УДК 519.21

А. А. Маляренко, канд. физ.-мат. наук,
А. Я. Оленко, асп. (Киев. ун-т)

МНОГОМЕРНЫЕ КОВАРИАНТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ НА КОММУТАТИВНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ

Рассматриваются однородные в широком смысле ковариантные случайные поля на коммутативных локально компактных группах со значениями в конечномерных комплексных гильбертовых пространствах. Доказана общая формула для корреляционного оператора такого поля, а также спектральное представление самого поля в виде ряда из стохастических интегралов по ортогональным случайным мерам.

Розглядаються однорідні в широкому розумінні коваріантні випадкові поля на комутативних локально компактних групах із значеннями в скінченновимірних комплексних гільбертових просторах. Доведена загальна формула для кореляційного оператора такого поля, а також спектральне зображення самого поля у вигляді ряду із стохастичних інтегралів по ортогональних випадкових мірах.

Пусть X — коммутативная локально компактная топологическая группа, K — компактная топологическая группа, действующая на X автоморфизмами, U — неприводимое унитарное представление группы K в конечномерном комплексном гильбертовом пространстве H. Пусть $\xi(x)$ — непрерывное в среднем квадратичном однородное в широком смысле случайное поле на X со значениями в H и нулевым средним. Это означает, что каждой точке $x \in X$ поставлен в соответствие случайный вектор $\xi(x)$ с интегрируемым квадратом нормы, причем отображение ξ непрерывно действует из X в пространство $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P; H)$ квадратично интегрируемых случайных векторов на основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Кроме этого, справедливы неравенства

$$M\xi(x) = 0,$$

$$B(x, y) = M\xi(x) \otimes \xi^*(y) = B(x-y),$$

где знак $\otimes$ означает тензорное произведение в H.

Определение 1. *Случайное поле $\xi(x)$ называется ковариантным (относительно группы K и представления U), если для всех $x, y \in X$ и $g \in K$ выполнено равенство*

$$B(gx, gy) = U(g)B(x, y)U^{-1}(g).$$

Это определение было введено в [1]. Там же при некоторых ограничениях на группы X и K была доказана общая формула для корреляционного оператора такого поля. Целью настоящей работы является получение спектральных разложений самого поля и его корреляционного оператора в терминах стохастических интегралов.

Замечание 1. Приведенное определение является обобщением классического определения однородного и изотропного случайного поля, которое получается при $X = \mathbb{R}^n$, $K = O(n)$, $U(g) = 1$. Различные частные случаи многомерных ковариантных случайных полей изучались в работах [2 – 4].

Обозначения. Пусть $\hat{X}$ — группа характеров группы X. Группа K действует в $\hat{X}$ по правилу $(g\hat{x})(x) = \hat{x}(g^{-1}x)$.

Условие 1. В группе $\hat{X}$ существует измеримое сечение, т.е. борелевское множество S, пересекающееся с каждой орбитой группы K ровно в одной точке. Кроме этого, естественное отображение из S в пространство орбит $\hat{X}/K$, ставящее в соответствие каждой точке ее орбиту, является гомеоморфизмом.

Пусть π — отображение из $\hat{X}$ в S, ставящее в соответствие каждой точке $\hat{x} \in \hat{X}$ единственную точку $\pi(\hat{x}) \in S$, лежащую на одной орбите с $\hat{x}$. Пусть U^+ — представление, контраградиентное представлению U, действующее в H^* по формуле $U^+(g) = [U(g^{-1})]^*$.

Пусть K_s — стационарная подгруппа точки $s \in S$, H_s — подпространство в $H^* \otimes H$, состоящее из векторов, инвариантных относительно представления $U^+ \otimes U$ группы K_s, Φ — произвольная измеримая функция на S, значением которой в точке $s \in S$ является неотрицательно определенный оператор с единичным следом, принадлежащий H_s.

Пусть μ — мера Хаара на группе K, нормированная условием $\mu(K) = 1$, $\mu_{\pi(\hat{x})}$ — образ меры μ при отображении $g \to g\pi(\hat{x})$ из K в орбиту точки $\hat{x}$. Пусть $g(\hat{x})$ — произвольный элемент группы K, переводящий $\pi(\hat{x})$ в $\hat{x}$, ν — произвольная конечная мера на S. В работе [1] доказано, что при выполнении условия 1 корреляционный оператор ковариантного случайного поля задается формулой

$$B(x, y) = \int\limits_S \int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} \hat{x}(x-y)(U^+ \otimes U)(g(\hat{x}))\Phi(\pi(\hat{x}))d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x}))d\nu(\pi(\hat{x})). \tag{1}$$

Формула (1) имеет существенный недостаток. Ее правая часть содержит весьма сложный объект — функцию Φ. Наша ближайшая цель — выразить корреляционную функцию $B(x, y)$ через более простые объекты.

