УДК 517.986

В. Л. Островский, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев),
С. Д. Сильвестров, студ. (Киев. ун-т)

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФОРМ ГРАДУИРОВАННОГО АНАЛОГА АЛГЕБРЫ ЛИ

Описаны вещественные формы $\mathbb{Z}_2^n$-градуированного аналога алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ и изучены их неприводимые представления.

Описані дійсні форми $\mathbb{Z}_2^n$-градуйованого аналога алгебри Лі $sl(2, \mathbb{C})$ та вивчені їх незвідні представлення.

Развитие теории квантовых физических систем стимулировало интерес к квадратичным алгебрам и их представлениям (см. [1] и др.). Если в квадратичной алгебре введена вещественная структура, естественно рассматривать $*$–представления соответствующей алгебры.

В настоящей работе изучаются представления вещественных структур в $\mathbb{Z}_2^n$-градуированном аналоге алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$. Изложенные результаты анонсированы в [2].

1. Напомним, что $\mathbb{Z}_2^n$-градуированная (цветная) алгебра Ли — это $\mathbb{Z}_2^n$-градуированное линейное пространство

$$L = \oplus_{i \in \mathbb{Z}_2^n} L_i , \quad \mathbb{Z}_2^n = \{0, 1\}^n,$$

в котором определена билинейная операция $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такая, что для $a \in L_i$, $b \in L_k$ выполняются соотношения

$$\langle a, b \rangle = c \in L_l, \ \operatorname{grad} c = \operatorname{grad} a \cdot \operatorname{grad} b,$$

$$\langle a, b \rangle = -(-1)^{\sum_r g_r(a) g_r(b)} \langle b, a \rangle.$$

(Здесь $\operatorname{grad} u = (g_1(u),\ldots, g_n(u))$ — градуировка элемента u, $\cdot$ — операция в $\mathbb{Z}_2^n$, и выполнено тождество Якоби с учетом соответствующего правила знаков (см., например, [3]).)

В дальнейшем для обозначения операции $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем использовать обозначение $\{a, b\}$ (антикоммутатор), если $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$, и $[a, b]$ (коммутатор), если $\langle a, b \rangle = -\langle b, a \rangle$.

Если выбрать $n = 3$ и трехмерное пространство $L = L_{(1,1,0)} \oplus L_{(1,0,1)} \oplus L_{(0,1,1)}$ с базисом a_1, a_2, a_3, то получаем соотношения

$$\begin{aligned} &[a_j, a_j] = 0, \ j = 1, 2, 3, \\ &\{a_1, a_2\} = c_{12} a_3, \\ &\{a_2, a_3\} = c_{23} a_1, \\ &\{a_1, a_3\} = c_{13} a_2, \end{aligned} \tag{1}$$

В настоящей работе рассматривается аналог алгебры $sl(2, \mathbb{C})$ — алгебра, полученная из (1) при $c_{12} = c_{23} = c_{13} = 1$ (если в (1) заменить антикоммутаторы коммутаторами, то получим $sl(2, \mathbb{C})$).

В дальнейшем рассматриваем алгебру L вложенной в ее универсальную обертывающую $U(L)$-ассоциативную алгебру с тремя образующими a_1, a_2, a_3 и соотношениями

$$a_1a_2 + a_2a_1 = a_3,$$
$$a_2a_3 + a_3a_2 = a_1,$$
$$a_3a_1 + a_1a_3 = a_2. \qquad (2)$$

Поскольку в дальнейшем изучается алгебра $U(L)$, в данной работе считаем изоморфными алгебры L и L', если они порождают изоморфные алгебры $U(L)$ и $U(L')$. Например, соотношения (2) можно получить с группой $\mathbb{Z}_2^n$, отличной от $\mathbb{Z}_2^3$ (но не $\mathbb{Z}_2$).

2. Рассмотрим вопросы, связанные с введением в L (соответственно $U(L)$) вещественной структуры.

Определение 1. *Под вещественной структурой в алгебре L понимаем антилинейное отображение (инволюция) $*: L \to L$ такое, что $a^{**} = a$ и $\langle a, b\rangle^* = \langle b^*, a^*\rangle$ для любых $a, b \in L$.*

Инволюция в L единственным образом продолжается до инволюции в ассоциативной алгебре $U(L)$.

