\in\mathfrak{N}_{M+1}$; $l_{M,0}f(x)\in\mathbb{P}_{M-1}$; $l_{M,0}[P(x)]\equiv P(x)\ \ \forall\ P(x)\in\mathbb{P}_{M-1}$. Поэтому оператор [2]

$$\overline{O}_{M,0}f(x)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{N}_M}\prod_{m=1,m\neq i,j}^{M+1}\frac{\omega_m(x)}{\omega_m(A_{ij})}\Bigg[\varphi_{i0}\left(A_{ij}-\frac{\tau_i}{\Delta_{ij}}\omega_j\right)+$$

$$+\varphi_{j0}\left(A_{ij}-\frac{\tau_j}{\Delta_{ji}}\omega_i\right)-f(A_{ij})+\int_0^{\omega_i}\int_0^{\omega_j}\frac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\left((l_{M,0}f)\left(A_{ij}-\frac{\tau_i}{\Delta_{ij}}t_j-\frac{\tau_j}{\Delta_{ji}}t_i\right)\right)dt_idt_j\Bigg]$$

будет обладать свойствами (см. также пример 2)

$$\overline{O}_{M,0}f(x)=f(x)=\varphi_{k0}(x),\ x\in\Gamma_k,\ k=\overline{1,M},\ \overline{O}_{M,0}x^{\alpha}\equiv x^{\alpha},\ 0\le|\alpha|\le M-1.$$

При этом для остатка $\overline{R}_{M,0}f(x)=(I-\overline{O}_{M,0})f(x)$ справедливо равенство

$$\overline{R}_{M,0}f(x)=\sum_{(i,j)\in\mathfrak{N}_M}\prod_{\substack{m=1\\ m\neq i,j}}^{M+1}\frac{\omega_m(x)}{\omega_m(A_{ij})}\int_0^{\omega_i}\int_0^{\omega_j}\left[\frac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}\left((f-l_{M,0}f)\left(A_{ij}-\frac{\tau_i}{\Delta_{ij}}t_j-\frac{\tau_j}{\Delta_{ji}}t_i\right)\right)\right]dt_idt_j.$$

Аналогичные алгоритмы можно найти и для других случаев взаимного расположения прямых Γ_k, $k=\overline{1,M}$, также для интерлинации производных.

3. В заключение отметим следующее. Во-первых, число примеров можно было бы увеличить, включив, например, сплайн-интерлинацию. (т.е. интерлинацию, вспомогательные функции в которой являются сплайнами), однако здесь автору известны лишь частные случаи интерлинации на системе взаимно перпендикулярных прямых без сохранения класса дифференцируемости, которому принадлежит интерлинируемая функция $f(x)$ (см., например, [5; 6; 7, с. 333]).

Во–вторых, для эффективного использования операторов интерлинации, приведенных в примерах 1–5, для приближения функций в замкнутых областях, пересекаемых прамыми интерлинации, желательно иметь оценки погрешности приближения. Здесь могут оказаться полезными приведенные выше формулы для остатков.

Отметим работы [8, 9], в которых также решена задача построения операторов интерлинации на трех сторонах треугольника ($M=3$, $N=0$) с наивысшей алгебраической точностью. Предложенный в данной работе метод построения таких операторов отличается не только общностью, но использует принципиально иной подход.

1. *Литвин О. Н.* Формула В. Л. Рвачева в случае областей с угловыми точками // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, №2. – С. 238 – 244.
2. *Литвин О. Н.* Полиномиальная интерлинация Тейлора функции 2-х переменных на нескольких прямых // Изв. вузов. Сер. мат. – 1989, №2. – С. 19 – 27.
3. *Литвин О. Н.* Интерполяция данных Коши на нескольких параллельных прямых в R^2 с сохранением класса дифференцируемости // Укр. мат. журн.– 1985.– **37**, №4.– С. 509 – 513.
4. *Литвин О. Н.* Интерлинация функций 2-х переменных на M ($M>2$) прямых с сохранением класса $C^r(R^2)$ // Там же. – 1990. – **42**, №12. – С. 1616 – 1625.
5. *Литвин О. Н., Федько В. В.* Обобщенная кусочно-эрмитова интерполяция // Там же. – 1976. – **28**, №6. – С. 812 – 819.
6. *Mettke H.* Fehlerabschatzungen zur zweidimensionalen splineinterpolation // Beitr. Numer. Math. – 1983. – N11. – P. 81 – 91.
7. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М. : Наука, 1984. – 350 с.
8. *Nelson G. M., Thomas D. H., Wixom J. A.* Interpolation in triangles // Bull. Austral. Math. Soc. – 1979. – **20**. – P. 115 – 130.
9. *Nielson G. M.* Blending method of minimum norm for triangular domains // Rev. voum. math. pures et appl. – 1980. – **25**, №6. P.– 899 – 910.

Получено 26. 02. 91