Условие 2. В группе K существует цепочка вложенных друг в друга подгрупп

$$K = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_m = \{e\} \tag{2}$$

такая, что в нее входит стационарная подгруппа любой точки $s \in S$.

Будем обозначать начальными буквами греческого алфавита векторы ортогонального базиса Гельфанда — Цетлина [5], соответствующего цепочке (2).

Перепишем формулу (1) в базисе Гельфанда — Цетлина:

$$B_{\alpha\beta}(x, y) = \int\limits_S \int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} \hat{x}(x-y) \sum U^+_{\alpha\gamma}(g(\hat{x}))U_{\beta\varepsilon}(g(\hat{x})) \times$$

$$\times \Phi_{\gamma\varepsilon}(\pi(\hat{x}))d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x}))d\nu(\pi(\hat{x})). \tag{3}$$

Суммирование в формуле (3) ведется по векторам γ из базиса Гельфанда — Цетлина представления U^+ и по векторам ε из базиса представления U. Правая часть этой формулы записана в базисе, элементы которого представляют собой тензорное произведение $\gamma \otimes \varepsilon$. В пространстве $H^* \otimes H$ существует другой естественный базис. А именно: представление $U^+ \otimes U$ является приводимым и распадается в прямую сумму неприводимых представлений V, каждое из которых может входить в эту сумму несколько раз. Пусть индекс j нумерует эти вхождения. Выбирая в каждом неприводимом подпространстве базис Гельфанда — Цетлина, получаем другой ортонормированный базис в пространстве $H^* \otimes H$. Элементы матрицы перехода между этими двумя ортонормированными базисами называются коэффициентами Клебша — Гордана. Если γ — вектор базиса Гельфанда — Цетлина j-го вхождения представления V, то справедливы следующие формулы:

$$\gamma = \sum_{\alpha,\beta} \langle U^+, \alpha; U, \beta \mid V, j, \gamma \rangle \, \alpha \otimes \beta, \qquad \alpha \otimes \beta = \sum_{V,j,\gamma} \langle V, j, \gamma \mid U^+, \alpha; U, \beta \rangle \gamma,$$

где в угловых скобках стоят соответствующие коэффициенты Клебша — Гордана, а также формула

$$U^+_{\alpha\gamma}(g(\hat{x}))U_{\beta\varepsilon}(g(\hat{x})) = \sum \langle V, j, \zeta \mid U^+, \alpha; U, \beta \rangle V_{\zeta\eta}(g(\hat{x})) \langle U^+, \gamma; U, \varepsilon \mid V, j, \eta \rangle. \quad (4)$$

Формула (4) выражает тот факт, что матрица коэффициентов Клебша – Гордана приводит матрицу тензорного произведения $U^+ \otimes U$ к прямой сумме матриц V_j. Суммирование в ней ведется по индексам V, j и по векторам ζ, η из базиса Гельфанда — Цетлина представления V_j.

Теперь запишем аналогичное представление для матрицы Φ. Пусть индекс e нумерует различные стационарные подгруппы K_e точек из S. По условию 2 их конечное число и все они входят в цепочку (2). Пусть индекс W пробегает все неприводимые унитарные представления группы K, входящие в тензорное произведение $U^+ \otimes U$, пространства которых содержат ненулевые векторы, инвариантные относительно K_e. Пусть индекс k нумерует вхождения представлений W в $U^+ \otimes U$. Пусть S_e — множество точек из S, стационарная подгруппа которых совпадает с K_e. Тогда k-й экземпляр представления W при сужении на подгруппу K_e распадается в прямую сумму неприводимых представлений подгруппы K_e, среди которых имеется, вообще говоря, несколько тривиальных. Обозначим через $H_{W,k}$ пространство, в котором действуют эти тривиальные представления. Поскольку группа K_e входит в цепочку (2), то пространство $H_{W,k}$ распадается в прямую сумму одномерных K_e-инвариантных подпространств, а их объединение совпадает с введенным выше пространством H_s для $s \in S_e$. Конус неотрицательно определенных операторов пересекается с каждым одномерным K_e-инвариантным подпространством либо по лучу, либо только в начале координат. Зафиксируем в каждом таком подпространстве единичный вектор базиса Гельфанда – Цетлина φ, направив его по этому лучу.

