УДК 519.41/47

В. А. Онищук, асп. (Ин-т математки АН Украины, Киев),

О ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ С ЦЕНТРАЛИЗАТОРОМ КОНЕЧНОГО РАНГА

Изучаются локально нильпотентные группы, в которых централизатор некоторой конечно порождённой подгруппы имеет конечный ранг. Доказано, что если G — такая группа и F — её конечно порождённая подгруппа с централизатором $C_G(F)$ конечного ранга, то централизатор образа подгруппы F в фактор-группе $G/t(G)$ по её периодической части $t(G)$ также имеет конечный ранг. Кроме того, показано, что группа G гиперцентральна в случаях, когда подгруппа F циклическая и либо G — группа без кручения, либо все силовские подгруппы из периодической части централизатора $C_G(F)$ конечны.

Вивчаються локально нільпотентні групи, в яких централізатор деякої скінченно породженої підгрупи має скінченний ранг. Доведено, що коли G — така група і F — її скінченно породжена підгрупа з централізатором $C_G(F)$ скінченного рангу, то централізатор образу підгрупи F у фактор-групі $G/t(G)$ по її періодичній частині $t(G)$ також має скінченний ранг. Крім того, показано, що група G гіперцентральна у випадках, коли підгрупа F циклічна і або G — група без скруту, або всі силовські підгрупи з періодичної частини централізатора $C_G(F)$ скінченні.

Одним из важнейших условий конечности в теории групп является условие конечности специального ранга группы, введённого А.И.Мальцевым [1] и состоящего в следующем. Группа G имеет конечный специальний ранг, если r является наименьшим натуральным числом с тем свойством, что всякая конечно порождённая подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами. Если такого натурального числа не существует, то специальный ранг группы считается бесконечным. Специальный ранг группы G обозначается ниже через $r(G)$ и называется просто рангом группы.

В работе [2] показано, что если локально нильпотентная группа G содержит такую конечно порождённую подгруппу F, что централизатор $C_G(F)$ подгруппы F в группе G/Z имеет конечный ранг, то центр $Z = Z(G)$ этой группы отличен от единицы. Более того, централизатор $C_{G/Z}(FZ/Z)$ подгруппы F в фактор-группе G/Z имеет конечный ранг. В частности, в группе G можно построить возрастающую цепь гиперцентров с натуральными номерами $1 = Z_0 < Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n < \ldots$, где $Z_n \neq Z_{n+1}$, если $Z_n \neq G$.

В настоящей работе продолжается изучение локально нильпотентных групп, в которых централизатор некоторой конечно порождённой подгруппы имеет конечный ранг. Будет показано, что централизатор $C_{G/t(G)}(F\,t(G)/t(G))$ образа подгруппы F в фактор-группе $G/t(G)$ группы G по её периодической части $t(G)$ также имеет конечный ранг (теорема 1). Если F — циклическая подгруппа и G — группа без кручения, то в этом случае ряд гиперцентров можно продолжить до всей группы G, т.е. группа G будет гиперцентральной (теорема 2). Этот же результат справедлив и в случае, когда G — произвольная локально нильпотентная группа и все силовские подгруппы из периодической части $t(C_G(F))$ централизатора $C_G(F)$ конечны (теорема 3). Некоторые результаты опубликованы без доказательств в работе [3].

Доказательству теоремы 1 предпошлём некоторые вспомогательные предложения, представляющие и самостоятельный интерес.

1. Пусть π — некоторое множество простых чисел и π' — множество тех простых делителей порядков элементов группы G, которые не содержатся в множестве π. Периодическая группа G будет называться π-группой, если все простые делители порядка любого элемента группы G принадлежат множеству π. Ниже множество всех простых делителей порядков элементов группы G будем обозначать через $\pi(G)$. Периодическая группа G называется π'-группой, если пересечение $\pi(G) \cap \pi$ пусто.

Лемма 1. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа и K — некоторая ее конечная подгруппа. Тогда в группе G существует такая характеристическая подгруппа S, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) пересечение $S \cap K$ единичное;

2) индекс $|G:S|$ подгруппы S в группе G конечен;

3) $\pi(G/S) = \pi(K)$.