Инволюции в L будем считать эквивалентными, если они приводят к изоморфным $*$–алгебрам $U(L)$.

Утверждение 1. *В алгебре L существуют три не эквивалентные инволюции:* 1) $a_j^* = a_j$, $j = 1, 2, 3$; 2) $a_1^* = a_1$, $a_2^* = -a_2$, $a_3^* = -a_3$; 3) $a_1^* = a_1$, $a_2^* = a_3$.

Доказательство проводится непосредственно.

Квадратичную алгебру $U(L)$ с i–й инволюцией в дальнейшем обозначим через R_i.

В алгебрах R_i, $i = 1, 2, 3$, выберем самосопряженные образующие следующим образом: $E_0 = a_1$ во всех R_i; $E_1 = a_2 + a_3$ в R_1 и R_3; $E_1 = i(a_2 + a_3)$ в R_2; $E_2 = a_2 - a_3$ в R_1, $E_2 = i(a_2 - a_3)$ в R_2 и R_3. Для образующих E_0, E_1, E_2 два соотношения имеют вид

$$\{E_0, E_1\} = E_1, \quad \{E_0, E_2\} = -E_2, \qquad (3)$$

общий для всех трех алгебр R_i, а третье соотношение в алгебрах R_1, R_2, R_3 соответственно имеет вид

$$E_1^2 - E_2^2 = 2E_0,$$
$$E_1^2 - E_2^2 = -2E_0,$$
$$E_1^2 + E_2^2 = 2E_0. \qquad (3')$$

3. Перейдем к изучению $*$–представлений алгебр R_i – троек самосопряженных операторов E_0, E_1, E_2 в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющих соотношениям (3) и (3′). Поскольку операторы не предполагаются ограниченными, следует выделить класс "интегрируемых" представлений, т.е. указать точный смысл соотношений (3) и (3′) для неограниченных E_0, E_1, E_2.

Определение 2. *"Интегрируемым" представлением алгебры R_i назовем тройку самосопряженных операторов E_0, E_1, E_2, между которыми на плотном в H множестве Φ, состоящем из векторов, целых для операторов E_0, E_1, E_2, выполнены соотношения* (3) *и* (3′).

Для таким образом определенных операторов E_0, E_1, E_2 выполнены соотношения [4]

$$E_{E_0}(\Delta)E_1\varphi = E_1E_{E_0}(1 - \Delta)\varphi,$$
$$E_{E_0}(\Delta)E_2\varphi = E_2E_{E_0}(-1 - \Delta)\varphi, \ \varphi \in \Phi,$$

которые в дальнейшем используются при изучении представлений. Здесь $E_{E_0}(\cdot)$ — разложение единицы самосопряженного оператора E_0.

Рассмотрим самосопряженный оператор D, который в алгебре R_i имеет соответственно вид

$$D = E_1^2 + E_0^2 - E_0 = E_2^2 + E_0^2 + E_0,$$
$$D = -E_1^2 + E_0^2 - E_0 = -E_2^2 + E_0^2 + E_0,$$
$$D = E_1^2 - E_0^2 + E_0 = -E_2^2 - E_0^2 + 3E_0.$$

(Разночтений при определении D не возникает, поскольку в силу [4] операторы E_1^2, E_2^2 коммутируют с E_0 в смысле разложений единицы.)

Лемма 1. *Оператор D коммутирует с E_0, E_1, E_2 в смысле разложения единицы.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру R_1 (случаи R_2 и R_3 аналогичны). Оператор E_0 коммутирует с D, поскольку он коммутирует с E_1^2. Так как [4]

$$E_{E_0}(\Delta) g_{\text{even}}(E_1) = g_{\text{even}}(E_1) E_{E_0}(\Delta),$$
$$E_{E_0}(\Delta) g_{\text{odd}}(E_1) = g_{\text{odd}}(E_1) E_{E_0}(1 - \Delta)$$