Обозначим через $\Phi^e_{Wk\varphi}$ компоненты матрицы Φ в построенном базисе. Имеем

$$\Phi_{\gamma\varepsilon}(\pi(\hat{x})) = \sum \langle W, k, \varphi \mid U^+, \gamma; U, \varepsilon \rangle \Phi^e_{Wk\varphi}(\pi(\hat{x})). \quad (5)$$

Введем на множествах S_e меры $\nu^e_{Wk\varphi}$, положив

$$d\nu^e_{Wk\varphi}(\pi(\hat{x})) = \Phi^e_{Wk\varphi}(\pi(\hat{x}))d\nu(\pi(\hat{x})). \quad (6)$$

Поскольку компоненты $\Phi^e_{Wk\varphi}$ положительны, то $\nu^e_{Wk\varphi}$ являются положительными мерами.

Теперь нам понадобится еще одно свойство коэффициентов Клебша — Гордана:

$$\sum_{\gamma,\varepsilon} \langle U^+, \gamma; U, \varepsilon \mid V, j, \eta \rangle \langle W, k, \varphi \mid U^+, \gamma; U, \varepsilon \rangle = \delta_{VW}\delta_{jk}\delta_{\eta\varphi}. \quad (7)$$

Формула (7) выражает тот факт, что матрица коэффициентов Клебша — Гордана, будучи матрицей перехода между двумя ортонормированными базисами, унитарна.

Подставляя (4) и (5) в (3) и используя соотношения (6) и (7), получаем

$$B_{\alpha\beta}(x,y) = \int\limits_{S_e} \int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} \hat{x}(x-y) \sum \langle V, j, \zeta \mid U^+, \alpha; U, \beta \rangle \times$$

$$\times V_{\zeta\eta}(g(\hat{x}))\, d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x}))\, d\nu^e_{Vj\eta}(\pi(\hat{x})). \tag{8}$$

Суммирование во внешней сумме правой части формулы (8) ведется по индексам e, нумерующим типы орбит; V, нумерующему неприводимые представления группы K, входящие в тензорное произведение $U^+ \otimes U$ и обладающие ненулевыми K_e-инвариантными векторами; j, нумерующему вхождения V в $U^+ \otimes U$; η, нумерующему K_e-инвариантные базисные векторы представления V_j. Во внутренней сумме индекс суммирования ζ пробегает векторы базиса Гельфанда — Цетлина представления V_j.

Итак, доказана справедливость формулы, выражающей корреляционный оператор $B(x,y)$ через сравнительно простые объекты — матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана группы K и произвольные конечные меры на S. Однако формула (8) имеет другой существенный недостаток. Она не является спектральным разложением, к ней неприменима теорема Карунена, которая позволяет получить спектральное представление поля через стохастические интегралы по ортогональным случайным мерам.

С целью получения такого спектрального разложения поступим следующим образом. Обозначим через $\hat{K}_e$ множество всех неприводимых унитарных представлений группы K, содержащих тривиальное представление подгруппы K_e. Рассмотрим характер $\hat{x}(x)$ как непрерывную функцию на орбите $\pi^{-1}(\pi(\hat{x}_0))$ фиксированной точки $\hat{x}_0$. Функция $\hat{x}(x)$ раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\hat{x}(x) = \sum \dim W \int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} \hat{x}(x) \overline{W_{\varphi\psi}(g(\hat{x}))}\, d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x}))\, W_{\varphi\psi}(g(\hat{x})) \tag{9}$$

(см. [5], § 32, теорема 2), где суммирование производится по представлениям $W \in \hat{K}_e$, векторам базиса Гельфанда — Цетлина φ представления W и K_e-инвариантным векторам ψ того же базиса; черта обозначает комплексное сопряжение.