Доказательство. Так как конечно порожденная нильпотентная группа финитно аппроксимируема [4, с.164], то группа G обладает множеством подгрупп $G_1, G_2, \dots, G_k, \dots$ конечного индекса в G, пересечение которых единично. В силу результата Б.Неймана [5] каждая подгруппа G_i содержит подгруппу N_i, которая характеристична и имеет конечный индекс в группе G. Ясно, что пересечение подгрупп N_i единично и потому для некоторого индекса i пересечение $N_i \cap K = 1$. Пусть S — максимальная среди характеристических подгрупп конечного индекса группы G со свойством $S \cap K = 1$. Тогда фактор-группа G/S конечна и каждая ее неединичная характеристическая подгруппа имеет неединичное пересечение с подгруппой KS/S. В частности, каждая силовская подгруппа из фактор-группы G/S имеет с KS/S нетривиальное пересечение. Поэтому $\pi(G/S) = \pi(KS/S) = \pi(K)$, поскольку $KS/S \simeq K$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — локально нильпотентная группа, F — некоторая ее конечно порожденная подгруппа и H — подгруппа, удовлетворяющая условию*

$$[H, F] \le t(H),$$

где $t(H)$ — периодическая часть группы H — является π-группой. Тогда если K — нормальный делитель подгруппы H и фактор-группа H/K является π'-группой, то

$$H = K\,C_H(F),$$

где $C_H(F)$ — централизатор подгруппы F в группе H.

Доказательство. 1) Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа H конечно порождена. Тогда H нильпотентна, и ее периодическая часть $t(H)$ конечна. В силу леммы 1 в группе H существует такая характеристическая подгруппа S, что $S \cap t(H) = 1$ и фактор-группа H/S является π-группой. Так как согласно условию леммы фактор-группа H/K — π'-группа, то индексы подгрупп S и K взаимно просты. Легко видеть, что тогда $H = SK$. Ввиду того, что $[S, F] \le S \cap t(H) = 1$, получаем, что подгруппа S содержится в централизаторе $C_H(F)$. Отсюда следует нужное равенство $H = K\,C_H(F)$.

2) Рассмотрим теперь общий случай. В силу условия $[H, F] \le t(H)$ подгруппа F нормализует H. Пусть H_i — произвольная конечно порожденная подгруппа из H, нормализуемая подгруппой F. Так как $[H_i, F] \le t(H) \cap H_i = t(H_i)$, то по условию леммы $t(H_i)$ — конечная π-группа. В силу изоморфизма $H_i/H_i \cap K \simeq H_iK/K \le H/K$ фактор-группа $H_i/H_i \cap K$ является π'-группой. Тогда в силу изложенного в п. 1 получаем

$$H_i = (H_i \cap K) C_{H_i}(F).$$

Покажем, что отсюда следует искомое равенство $H = K C_H(F)$. Так как $H = \bigcup_i H_i$, то для каждого элемента $h \in H$ существует такая подгруппа H_i, что $h \in H_i$. Как показано выше, элемент h представляется в виде ax, где $a \in \in H_i \cap K \leq K$ и $x \in C_{H_i}(F) \leq C_H(F)$. Поэтому элемент $h \in KC_H(F)$, и следовательно, $H = K C_H(F)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа и H — некоторая ее подгруппа. Если простое число q не делит порядок периодической части группы G, то ранг фактор-группы $H/H^q H'$ не превышает ранга фактор-группы $G/G^q G'$, где $G' = [G, G]$ — коммутант группы G.*

Доказательство. Известно, что центр Z бесконечной конечно порожденной группы G содержит элементы бесконечного порядка. Возьмем элемент z бесконечного порядка, принадлежащий центру Z группы G, и положим $\langle z_1 \rangle = H \cap \langle z \rangle$. Докажем лемму индукцией по показателю минимальности $m(G)$ группы G, введенному Д.И.Зайцевым в работе [6]. Рассмотрим два возможных случая.

1) Пусть $\langle z_1 \rangle = H \cap \langle z \rangle = 1$. Введем обозначения $\overline{G} = G/\langle z \rangle$ и $\overline{H} = = H\langle z \rangle / \langle z \rangle$. В силу теоремы Д.И.Зайцева [6] $m(\overline{G}) < m(G)$. Тогда по индуктивному предположению следует, что $r(\overline{H} / \overline{H}^q \overline{H}') \leq r(\overline{G} / \overline{G}^q \overline{G}')$. В силу изоморфизма

$$\overline{H} / \overline{H}^q \overline{H}' \simeq H\langle z \rangle / H^q H' \langle z \rangle \simeq H / H^q H'(H \cap \langle z \rangle)$$

и того, что $H \cap \langle z \rangle = 1$, получаем изоморфизм $\overline{H} / \overline{H}^q \overline{H}' \simeq H / H^q H'$. В силу изоморфизма $\overline{G} / \overline{G}^q \overline{G}' \simeq G / G^q G' \langle z \rangle$ фактор-группа $\overline{G} / \overline{G}^q \overline{G}'$ является гомоморфным образом фактор-группы $G/G^q G'$. Поэтому $r(\overline{G} / \overline{G}^q \overline{G}') \leq \leq r(G/G^q G')$. Таким образом, имеем нужное неравенство $r(H/H^q H') \leq \leq r(G/G^q G')$.