для всех измеримых $\Delta \in \mathbb{R}^1$ и всех ограниченных измеримых функций g_{even}, g_{odd} (g_{even} четная, g_{odd} нечетная), для любой ограниченной измеримой функции f имеем

$$f(D) g_{\text{even}}(E_1) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1 + \lambda_0^2 - \lambda_0)\, dE_{E_1^2}(\lambda_1)\, dE_{E_0}(\lambda_0) g_{\text{even}}(E_1) = g_{\text{even}}(E_1) f(D),$$

$$\begin{aligned} f(D) g_{\text{odd}}(E_1) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1 + \lambda_0^2 - \lambda_0)\, dE_{E_1^2}(\lambda_1)\, dE_{E_0}(\lambda_0) g_{\text{odd}}(E_1) = \\ &= g_{\text{odd}}(E_1) \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1 + \lambda_0^2 - \lambda_0)\, dE_{E_1^2}(\lambda_1)\, dE_{E_0}(1 - \lambda_0) = \\ &= g_{\text{odd}}(E_1) \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1 + (1-\lambda_0)^2 - (1 - \lambda_0))\, dE_{E_1^2}(\lambda_1)\, dE_{E_0}(\lambda_0) = g_{\text{odd}}(E_1) f(D). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых ограниченных измеримых функций f, g ограниченные операторы $f(D)$ и $g(E_1)$ коммутируют. Аналогично, поскольку

$$f(D) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_2 + \lambda_0^2 + \lambda_0)\, dE_{E_2^2}(\lambda_2)\, dE_{E_0}(\lambda_0),$$

то $f(D)$ коммутирует с $g(E_1)$.

4. Изучим общие для всех алгебр R_i свойства неприводимых $*$–представлений. Изучим предварительно некоторые свойства спектра оператора E_0. В силу первых двух соотношений в алгебре R_i $\forall \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$, $l = 1, 2, 3\ldots$

$$E_{E_0}(\Delta) E_{1,l} = E_{1,l} E_{E_0}(\Delta - 1),$$
$$E_{E_0}(\Delta) E_{2,l} = E_{2,l} E_{E_0}(-1 - \Delta). \quad (*)$$

(Здесь $E_{i,l} = E_{E_i}[-l, l]\, E_i$, $l = 1, 2.$)

Рассмотрим два отображения $F_1(\lambda) = 1 - \lambda$, $F_2(\lambda) = -1 - \lambda$ и динамическую систему (дискретную) на $\mathbb{R}^1$, порожденную этими отображениями.

Лемма 2. *В неприводимом представлении алгебры R_i спектр оператора E_0 дискретен и лежит на некоторой орбите динамической системы, порожденной F_1, F_2.*

Доказательство. Действительно, если $\delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^1)$ инвариантно относительно F_1, F_2, то оператор $E_{E_0}(\delta)$ коммутирует в силу (4) с E_0, E_1, E_2 и поэтому равен 0 или 1. Таким образом, в неприводимом представлении спектральная мера оператора E_0 эргодична относительно действия динамической системы. Поскольку у данной динамической системы существует измеримое сечение (множество, содержащее по одной точке из каждой орбиты), например, $[-1/2, 1/2]$, то эргодическая мера сосредоточена на одной орбите динамической системы.

Таким образом, для описания неприводимых представлений достаточно описать неприводимые представлеия, при которых спектр оператора E_0 сосредоточен на орбите динамической системы, порожденной F_1, F_2, проходящей через точку $\lambda_0 \in [-1/2, 1/2]$.

Лемма 3. *В неприводимом представлении алгебры R_i спектр оператора E_0 прост.*

Доказательство. Пусть H_λ — собственное подпространство оператора E_0 с собственным значением λ. Поскольку E_0 коммутирует с E_1^2 и E_2^2, то H_λ инвариантно относительно них. Если $H_\lambda \neq \mathbb{C}^1$, то существует подпространство $H'_\lambda \subset H_\lambda$, инвариантное относительно E_1^2, E_2^2. Но тогда подпространство $H' \subset H$, полученное в результате действия на H'_λ полугруппы, порожденной E_1 и E_2, инвариантно и отлично от H.

