УДК 512.546

С. П. Панасюк, ассист. (Киев. ун-т),
С. Р. Султанов, ассист. (Рязан. радиотехн. ин-т)

К ВОПРОСУ О ПОЛНОТЕ ПО ДЬЕДОННЕ ПРОСТРАНСТВ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ И ПОДГРУПП

Доказана полнота по Дьедонне пространства замкнутых подмножеств 2^X в топологии Вьеториса–Линделефа или паракомпактного сильно нульмерного пространства X. Изучаются связанные с этим результатом вопросы.

Доведена повнота за Дьєдонне простору замкнених підмножин 2^X у топології В'єторіса–Ліндельофа або паракомпактного сильно нульмірного простору X. Вивчаються пов'язані з цим результатом питання.

Результаты данной работы анонсированы в тезисах доклада [1].

Предбазу топологии Вьеториса в пространстве 2^X образуют множества

$$D_1(U)=\{M\in 2^X \mid M\subset U\},\quad D_2(V)=\{M\in 2^X \mid M\cap V\neq\varnothing\},$$

где U и V пробегают открытые подмножества пространства X. Если G – топологическая группа, то множество $\mathfrak{L}(G)$ замкнутых подгрупп группы G суть замкнутое в 2^G подпространство [2]. Все определения из общей топологии см. в монографии [3].

Лемма 1. *Пусть X – сильно паракомпактное хаусдорфово пространство, U — открыто-замкнутое подмножество пространства X и $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — покрытие пространства $X\setminus U$ открытыми множествами W_α. Тогда семейство $\{D_1(U), D_2(W_\alpha), \alpha\in A\}$ – нормальное покрытие пространства 2^X.*

Доказательство. Пространство 2^X разбивается на два открыто-замкнутых подмножества $D_1(U)$ и $D_2(X\setminus U)$. В силу открытости $X\setminus U$ можно считать, что $W_\alpha\in X\setminus U$ для всех $\alpha\in A$, поэтому достаточно показать, что покрытие $\{D_2(W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ пространства $D_2(X\setminus U)$ нормально.

В покрытие $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ пространства $X\setminus U$ можно вписать звездно-конечное открытое покрытие $\{V^{(1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$, где индексация выбрана так, чтобы $V^{(1)}_{\beta,i}\cap V^{(1)}_{\gamma,j}=\varnothing$ при $\beta\neq\gamma$ (т. е. $\{V^{(1)}_{\beta,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, β фиксировано, – компонента $\{V^{(1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ [3, с. 483]). Можно считать, что B вполне упорядочено. Достаточно показать нормальность покрытия $\{D_2(V^{(1)}_{\beta,i})\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$.

A) Поскольку $X\setminus U$ — паракомпакт, существует комбинаторно вписанное с замыканием в $\{V^{(1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ открытое покрытие $\{V^{(0)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ пространства $X\setminus U$ ([3, с. 446], утверждение 5.1.7). Далее, в силу нормальности пространства $X\setminus U$ для любых двоично-рационального $r\in[0,1]$ и $\beta\in B$, $i\in\mathbb{N}$, можно построить открытое множество $V^{(r)}_{\beta,i}$ такое, что $\overline{V}^{(r_1)}_{\beta,i}\subset V^{(r_2)}_{\beta,i}$ при $r_1<r_2$ [4, с. 61]. Тогда $\{\overline{V}^{(r_1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ комбинаторно вписано в покрытие $\{V^{(r_2)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ пространства $X\setminus U$ при $r_1<r_2$, $r_1, r_2\in[0,1]$ и двоично-рациональны.