2) Пусть теперь $\langle z_1 \rangle = H \cap \langle z \rangle \neq 1$. В этом случае $\langle z_1 \rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа группы H. Так как фактор-группа $H/H^q H'$ конечна, то некоторая степень элемента z принадлежит $H^q H'$. Пусть $y \in z_1^n \in H^q H'$. Введем обозначения $\overline{G} = G/\langle y \rangle$ и $\overline{H} = H / \langle y \rangle$. В силу теоремы Д.И.Зайцева [6] $m(\overline{G}) < m(G)$. Тогда по предположению индукции имеем $r(\overline{H} / \overline{H}^q \overline{H}') \leq \leq r(\overline{G} / \overline{G}^q \overline{G}')$. Так как $y \in H^q H'$, то имеют место изоморфизмы

$$\overline{H} / \overline{H}^q \overline{H}' \simeq H/H^q H', \overline{G} / \overline{G}^q \overline{G}' \simeq G/G^q G'.$$

Таким образом, и в этом случае $r(H/H^q H') \leq r(G/G^q G')$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — локально нильпотентная группа с периодической частью $T = t(G)$ и F — некоторая ее конечно порожденная подгруппа. Если ранг централизатора $C_G(F)$ подгруппы F в группе G конечен, то ранг централизатора $C_{G/T}(FT/T)$ образа подгруппы F в фактор-группе G/T также конечен.*

Доказательство. Предположим, что централизатор $C_{G/T}(FT/T)$ — группа бесконечного ранга. В силу теоремы А.И. Мальцева [7] в группе $C_{G/T}(FT/T)$ существует абелева подгруппа A/T бесконечного ранга. Ясно, что $[A, F] \leq A \cap t(G) = t(A)$.

Пусть $r(C_G(F)) = r$. В фактор-группе $\overline{A} = A/T$ выберем конечно порождённую абелеву подгруппу $\overline{A}_0$ с $r+1$ образующими:

$$\overline{A}_0 = \langle \overline{a}_1 \rangle \times \langle \overline{a}_2 \rangle \times \cdots \times \langle \overline{a}_r \rangle \times \langle \overline{a}_{r+1} \rangle.$$

Пусть $B_0 = \text{гр}\,(a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1})$ и $H = \text{гр}\,(B_0, F)$. Тогда $[H, F] \leq t(H)$ и, очевидно, периодическая часть $t(H)$ группы H является конечной π-группой для некоторого множества простых чисел π. Если $K = H^q H'$, где q — простое число, которое не делит порядок $t(H)$, то K —нормальный делитель в группе H и фактор-группа H/K — π'-группа. В силу леммы 2 получаем $H = K\,C_H(F)$. Ввиду этого равенства имеем $r(H/H^q H') = r(H/K) \leq r(C_H(F)) = r$, т.е. $r(H/H^q H') \leq r$. С другой стороны, так как $B_0' \leq t(G)$, фактор-группа B_0/B_0' — группа без кручения. Поэтому $r(B_0/B_0^q B_0') = r+1$. В силу леммы 3 имеем неравенство

$$r+1 = r(B_0/B_0^q B_0') < r(H/H^q H') \leq r.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

2. В работе [2] доказано, что если локально нильпотентная группа G содержит такую конечно порожденную подгруппу F, что централизатор $C_G(F)$ имеет конечный ранг, то централизатор $C_{G/Z}(FZ/Z)$ образа подгруппы F в фактор-группе G/Z также имеет конечный ранг. В случае, когда $F = \langle f \rangle$ — циклическая подгруппа группы G, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения и f — некоторый ее элемент. Если ранг централизатора $C_G(f)$ равен r, то ранг централизатора $C_{G/Z}(fZ)$ образа элемента f в фактор-группе G/Z не превышает r.*