Из соотношений (3) следует, что справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Если $e \in H_\lambda$, то:* 1) $E_1 e \in H_{1-\lambda}$; 2) $E_2 e \in H_{-1-\lambda}$.

Пусть $\{e_\lambda\}$ – собственный базис для оператора E_0. Тогда

$$E_1 e_\lambda = b_1(\lambda) e_{1-\lambda}, \quad E_2 e_\lambda = b_2(\lambda) e_{-1-\lambda}. \tag{5}$$

При этом в силу самосопряженности E_1, E_2

$$b_1(\lambda) = \overline{b_1(1-\lambda)},\; b_2(\lambda) = \overline{b_2(-1-\lambda)},$$

$$E_1^2 e_\lambda = |\, b_1(\lambda)|^2 e_\lambda,\; E_2^2 e_\lambda = |\, b_2(\lambda)|^2.$$

В дальнейшем, переходя к унитарно эквивалентному представлению, считаем $b_j(\lambda) \geq 0$, если $F_j(\lambda) \neq \lambda$, и $b_j(\lambda) \in \mathbb{R}^1$, если $F_j(\lambda) = \lambda$, $j = 1, 2$. Для нахождения $b_j(\lambda)$ воспользуемся леммой 1.

Поскольку в неприводимом представлении $D = cI$, $c \in \mathbb{R}^1$, то, например, для алгебры R_1

$$b_1^2(\lambda) e_\lambda = E_1^2 e_\lambda = (D - E_0^2 + E_0) e_\lambda = (c - \lambda^2 + \lambda) e_\lambda = \varphi_1(\lambda) e_\lambda,$$

$$b_2^2(\lambda) e_\lambda = E_2^2 e_\lambda = (D - E_0^2 - E_0) e_\lambda = (c - \lambda^2 - \lambda) e_\lambda = \varphi_2(\lambda) e_\lambda. \tag{6}$$

Аналогично, в алгебре R_2

$$b_1^2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - c \equiv \varphi_1(\lambda),$$

$$b_2^2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - c \equiv \varphi_2(\lambda) \tag{7}$$

и в R_3

$$b_1^2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + c \equiv \varphi_1(\lambda),$$

$$b_2^2(\lambda) = -\lambda^2 + 3\lambda - c \equiv \varphi_2(\lambda). \tag{8}$$

Лемма 5. *Представления, соответствующие различным парам* (λ_0, c),

$\lambda_0 \in [-1/2, 1/2]$, $c \in \mathbb{R}^1$, *унитарно не эквивалентны.*

Доказательство. Действительно, параметр $\lambda_0 \in [-1/2, 1/2]$ задает орбиту динамической системы, на которой расположен спектр оператора E_0, а параметр c определяет действие оператора D, поэтому представления, соответствующие различным парам (λ_0, c), не эквивалентны.

Замечание 1. Значениям параметра $\lambda_0 = \pm 1/2$ соответствуют случаи, когда отображение F_1 или F_2 имеет неподвижную точку λ_0. В этом случае $b_1(\lambda_0)$ или $b_2(\lambda_0)$ соответственно определяется с точностью до знака и паре (λ_0, c) может соответствовать два представления.

Найдем условия, при которых паре (λ_0, c) отвечает неприводимое представление R_i, $i = 1, 2, 3$.

Пусть для пары (λ_0, c), $\lambda_0 \in [-1/2, 1/2]$, $c \in \mathbb{R}^1$, существует λ, принадлежащее орбите точки λ_0, такое что $\varphi_1(\lambda) > 0$, но $\varphi_1(F_2(\lambda)) < 0$ или $\varphi_2(\lambda) > 0$, но $\varphi_2(F_1(\lambda)) < 0$ (φ_1 и φ_2 определяются соответствующими алгебре R_i формулами (6) – (8)). Тогда паре (λ_0, c) не соответствует никакое неприводимое представление алгебры R_i. Действительно, $b_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, вещественны, а в указанном случае выражение для $b_j^2(\lambda)$ отрицательно.