B) От покрытия $\{D_2(V^{(1)}_{\beta,i})\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ пространства $D_2(X\setminus U)$ переходим к покрытию

$$\Big\{O^{(1)}_{\beta,i}=D_1\Big(X\setminus\bigcup_{\gamma<\beta,(\gamma=\beta\ \&\ i<j)}\overline{V}^{(1/2)}_{\gamma,j}\Big)\cap D_2(V^{(1)}_{\beta,i})\Big\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}.$$

1. Семейство $\{O^{(1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\,i)\in B\times\mathbb{N}}$ — открытое покрытие $D_2(X\setminus U)$. Пусть $M\in$

$\in D_2(X \setminus U)$. Тогда найдется минимальный индекс $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$ такой, что $M \in D_2(V_{\beta,i}^{(1/2)})$. Отсюда $M \in O_{\beta,i}^{(1)}$. Заметим, что для всех $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$ $O_{\beta,i}^{(1)}$ открыты в силу локальной конечности $\{\overline{V}_{\beta,i}^{(1/2)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ [3, с. 41].

2. Покрытие $\{O_{\beta,i}^{(1)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ локально конечно. Зафиксируем $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$. Множество $V_{\beta,i}^{(1)}$ может пересекаться только с конечным числом множеств $V_{\beta,j_l}^{(1)}$, $l = \overline{1, m}$, из семейства $\{V_{\beta,i}^{(1)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ и, следовательно, может пересекаться только с множествами $V_{\beta,j_l}^{(1/2)}$, $l = \overline{1, m}$, из семейства $\{V_{\beta,i}^{(1/2)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$. Пусть $j_0 = \max(j_1, \ldots, j_m)$. Тогда $O_{\beta,i}^{(1)} \cap O_{\gamma,j}^{(1)} = \varnothing$ при $\gamma \neq \beta$ или $j > j_0$. Действительно, если $\gamma < \beta$, то

$$\Big(X \setminus \bigcup_{\delta<\beta,(\delta=\beta \,\&\, t<i)} \overline{V}_{\delta,t}^{(1/2)}\Big) \cap V_{\gamma,j}^{(1)} = \varnothing;$$

если $\gamma > \beta$ или $\gamma = \beta$ и $j > j_0$, то

$$\Big(X \setminus \bigcup_{\delta<\gamma,(\delta=\gamma \,\&\, t<j)} \overline{V}_{\delta,t}^{(1/2)}\Big) \cap V_{\beta,i}^{(1)} = \varnothing.$$

(Семейство $\{V_{\beta,i}^{(1/2)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ — покрытие $X \setminus U$. Тогда

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{\beta,i}^{(1)} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_{\beta,i}^{(1/2)} \quad \text{и} \quad V_{\beta,i}^{(1)} \subset \bigcup_{l=1}^{m} V_{\beta,j_l}^{(1/2)}.)$$

C) Аналогично B) для каждого двоично-рационального $r \in (0, 1/8)$ полагаем

$$\Big\{\overset{1}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r)} = D_1\Big(X \setminus \bigcup_{\gamma<\beta,(\gamma=\beta \,\&\, j<i)} \overline{V}_{\gamma,j}^{(7/8-r)}\Big) \cap D_2(\overline{V}_{\beta,i}^{(7/8+r)})\Big\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}},$$

$$\Big\{\overset{1}{F}{}_{\beta,i}^{(r)} = D_1\Big(X \setminus \bigcup_{\gamma<\beta,(\gamma=\beta \,\&\, j<i)} \overline{V}_{\gamma,j}^{(7/8-r)}\Big) \cap D_2(V_{\beta,i}^{(7/8+r)})\Big\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}.$$

Тогда $\{\overset{1}{F}{}_{\beta,i}^{(r)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ — открытое покрытие $D_2(X \setminus U)$. Если $r_1 < r_2$, то $\overset{1}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r_1)} \subset \overset{1}{F}{}_{\beta,i}^{(r_2)}$ для любых двоично-рациональных $r_1, r_2 \in (0, 1/8)$ и $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$. Очевидно, $\overset{1}{F}{}_{\beta,i}^{(r)} \subset \overset{1}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r)}$. Заметим, что $\{\overset{1}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ комбинаторно вписано в $\{O_{\beta,i}^{(1)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ для любого $r \in (0, 1/8)$. Значит, $\{\overset{1}{F}{}_{\beta,i}^{(r)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ и $\{\overset{1}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r)}\}_{(\beta,i)\in B\times\mathbb{N}}$, соответственно, открытое и замкнутое локально конечные покрытия пространства $D_2(X \setminus U)$.