В работе [6] были введены обобщенные функции Бесселя

$$J^W_{\varphi\psi}(\hat{x},x) = \int\limits_K (g\hat{x})(x)\; W_{\varphi\psi}(g(\hat{x}))\, d\mu(g), \tag{10}$$

переходящие в обычные функции Бесселя в классическом случае $X = \mathbb{R}^n$, $K = O(n)$. При отображении $g \to g\hat{x}$ из K в $\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))$ интеграл в левой части формулы (10) переходит в соответствующий интеграл в левой части (9). Поэтому справедливы формулы

$$\hat{x}(x) = \sum_{W,\varphi,\psi} \dim W\, J^W_{\varphi\psi}(\hat{x},x)\, W_{\varphi\psi}(g(\hat{x})), \tag{11}$$

$$\overline{\hat{x}(y)} = \sum_{W',\varphi',\psi'} \dim W'\, \overline{J^{W'}_{\varphi'\psi'}(\hat{x},y)}\; \overline{W'_{\varphi'\psi'}(g(\hat{x}))}. \tag{12}$$

Прежде чем подставлять формулы (11) и (12) в (8), сделаем следующее замечание. В процессе упрощения полученного при этом выражения необходимо будет вычислить интеграл

$$\int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} W_{\varphi\psi}(g(\hat{x}))\, \overline{W'_{\varphi'\psi'}(g(\hat{x}))}\, V_{\zeta\eta}(g(\hat{x}))\, d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x})).$$

Это вычисление производится следующим образом. Применяя формулу (4), имеем

$$W_{\varphi\psi}(g(\hat{x}))V_{\zeta\eta}(g(\hat{x})) = \sum \langle Y, m, \mu \,|W, \varphi; V, \zeta\rangle Y_{\mu\nu}(g(\hat{x}))\langle W, \psi; V, \eta\,|Y, m, \nu\rangle.$$

Подставляя последнюю формулу в вычисляемый интеграл и учитывая, что по теореме Петера — Вейля [5]

$$\int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} Y_{\mu\nu}(g(\hat{x}))\,\overline{W'_{\varphi'\psi'}(g(\hat{x}))}\, d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x})) = \delta_{YW'}\left(\dim W'\right)^{-1},$$

получаем, что значение интеграла равно

$$\int\limits_{\pi^{-1}(\pi(\hat{x}))} W_{\varphi\psi}(g(\hat{x}))\,\overline{W'_{\varphi'\psi'}(g(\hat{x}))}\, V_{\zeta\eta}(g(\hat{x}))\, d\mu_{\pi(\hat{x})}(g(\hat{x})) =$$

$$= \left(\dim W'\right)^{-1} \sum \langle W', m, \varphi' \,|W, \varphi; V, \zeta\rangle \langle W, \psi; U, \eta\,|W', m, \psi'\rangle, \tag{13}$$

где суммирование производится по индексу m, нумерующему вхождения представления W' в тензорное произведение $W \otimes V$. Итак, подставляя (11) и (12) в (8) и учитывая (13), получаем

$$B_{\alpha\beta}(x, y) = \sum b^{eVj\eta}_{\alpha\beta WW'\varphi\varphi'\psi\psi'} \int\limits_{S_e} J^{W}_{\varphi\psi}(s, x)\overline{J^{W'}_{\varphi'\psi'}(s, y)}\, d\nu^{e}_{Vj\eta}(s), \tag{14}$$

где

$$b^{eVj\eta}_{\alpha\beta WW'\varphi\varphi'\psi\psi'} = \dim W \sum \langle V, j, \zeta\,|U^{+}, \alpha; U, \beta\rangle \langle W', m, \varphi' \,|W, \varphi; V, \zeta\rangle \times$$

$$\times \langle W, \psi, U, \eta\,|W', m, \psi'\rangle. \tag{15}$$

Суммирование по формуле (15) ведется по индексам m, ζ, нумерующим векторы базиса Гельфанда — Цетлина m-го вхождения представления W' в тензорное произведение $W \otimes V$.

Применяя к (14) теорему Карунена, имеем

$$\xi_{\alpha}(x) = \sum \int\limits_{S_e} J^{W}_{\varphi\psi}(sx)\; dZ^{eVj\eta}_{\alpha W\varphi\psi}(s). \tag{16}$$

Здесь $Z^{eVj\eta}_{\alpha W\varphi\psi}(\cdot)$ — стохастические меры на S_e, удовлетворяющие условиям

$$MZ^{eVj\eta}_{\alpha W\varphi\psi}(A_1) = 0, \tag{17}$$

$$MZ^{eVj\eta}_{\alpha W\varphi\psi}(A_1)\,\overline{Z^{e'V'j'\eta'}_{\beta W'\varphi'\psi'}(A_2)} = \delta_{ee'}\delta_{VV'}\delta_{jj'}\delta_{\eta\eta'}\, b^{eVj\eta}_{\alpha\beta WW'\varphi\varphi'\psi\psi'}\, \nu^{e}_{Vj\eta}(A_1 \cap A_2). \tag{18}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда корреляционный оператор многомерного ковариантного случайного поля задается формулами* (14) *и* (15). *Само поле представляется формулами* (16) – (18).