Доказательство. Пусть H — такая подгруппа группы G, что $H = \{g \mid [g,f] \in Z,\ g \in G\}$. Тогда фактор-группа $H/Z = C_{G/Z}(fZ)$. Для всякого $h \in H$ отображение $\varphi\colon h \mapsto [h,f]$ является гомоморфизмом подгруппы H в группу Z, причем ядро этого гомоморфизма совпадает с централизатором $C_H(f)$. Очевидно, $C_G(f) = C_H(f)$. По теореме о гомоморфизме фактор-группа $H/C_G(F)$ изоморфна некоторой подгруппе из группы Z. Так как центр Z группы G содержится в централизаторе $C_G(f)$, то $r(Z) \leq r(C_G(f)) = r$, и если $r(Z) = s \leq r$, то $r(H/C_G(f)) \leq s$. Согласно теореме 2.25 [8], фактор-группы $H/C_G(f)$ и H/Z являются группами без кручения, и следовательно, справедливы равенства $r(H) = r(C_G(f)) + r(H/C_G(f))$ и $r(H) = r(Z) + r(H/Z)$. Из этих равенств получаем

$$r(Z) + r(H/Z) = r(C_G(f)) + r(H/C_G(f)).$$

Ввиду того что $r(C_G(f)) = r$ и $r(H/C_G(f)) \leq s$, из последнего равенства имеем $s + r(H/Z) \leq r + s$ или $r(H/Z) \leq r$. Таким образом, $r(C_{G/Z}(fZ)) \leq r$, и лемма доказана.

Используя индукцию по длине верхнего центрального ряда группы G и доказательство леммы 4, легко доказать следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения и f — некоторый ее элемент. Если ранг централизатора $C_G(f)$ равен r, то ранг* *централизатора $C_{G/Z_k}(fZ_k)$ образа элемента f в фактор-группе G/Z_k, где Z_k — некоторый член верхнего центрального ряда группы G с натуральным номером k, не превышает r.*

В частности, ранги всех факторов верхнего центрального ряда группы G с натуральными номерами не превышают числа r.

Теорема 2. *Если в локально нильпотентной группе G без кручения централизатор $C_G(f)$ некоторого элемента f в группе G имеет конечный ранг, то она гиперцентральна.*

Доказательство. В силу результатов работы [2] в группе G можно построить возрастающую цепь гиперцентров с натуральными номерами $1 = Z_0 < Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_n < \ldots$. Если $r(C_G(f)) = r$, то из следствия 1 вытекает, что ранги всех факторов Z_k/Z_{k-1} этой цепи ограничены числом r. Пусть $Z_\omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$; покажем, что $r(C_{G/Z_\omega}(fZ_\omega)) \le r$.

Если H — такая подгруппа группы G, что

$$H = \{g \mid [g, f] \in Z_\omega, g \in G\},$$

то фактор-группа $H/Z_\omega = C_{G/Z_\omega}(fZ_\omega)$. Нужно доказать, что ранг фактор-группы H/Z_ω не превышает r. Действительно, пусть $X = \text{гр}(g_1, g_2, \ldots, g_t, f)$ — произвольная конечно порожденная подгруппа из группы H, содержащая элемент f. Так как $[g_i, f] \in Z_\omega$ и $Z_\omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$, то существует такой номер k, что $[g_i, f] \in Z_k$ для всех i, $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда $X \cap Z_\omega = X \cap Z_k$ и $[X, f] \le X \cap Z_\omega = X \cap Z_k$. Отсюда $XZ_k/Z_k \le C_{G/Z_k}(fZ_k)$. Согласно следствию 1 $r(C_{G/Z_k}(fZ_k)) \le r$, а значит, $r(XZ_k/Z_k) \le r$. Но в силу изоморфизмов $XZ_\omega/Z_\omega \simeq X/X \cap Z_\omega = X/X \cap Z_k \simeq XZ_k/Z_k$ получаем, что $r(XZ_\omega/Z_\omega) \le r$. Так как X — произвольная конечно порождённая подгруппа из H, то отсюда следует $r(H/Z_\omega) \le r$, т.е. $r(C_{G/Z_\omega}(fZ_\omega)) \le r$. По теореме 2 из работы [2] это означает, что центр фактор-группы G/Z_ω отличен от единицы, т.е. $Z_{\omega+1} > Z_\omega$. Продолжая эти рассуждения и применяя к ним трансфинитную индукцию, получаем, что группа G гиперцентральна. Теорема доказана.