D) Пусть для натурального n указан интервал $I_n = \big(0, 1/2^{2n+1}\big)$ и для каждого двоично-рационального $r \in I_n$ построены множества $\overset{n}{F}{}_{\beta,i}^{(r)}$ и $\overset{n}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r)}$ для всех $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$ таким образом, что $\{\overset{n}{F}{}_{\beta,i}^{(r)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ открытое, а $\{\overset{n}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ — замкнутое локально конечные покрытия $D_2(X \setminus U)$; из $r_1 < r_2$ следует $\overset{n}{F}{}_{\beta,i}^{(r_1)} \subset \overset{n}{\tilde{F}}{}_{\beta,i}^{(r_1)} \subset \overset{n}{F}{}_{\beta,i}^{(r_2)}$ для любых двоично-рациональных $r_1, r_2 \in I_n$ и $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$. Пусть построено также локально конечное открытое покрытие $\{O_{\beta,i}^{(n)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$ пространства $D_2(X \setminus U)$, звездно вписанное в $\{O_{\beta,i}^{(n-1)}\}_{(\beta, i)\in B\times\mathbb{N}}$, если $n > 1$, и для каждого двоично-рационального $r \in I_n$ $\{\overset{n}{\tilde{F}}{}^{(r)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$ комбинаторно вписано в $\{O^{(n)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$. Зафиксируем локально конечное замкнутое покрытие $\left\{\overset{n}{\tilde{F}}{}^{(1/2^{2n+2})}_{\beta,i}\right\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$, полагая $I_{n+1} = \left(0, 1/2^{2(n+1)+1}\right)$, и для всех $(\beta, i) \in B \times \mathbb{N}$, следуя ([3, с. 449], утверждение 5.1.13), определяем покрытия

$$\left\{O^{(n+1)}_{\beta,i} = \left(\bigcap_{l=1}^{k} O^{(n)}_{\beta,j_l}\right) \setminus \bigcup_{(\gamma,j)\neq(\beta,j_l),\, l=\overline{1,k}} \overset{n}{\tilde{F}}{}^{\left(1/2^{2n+2}\right)}_{\gamma,i}\right\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}, \tag{1}$$

$$\left\{\overset{n+1}{\tilde{F}}{}^{(r)}_{\beta,i} = \left(\bigcap_{l=1}^{k} \tilde{F}^{\left(3/2^{2n+3}+r\right)}_{\beta,j_l}\right) \setminus \bigcup_{(\gamma,j)\neq(\beta,j_l),\, l=\overline{1,k}} F^{\left(3/2^{2n+3}-r\right)}_{\gamma,j}\right\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}, \tag{2}$$

$$\left\{\overset{n+1}{F}{}^{(r)}_{\beta,i} = \left(\bigcap_{l=1}^{k} \overset{n}{F}{}^{\left(3/2^{2n+3}+r\right)}_{\beta,j_l}\right) \setminus \bigcup_{(\gamma,j)\neq(\beta,j_l),\, l=\overline{1,k}} \overset{n}{\tilde{F}}{}^{\left(3/2^{2n+3}-r\right)}_{\gamma,j}\right\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}} \tag{3}$$

(по второму индексу идет перенумерация, которая, в силу комбинаторной вписанности одинакова во всех трех случаях) для любых двоично-рациональных $r \in I_{n+1}$. Формулы (1) – (3) следует понимать так, что берутся всевозможные конечные наборы $O^{(n)}_{\beta,j_l}\left(\overset{n}{\tilde{F}}_{\beta,j_l}, \overset{n}{F}_{\beta,j_l}\right)$, у которых одинаково β, а затем строятся их пересечения и $O^{(n+1)}_{\beta,i}\left(\overset{n+1}{\tilde{F}}_{\beta,i}, \overset{n+1}{F}_{\beta,i}\right)$ (некоторые $O^{(n+1)}_{\beta,i}\left(\overset{n+1}{\tilde{F}}_{\beta,i}, \overset{n+1}{F}_{\beta,i}\right)$ могут быть пустыми множествами).