Замечание 2. Условие 2 имеет технический характер. Если бы оно не выполнялось, то пришлось бы вычислять компоненты матрицы $B(x, y)$ в различных базисах при разных S_e, а затем приводить их к одному базису. В результате формулы приобрели бы более сложный характер.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{Z}^n$ — решетка точек в $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, K — группа автоморфизмов $\mathbb{Z}^n$, порожденная перестановками осей координат и зеркальными отражениями относительно координатных гиперплоскостей, U — тривиальное одномерное представление группы K в $\mathbb{C}^1$. Формулы для корреляционного оператора и самого поля приведены в [7].

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{Z}^3$, $K = S_3$ — группа перестановок трех координатных осей. Она имеет три неприводимых унитарных представления, которые в

[8] обозначаются (1^3), (21), (3). В качестве представления U выберем представление (21), имеющее размерность 2. Измеримое сечение S' на торе T^3 имеет вид $S' = \{0 \le \hat{x}_1 \le \hat{x}_2 \le \hat{x}_3 < 1\}$. Для простоты ограничимся полями, спектральная мера которых сосредоточена на множестве $S = \{0 < \hat{x}_1 < \hat{x}_2 < < \hat{x}_3 < 1\}$.У всех точек этого множества стационарная подгруппа тривиальна, поэтому цепочка $S_3 \supset S_2 \supset \{e\}$ удовлетворяет условию 2. Контраградиентное представление U^+ в рассматриваемом случае совпадает с U, тензорное произведение $U^+ \otimes U$ имеет вид [8] $(21) \otimes (21) = (3) \oplus (21) \oplus (1^3)$, а базис Гельфанда — Цетлина в H обозначается символами Ямануччи [211] и [121].

Так как стационарная подгруппа любой точки тривиальна, то индекс W будет пробегать все три неприводимых унитарных представления S_3. Обобщенные функции Бесселя имеют вид

$$J^W_{\varphi\psi}(s, x) = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} e^{2\pi i (x, gs)} W_{\varphi\psi}(g).$$

Используя явный вид матричных элементов и коэффициентов Клебша — Гордана группы S_3, приведенной в [8], получаем

$$B_{[121][121]}(x, y) = \left(6\sqrt{2}\right)^{-1} \int_s \sum_g e^{2\pi i (gs, x-y)} d\nu_{(3)}(s) + \\ + \left(6\sqrt{2}\right)^{-1} \int_s \sum_g e^{2\pi i (gs, x-y)} (-1)^{I_{A_3}(g)} d\nu_{(1^3)}(s),$$

$$B_{[121][211]}(x, y) = \left(6\sqrt{2}\right)^{-1} \int_s \sum_g e^{2\pi i (gs, x-y)} (-1)^{I_{A_3}(g)} d\nu_{(1^3)}(s) - \\ - \left(6\sqrt{2}\right)^{-1} \int_s \sum_g e^{2\pi i (gs, x-y)} d\nu_{(3)}(s),$$

$$B_{[211][211]}(x, y) = \left(6\sqrt{2}\right)^{-1} \int_s \sum_g e^{2\pi i (gs, x-y)} \varphi(g) d\nu(s),$$

где A_3 — подгруппа четных перестановок, а функция φ задается таблицей

g	e	(12)	(23)	(13)	(312)	(231)
$\varphi(g)$	1	1	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

1. *Маляренко А. А.* Многомерные ковариантные случайные поля на коммутативных топологических группах // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1989. – № 41. – С. 43 – 50.
2. *Яглом А. М.* Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – **2**, № 3. – С. 292 – 338.
3. *Yaglom A. M.* Second-order homogeneous random fields // Proc. Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab. – 1961. – **2**. – P. 593 – 622.
4. *Маляренко А. А.* Спектральное разложение многомерных однородных случайных полей, изотропных по части переменных // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1985. – № 32. – С. 66 – 72.
5. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
6. *Gross K. I., Kunze R. A.* Bessel functions and representation theory // J. Funct. Anal. – 1976. – **22**, N 2. – P. 73 – 105.
7. *Antonin Otahal.* Isotropy of stationary random fields on lattice // Kybernetica. – 1986. – **22**, N 3. – P. 256 – 267.
8. *Хамермеш М.* Теория групп и ее применения к физическим проблемам.– М.: Мир, 1966.– 587 с.

Получено 09. 01. 91