3. В данном пункте рассматривается вопрос о гиперцентральности группы G в случае, когда G — произвольная локально нильпотентная группа. Доказательству теоремы 3 — основного результата настоящей работы — предпошлем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 5. *Пусть G — локально нильпотентная группа вида $G = P\langle f\rangle$, где P — нормальная p-подгруппа, $\langle f\rangle$ — циклическая подгруппа. Если централизатор $C_P(f)$ элемента f в группе P является конечной группой, то фактор-группа $P/[P, f]$ также является конечной группой и справедливо неравенство*

$$|P/[P, f]| \le |C_P(f)|.$$

Доказательство. 1) Предположим, что P — конечная подгруппа, и докажем лемму индукцией по порядку подгруппы P. Так как $[P, f]$ — нормальная подгруппа группы G, то в этом случае $[P, f] \cap Z(G) \ne 1$. Пусть z — элемент порядка p из пересечения $[P, f] \cap Z(G)$. Введем обозначения $\overline{P} = P/\langle z\rangle$ и $\bar{f} = f\langle z\rangle$. В силу очевидного неравенства $|\overline{P}| < |P|$ и по предположению индукции имеем

$$|\bar{P} / [\bar{P}, \bar{f}]| \leq |C_{\bar{P}}(\bar{f})|.$$

Так как $\langle z \rangle \leq [P, f]$, то в силу изоморфизма $\bar{P} / [\bar{P}, \bar{f}] \simeq P / [P, f]\langle z \rangle$ получаем, что $\bar{P} / [\bar{P}, \bar{f}] \simeq P / [P, f]$.

Пусть $\bar{H} = C_{\bar{P}}(\bar{f})$. Ясно, что $[H, f] \leq \langle z \rangle$. Если $[H, f] = 1$, то $H = C_P(f)$, и из того, что $|\bar{H}| < |H|$, следует $|\bar{H}| < |C_P(f)|$. Таким образом, $|P / [P, f]| < |C_P(f)|$.

Если $[H, f] = \langle z \rangle$, то $H / C_H(f) \simeq [H, f]$. Тогда

$$|\bar{H}| = |H / \langle z \rangle| = |H / [H, f]| = |C_H(f)| \leq |C_P(f)|.$$

Следовательно, в этом случае получаем искомое неравенство

$$|P / [P, f]| \leq |C_P(f)|.$$

2) Пусть теперь P — бесконечная подгруппа и $K / [P, f]$ — произвольная конечная подгруппа в фактор-группе $P / [P, f]$. Тогда $K = [P, f] S$ для некоторой конечной подгруппы S из P. Подгруппа $A = \text{гр}(S, f)$ имеет вид $R\langle f \rangle$, где $R = P \cap A$ — конечная подгруппа группы P, содержащая подгруппу S и содержащаяся в подгруппе K. Следовательно, $K = [P, f] R$ и $[R, f] \leq R \cap [P, f]$. В силу доказанного выше для случая 1 имеем неравенство $|R / [R, f]| \leq |C_R(f)| \leq |C_P(f)|$. Поэтому $|R / R \cap [P, f]| \leq |C_P(f)|$. В силу изоморфизма $R / R \cap [P, f] \simeq R[P, f] / [P, f] = K / [P, f]$ получаем $|K / [P, f]| \leq |C_P(f)|$. Таким образом, в силу произвольности выбора подгруппы $K / [P, f]$, имеем неравенство $|P / [P, f]| \leq |C_P(f)|$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — локально нильпотентная группа, $\langle f \rangle$ — некоторая ее циклическая подгруппа и P — силовская p-подгруппа в периодической части $t(G)$. Если централизатор $C_P(f)$ элемента f в группе P является конечной группой, то пересечение подгруппы P с центром $Z = Z(G)$ группы G отлично от единицы.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha, \alpha \in I\}$ — локальная система конечно порожденных подгрупп группы G, содержащих подгруппу, порожденную неединичным элементом $x \in P$ и элементом f. Положим $P_\alpha = P \cap G_\alpha$ и возьмем элемент x_α порядка p из пересечения $P_\alpha \cap Z(G_\alpha)$. Так как подгруппа $H = \text{гр}(x_\alpha, \alpha \in I)$ содержится в централизаторе $C_P(f)$, то H — конечная группа.