В случае же, когда $\varphi_1(\lambda) = 0$ (или $\varphi_2(\lambda) = 0$), подпространства, натянутые на собственные пространства H_λ, отвечающие собственным значениям $F_1(\lambda)$, $F_2(F_1(\lambda)), F_1(F_2(F_1(\lambda)))\ldots$ и $F_2(\lambda), F_1(F_2(\lambda)), F_2(F_1(F_2(\lambda)))\ldots$ инвариантны.

Лемма 6. *Паре (λ_0, c) соответствует неприводимое представление, если выполнено одно из условий.*

1) *Для всех λ, лежащих на орбите O_{λ_0} точки λ_0, $\varphi_j(\lambda) > 0$, $j = 1, 2$.*

2) *Для некоторого $\lambda \in O_{\lambda_0}$ $\varphi_1(\lambda) = 0$, $\varphi_2(\lambda) > 0$ и для всех точек μ таких, что $\mu \in \Delta_1 = \{F_2(\lambda), F_1(F_2(\lambda)), F_2(F_1(F_2(\lambda)))\ldots\}$ $\varphi_j(\mu) > 0$, $j = 1, 2$.*

3) *Для некоторого $\lambda \in O_{\lambda_0}$ $\varphi_2(\lambda) = 0$, $\varphi_1(\lambda) > 0$ и $\forall \mu \in \Delta_2 = \{F_1(\lambda), F_2(F_1(\lambda)), F_1(F_2(F_1(\lambda))), \ldots\}$ $\varphi_j(\mu) > 0$, $j = 1, 2$.*

4) *Для некоторого $\lambda \in O_{\lambda_0}$ существует $\lambda' \in O_{\lambda_0}$ такое, что $\varphi_j(\lambda) = 0$, $\varphi_k(\lambda) > 0$, $\varphi_{j'}(\lambda') > 0$, $\varphi_{k'}(\lambda') = 0$, $\lambda' = F_{j'}(F_{k'}(\ldots F_k(\lambda)\ldots))$ и $\forall \mu \in \Delta_1 = \{F_2(\lambda), F_1(F_2(\lambda)), \ldots, F_1(\lambda')\}$ $\varphi_1(\mu) > 0$, $\varphi_2(\mu) > 0$, $j \neq k$, $j' \neq k'$.*

Спектр оператора E_0 — множество O_{λ_0} в случае 1, множество $\Delta \cup \lambda$ — в случаях 2, 3, множество $\Delta \cup \lambda \cup \lambda'$ – в случае 4.

Доказательство. Неприводимость представления следует из того, что спектр оператора E_0 простой, и положительности $\varphi_i(\lambda)$, $i = 1, 2$. Остальные утверждения — итог приведенных выше рассуждений.

5. Перейдем к изучению представлений для каждой из алгебр R_i, $i = 1, 2, 3$. Отметим, что представления R_1 изучены в [5]. Аналогичное описание получим, пользуясь развитой техникой.

а) Для алгебры R_1 заметим, прежде всего, что все неприводимые представления конечномерны. Действительно, выражения (6) для $b_1^2(\lambda)$ и $b_2^2(\lambda)$ содержат член $-\lambda^2$ и, следовательно, могут быть положительными лишь для конечного числа точек $\mu \in O_{\lambda_0} = \{\lambda_k = (-1)^k(\lambda_0 - k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$ $(\lambda_0 \in \{-1/2, 1/2\})$. Таким образом, для R_1 реализуется только случай 4 из леммы 6. Непосредственные вычисления показывают, что условия леммы 6 могут быть выполнены только для $\lambda_0 \in \{-1/2, 0, 1/2\}$. Из условий $\varphi_1(\lambda_l) = 0$, $\varphi_2(\lambda_m) = 0$ получаем $c = \lambda_l^2 - \lambda_l = \lambda_m^2 + \lambda_m$, откуда с учетом $\varphi_2(\lambda_l) > 0, \varphi_1(\lambda_m) > 0$ имеем для $\lambda_0 = 0$, $l = -m$ и $c_l = l^2 - |l|$, причем $\operatorname{sign} l = (-1)^{l+1}$; размерность представления $2|l| + 1$.