Пусть $r_1, r_2 \in I_{n+1}$ и $r_1 < r_2$, тогда $3/2^{2n+3} + r_p,\ 3/2^{2n+3} - r_p \in I_n$ при $p = 1, 2$ и

$$\overset{n}{F}{}^{\left(3/2^{2n+3}+r_1\right)}_{\beta,i} \subset \overset{n}{\tilde{F}}{}^{\left(3/2^{2n+3}+r_1\right)}_{\beta,i} \subset \overset{n}{F}{}^{\left(3/2^{2n+3}+r_2\right)}_{\beta,i} \subset O^{(n)}_{\beta,i},$$

$$\overset{n}{\tilde{F}}{}^{\left(1/2^{2n+2}\right)}_{\beta,i} \subset \overset{n}{F}{}^{\left(3/2^{2n+3}-r_2\right)}_{\beta,i} \subset \overset{n}{\tilde{F}}{}^{\left(3/2^{2n+3}-r_2\right)}_{\beta,i} \subset \overset{n}{F}{}^{\left(3/2^{2n+3}-r_1\right)}_{\beta,i}.$$

Отсюда $\overset{n+1}{F}{}^{(r_1)}_{\beta,i} \subset \overset{n+1}{\tilde{F}}{}^{(r_1)}_{\beta,i} \subset \overset{n+1}{F}{}^{(r_2)}_{\beta,i} \subset O^{(n+1)}_{\beta,i}$. Для любого $r \in I_{n+1}$ покрытие (3) (а тогда и (2), и (1)) определяет покрытие пространства $D_2(X \setminus U)$ в силу точечной конечности $\left\{\overset{n}{\tilde{F}}{}^{\left(3/2^{2n+3}-r\right)}_{\beta,i}\right\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$. Поскольку $\{O^{(n)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$ локально конечное, то покрытие (1) (а тогда и (2), и (3)) локально конечное. Заметим, что (2) замкнутое, а (1) и (3) – открытые покрытия пространства $D_2(X \setminus U)$.

Е) Пусть M — произвольный элемент пространства $D_2(X \setminus U)$. Тогда найдется $(\beta, j_0) \in B \times \mathbb{N}$ такой, что $M \in \overset{n}{\tilde{F}}{}^{(1/2^{2n+2})}_{\beta,j_0}$, следовательно, если $M \in O^{(n+1)}_{\beta,i}$, то $O^{(n+1)}_{\beta,i} \subset O^{(n)}_{\beta,j_0}$, т.е. $\mathrm{st}\,(M, \{O^{(n+1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}) \subset O^{(n)}_{\beta,j_0}$, и $\{O^{(n+1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$ звездно вписано в покрытие $\{O^{(n)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$.

Имеем $\{O^{(1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}, \{O^{(2)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}, \ldots$ — последовательность открытых покрытий пространства $D_2(X \setminus U)$, в которой каждое покрытие, начиная со второго, звездно вписано в предыдущее. В силу утверждения 5.1.15 из [3, с. 450] $\{O^{(1)}_{\beta,i}\}_{(\beta,\, i)\in B\times\mathbb{N}}$ — нормальное покрытие $D_2(X \setminus U)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть X — линделефово пространство, $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ — от-*

крытые подмножества X, *для которых* $\overline{U}^{(0)} \subset U^{(1)}$. *Если* $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — *произвольное открытое покрытие* $X \setminus U^{(0)}$ (W_α – *открытые подмножества* X *для всех* $\alpha \in A$), *то в семейство* $\{D_1(U^{(1)}), D_2(W_\alpha), \alpha \in A\}$ *можно вписать счетное нормальное покрытие пространства* 2^X.