Зафиксируем индекс $\alpha \in I$ и рассмотрим подмножество индексов $J \subset I$ таких, что $G_\alpha \leq G_\beta$, $\beta \in J$. Заметим, что подмножеству индексов J соответствует множество подгрупп $\{G_\beta, \beta \in J\}$, которое также будет локальной системой подгрупп группы G. Множество индексов J разобьем на конечное число подмножеств $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n$ по принципу: $\gamma, \delta \in J_s$ тогда и только тогда, когда $x_\gamma = x_\delta$. В силу утверждения работы [2] получаем, что хотя бы одному из подмножеств индексов J_s (например, J_1) соответствует множество подгрупп $\{G_\delta, \delta \in J_1\}$, которое будет локальной системой подгрупп группы G. Общее значение совпадающих членов обозначим через y, $y = x_\gamma = x_\delta = \ldots$. Тогда $y \in Z(G_\delta)$ для всех $\delta \in J_1$ и, следовательно, $y \in Z(G)$. Таким образом, пересечение $P \cap Z(G)$ неединично. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — локально нильпотентная группа и f — некоторый ее элемент. Если централизатор $C_G(f)$ элемента f в группе G имеет конечный ранг и все силовские подгруппы периодической части $t(C_G(f))$ централизатора $C_G(f)$ конечны, то G-гиперцентральная группа.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа периодической части $t(G)$ группы G и X — последний член верхнего центрального ряда группы G. Покажем сначала, что $P < X$. Так как пересечение $P \cap X$ — нормальная подгруппа в G, то рассмотрим фактор-группы $\overline{G} = G / P \cap X$ и $\overline{P} = P / P \cap X$. Тогда $\overline{P}$ — силовская p-подгруппа в $t(\overline{G})$. Докажем, что справедливо неравенство $|C_{\overline{P}}(\bar{f})| \leq |C_P(f)|$. Действительно, пусть $\overline{H} = C_{\overline{P}}(\bar{f})$. Тогда $[H, f] \leq$ $\leq P \cap X$. В силу леммы 5 имеем неравенство

$$|\overline{H}| = |H / P \cap X| \leq |H / [H, f]| \leq |C_H(f)| \leq |C_P(f)|,$$

т.е. $|C_{\overline{P}}(\bar{f})| \leq |C_P(f)|$. Так как централизатор $C_{\overline{P}}(\bar{f})$ элемента $\bar{f}$ в группе $\overline{P}$ является конечной группой, то по лемме 6 пересечение $\overline{P} \cap Z(\overline{G})$ отлично от единицы. Ввиду того, что $Z(\overline{G}) \leq \overline{X}$, имеем $\overline{P} \cap \overline{X} \neq 1$. Полученное противоречие доказывает, что $P < X$.

Таким образом, каждая силовская p-подгруппа периодической части $t(G)$ группы G содержится в ее гиперцентре X. Следовательно, $t(G)$ также содержится в гиперцентре X.

В силу теоремы 1 централизатор $C_{G/t(G)}(f t(G))$ образа элемента f в фактор-группе $G / t(G)$ имеет конечный ранг. Так как фактор-группа $G / t(G)$ — группа без кручения, то по теореме 2 она является гиперцентральной группой. А так как $t(G) \leq X$, то и вся группа G гиперцентральна. Теорема доказана.

В качестве частного случая теоремы 3 приведем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть G — локально нильпотентная группа и f — некоторый ее элемент. Если централизатор $C_G(f)$ элемента f в группе G является конечно порожденной подгруппой, то группа G гиперцентральна.*

1. *Мальцев А.И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. –1948.– **22**, № 2.– С. 351–352.
2. *Зайцев Д.И., Онищук В.А.* О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлетворяющим условию конечности // Укр. мат. журн. –1991.– **43**, № 7, 8.– С. 1084–1087.
3. *Онищук В.А.* Локально нильпотентные группы с централизатором элемента конечного ранга // Междунар. конф. по алгебре: Тез. сообщ.– Барнаул, 1991.–С. 77.
4. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп.– М.: Наука, 1982.– 288 с.
5. *Neumann B.H.* Identical relations in groups // Proc. London Math. Soc.– 1957.- **7**, N 3.– P.29–62.
6. *Зайцев Д.И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968.– **20**, № 4, 8.– С. 472–482.
7. *Мальцев А.И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. –1951.– **28**, № 3.– С. 567–588.
8. *Robinson D.J.S.* Finiteness condition and generalized soluble groups. Pt. 1.– New York: Springer, 1972.– 210 p.

Получено 23.10.91