При $\lambda_0 = 1/2$ орбита содержит неподвижную относительно F_1 точку λ_0. При этом $\lambda_0 = \lambda_1, \lambda_{-1} = \lambda_2, \ldots, \lambda_{-k} = \lambda_{k+1}, \ldots$. Числу c соответствует неприводимое представление, если $\varphi_1(\lambda_l) = 0, \varphi_2(\lambda_l) > 0$ или $\varphi_1(\lambda_l) > 0, \varphi_2(\lambda_l) = 0$. Отсюда $c_l = \lambda_l^2 - |\lambda_l|, l = 1, 2, 3, \ldots$; размерность представления l; паре (λ_0, c) соответствует два представления, различающихся знаком при $b_1(\lambda_1) = \pm (\varphi_1(\lambda_0))^{1/2}$ (см. замечание 1).

Аналогично, при $\lambda_0 = -1/2$ точка λ_0 неподвижна относительно F_2, поэтому $\lambda_0 = \lambda_{-1}, \ldots, \lambda_k = \lambda_{-k-1}, \ldots$. При этом $c_l^2 = \lambda_l^2 - |\lambda_l|, l = 0, 1, 2, \ldots$; размерность представления $l + 1$; паре (λ_0, c_l) соответствуют также два неприводимых представления.

Теорема 2 [5]. *Все неприводимые представления алгебры R_1 конечномерны. В собственном базисе E_0 они реализуются по формулам*

$$E_0 e_k = \lambda_k e_k, \quad E_1 e_k = (\varphi_1(\lambda_k))^{1/2} e_{k+(-1)^k},$$
$$E_2 e_k = (\varphi_2(\lambda_k))^{1/2} e_{k-(-1)^k},$$

где

$$\varphi_1(\lambda_k) = l^2 - l - \lambda_k^2 + \lambda_k, \quad \varphi_2(\lambda_k) = l^2 - l - \lambda_k^2 - \lambda_k,$$

причем возможны случаи:

1) $\dim H = 2l + 1$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ $k = -l, \ldots, l$, $\lambda_k = (-1)^{k+1} k$;

2) $\dim H = l + 1$ $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ $\lambda_k = (-1)^k(-1/2 - k), k = 0, \ldots, l$, *и при* $k = 0$ $E_2 e_0 = \pm (\varphi_2(-1/2))^{1/2} e_0$;

3) $\dim H = l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ $\lambda_k = (-1)^k(1/2 - k), k = 1, \ldots, l$, *и при* $k = 1$ $E_1 e_1 = \pm (\varphi_1(1/2))^{1/2} e_1$.

б) Для алгебры R_2 выражения $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ содержат член λ^2, и следовательно, для ее представлений реализуются случаи 1, 2 и 3 теоремы 1 (исключение составляет тривиальное представление $E_0 = E_1 = E_2 = 0$, соответствующее $\lambda_0 = 0, c = 0$; здесь реализуется случай 4). В отличие от случая R_1, для алгебры R_2 любому значению $\lambda_0 \in [-1/2, 1/2]$ соответствуют неприводимые представления.

При $c < \lambda_0^2 - |\lambda_0|$ имеем $\varphi_1(\lambda) > 0$, $\varphi_2(\lambda) > 0$ для всех $\lambda \in O_{\lambda_0} = \{(-1)^k(\lambda_0 - - k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$, поэтому реализуется случай 1 из теоремы 1; спектр оператора E_0 совпадает с O_{λ_0}, а паре (λ_0, c) соответствует единственное неприводимое представление (при $\lambda_0 = \pm 1/2$ — два неприводимых представления, см. замечание 1). При $c = \lambda_0^2 - |\lambda_0|$ паре (λ_0, c) отвечает два неприводимых представления (при $\lambda_0 = 0$, $c = 0$, третье тривиальное) соответствующие случаи 2 или 3 теоремы 1. При $c > \lambda_0^2 - |\lambda_0|$ неприводимые представления существуют для $c = (\lambda_0 - k)^2 - |(\lambda_0 - k)|$; реализуются случаи 2 или 3 теоремы 1, причем при $\lambda_0 = 0, \pm 1/2$ реализуются оба случая одновременно (паре (λ_0, c) соответствует два неприводимых представления).