Доказательство. Так как X — сильно паракомпактное хаусдорфово пространство, то в открытое покрытие $\{U^{(0)}, W_\alpha, \alpha \in A\}$ пространства X можно вписать счетное локально конечное открытое покрытие $\{U^{(0)}, V_i^{(1)}, i \in \mathbb{N}\}$. В $\{V_i^{(1)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ можно вписать комбинаторно с замыканием семейство открытых подмножеств $\{V_i^{(0)}\}_{i\in\mathbb{N}}$, покрывающее $X \setminus U^{(0)}$. В силу нормальности пространства X для каждого двоично-рационального $r \in [0, 1]$ и любого $i \in \in \mathbb{N}$ найдутся открытые покрытия $U_i^{(r)}$ и $V_i^{(r)}$ такие, что при $r < r'$ $\overline{U}_i^{(r)} \subset U_i^{(r')}$, $\overline{V}_i^{(r)} \subset V_i^{(r')}$. Очевидно, для любого двоично-рационального $r \in [0, 1)$ $\{\overline{V}_i^{(r)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — покрытие $X \setminus U^{(0)}$, комбинаторно вписанное в $\{V_i^{(r')}\}_{i\in\mathbb{N}}$ при $r < r'$.

A) Семейство $\{D_1(U^{(1)}), D_2(V_i^{(1)}), i \in \mathbb{N}\}$ – покрытие пространства 2^X, вписанное в открытое покрытие $\{D_1(U^{(1)}), D_2(W_\alpha), \alpha \in A\}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим

$$O_i^{(1)} = D_2(V_i^{(1)}) \bigcap D_1(X \setminus \bigcup_{j<i} \overline{V}_j^{(0)}) \bigcap D_2(X \setminus \overline{U}^{(0)}), \text{ а } O_0^{(1)} = D_1(U^{(1)}).$$

Тогда $\{O_i^{(1)}\}_{i=0}^{\infty}$ – открытое локально конечное покрытие пространства 2^X, вписанное в $\{D_1(U^{(1)}), D_2(V_i^{(1)}), i \in \mathbb{N}\}$. Действительно, если $M \notin D_1(U^{(1)})$, то найдется минимальный индекс i_0 такой, что $M \cap V_{i_0}^{(1)} \neq \varnothing$, тогда $M \in O_{i_0}^{(1)}$, следовательно, $\{O_i^{(1)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ – покрытие 2^X. Оно открытое в силу локальной конечности семейства $\{\overline{V}_i^{(0)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Пусть M – произвольная точка пространства 2^X. Если $M \in D_1(U^{(0)})$, то $D_1(U^{(0)}) \cap O_i^{(1)} = \varnothing$ при $i > 0$, а при $M \notin D_1(U^{(0)})$, полагая j_0 минимальным индексом таким, что $M \cap V_{j_0}^{(0)} \neq \varnothing$, получаем $D_2(V_{j_0}^{(0)}) \cap O_j^{(1)} = \varnothing$ при $j > j_0$, т. е. покрытие $\{O_i^{(1)}\}_{i=0}^{\infty}$ локально конечно.

B) Для каждого двоично-рационального $r \in (0, 1/8)$ и $i \in \mathbb{N}$ определяем

$$\overset{1}{F}{}_i^{(r)} = D_2(\overline{V}_i^{(7/8+r)}) \bigcap D_1(X \setminus \bigcup_{j<i} V_j^{(7/8-r)}) \bigcap D_2(X \setminus U^{(7/8-r)}), \ \ \overset{1}{F}{}_0^{(r)} = D_1(\overline{U}^{(7/8+r)})$$

$$\overset{1}{F}{}_i^{(r)} = D_2(V_i^{(7/8+r)}) \bigcap D_1(X \setminus \bigcup_{j<i} \overline{V}_j^{(7/8-r)}) \bigcap D_2(X \setminus \overline{U}^{(7/8-r)}), \ \ \overset{1}{F}{}_0^{(r)} = D_1(U^{(7/8+r)}).$$

Тогда нетрудно проверить, что для любых двоично-рациональных $r_1, r_2 \in (0, 1/8)$ и любого $i = \overline{0, \infty}$ при $r_1 < r_2$

$$\overset{1}{F}{}_i^{(r_1)} \subset \overset{1}{F}{}_i^{(r_2)} \subset \overset{1}{F}{}_i^{(r_2)} \subset O_i^{(1)},$$

и $\left\{\overset{1}{F}{}_i^{(r_1)}\right\}_{i=0}^{\infty}$ замкнутое, а $\left\{\overset{1}{F}{}_i^{(r_1)}\right\}_{i=0}^{\infty}$ — открытое локально конечные покрытия пространства 2^X.