Теорема 3. *Алгебра R_2 имеет нетривиальные неприводимые представления лишь неограниченными операторами. Представления параметризуются параметрами $\lambda_0 \in [-1/2, 1/2]$ и $c \in (-\infty, \lambda_0^2 - |\lambda_0|] \cup \{(\lambda_0 - k)^2 - |(\lambda_0 - k)|: k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$, причем при $\lambda_0 = \pm 1/2$ или $c = \lambda_0^2 - |\lambda_0|$ или $c = k^2 - |k|, \lambda_0 = 0$ $(k \in \mathbb{Z})$, паре (λ_0, c) соответствует два нетривиальных неприводимых представления, в остальных случаях паре (λ_0, c) соответствует единственное неприводимое представление. Представления реализуются по формулам*

$$E_0 e_k = \lambda_k e_k, \quad E_1 e_k = (\varphi_1(\lambda_k))^{1/2} e_{k+(-1)^k},$$
$$E_2 e_k = (\varphi_2(\lambda_k))^{1/2} e_{k-(-1)^k},$$

где

$$\varphi_1(\lambda_k) = \lambda_k^2 - \lambda_k - c, \quad \varphi_2(\lambda_k) = \lambda_k^2 + \lambda_k - c,$$

и

1) *при* $c < \lambda_0^2 - |\lambda_0|, \lambda_0 \neq \pm 1/2, k \in \mathbb{Z}$; $\lambda_0 = 1/2, k = 1, 2, \ldots, E_1 e_1 = \pm (\varphi_1(1/2))^{1/2} e_1$ $\lambda_0 = 1/2, k = 0, 1, \ldots, E_2 e_0 = \pm (\varphi_2(-1/2))^{1/2} e_0$;

2) *при* $c = \lambda_0^2 - |\lambda_0|, k = 0, 1, \ldots$ *или* $k = -1, -2, \ldots$ *при* $\lambda_0 < 0, k = 1, 2, \ldots$ *или* $k = 0, -1, \ldots$ *при* $\lambda_0 > 0$, *и* $k = 1, 2, \ldots$ *или* $k = -1, -2, \ldots$ *при* $\lambda_0 = 0$ (*в пространстве, натянутом на* e_0 *реализуется тривиальное представление*);

3) *при* $c = (\lambda_0 - m)^2 - |(\lambda_0 - m)|$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k = m, m+1, \ldots$ *или* $k = -m, -m-1, \ldots$ (*при* $\lambda_0 = 0, \pm 1/2$ *оба случая возникают одновременно*).

в) Для алгебры R_3 реализуется следующий случай.

Теорема 4. *Все неприводимые представления алгебры R_3 одномерны и имеют один из видов: $E_0 = 1/2, E_1 = \pm 1$, $E_2 = 0$ или $E_0 = E_1 = E_2 = 0$.*

Доказательство. Действительно, поскольку выражение для $\varphi_1(\lambda)$ содержит λ_0^2, а выражение для $\varphi_2(\lambda)$ содержит $-\lambda_0^2$, непосредственные вычисления показывают, что представления могут соответствовать только парам $\lambda_0 = 1/2, c = 3/2$ и $\lambda_0 = 0, c = 0$.

1. *Склянин Е.К.* О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера // Функцион. анализ и его прил. –1982.–**16**, вып. 4.–С.27–34.
2. *Островский В.Л., Сильвестров С.Д.* О представлениях вещественных форм градуированного аналога алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$ // XIV шк. по теории операторов в функциональных пространствах. Тез. докл. Ч.2.– Новгород : Пединститут, 1989.–С. 63.
3. *Самойленко Ю.С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.– Киев: Наук. думка, 1984.–232 с.
4. *Островский В.Л. , Самойленко Ю.С.* Семейства неограниченных самосопряженых операторов, связанных нелиевскими соотношениями // Функцион. анализ и его прил.–1989.–**23**, вып.2.–С.67–68.
5. *Городний М.Ф., Подколзин Г.Б.* Неприводимые представления градуированной алгебры Ли. Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.– Киев: Ин–т математики АН УССР, 1984. –С.66–77.

Получено 26. 06.91