C) Применяя пункты D и E доказательства леммы 1, завершаем доказательство леммы 2.

Лемма 3. *Пусть для произвольного замкнутого подмножества* N *и любых открытых подмножеств* $U^{(0)}$ *и* $U^{(1)}$ *нормального пространства* X *таких, что* $N \subset U^{(0)} \subset \overline{U}^{(0)} \subset U^{(1)}$, *и произвольного открытого покрытия*

$\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *множества* $X \setminus U^{(0)}$ *открытое покрытие* $\{D_1(U^{(1)}), D_2(W_\alpha), \alpha \in A\}$ *пространства* 2^X *нормально. Тогда* 2^X *полно по Дьедонне.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши на 2^X в универсальной равномерности. Тогда для любого нормального покрытия $\{O_s\}_{s \in S}$ пространства 2^X найдется $s \in S$ такое, что $O_s \in \mathfrak{F}$.

А) Полагаем $N = U^{(0)} = U^{(1)} = \varnothing$. Обозначим $N_0 = \{x \in X \mid D_2(V_x) \in \mathfrak{F}$ для каждого открытого $V_x \ni x\}$. Тогда $N_0 \neq \varnothing$. В противном случае для каждого $x \in X$ найдется открытое W_x такое, что $D_2(W_x) \notin \mathfrak{F}$, но по условию леммы $\{D_2(W_x)\}_{x \in X}$ — нормальное покрытие 2^X. Получили противоречие.

В) Заметим, что N_0 замкнуто, и положим $N = N_0$. Для любого $x \in X \setminus U^{(0)}$ найдем открытое покрытие $W_x \ni x$ такое, что $D_2(W_x) \notin \mathfrak{F}$. Поскольку покрытие $\{D_1(U^{(1)}), D_2(W_x), x \in X \setminus U^{(0)}\}$ нормально, то $D_1(U^{(1)}) \in \mathfrak{F}$. Но тогда любая окрестность $D_1(U^{(1)}) \cap D_2(W_1) \cap \ldots \cap D_2(W_n)$ элемента N_0 в 2^X принадлежит $\mathfrak{F}$, следовательно, $N_0 \in \lim \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Заметим, что если X — паракомпактное сильно нульмерное пространство, то X сильно паракомпактно ввиду [3, с. 588], и для любого замкнутого подмножества N и любого открытого $U \supset N$ найдется открыто-замкнутое подмножество $U^{(0)}$ такое, что $N \subset U^{(0)} \subset U$ [3, с. 530]. Тогда, применяя леммы 1, 2 и 3, получаем следующую теорему.

Теорема. *Если* X *– паракомпактное сильно нульмерное или линделефово пространство, то* 2^X *полно по Дьедонне в топологии Вьеториса.*

Следствие 1. *Если* G *— локально компактная* σ*-компактная или нульмерная группа, то* $\mathfrak{L}(G)$ *полно по Дьедонне.*

Доказательство. Если группа G σ-компактна, то она линделефова. Если группа G нульмерна, то G — паракомпакт ([5, с. 104], утверждение 8.13), следовательно, G — сильно нульмерное пространство ([3, с. 568], утверждение 7.1.12). Тогда $\mathfrak{L}(G)$ полно по Дьедонне как замкнутое подпространство пространства 2^G.

Следствие 2. *Пусть* G *— локально компактная группа. Тогда если пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *псевдокомпактно, то* $\mathfrak{L}(G)$ *компактно.*

Доказательство. Пусть G_0 — компонента единицы группы G, тогда группа G/G_0 вполне несвязна, и следовательно, нульмерна [5, с. 25]. В силу следствия 1 покрытие $\mathfrak{L}(G/G_0)$ полно по Дьедонне. Поскольку $\mathfrak{L}(G/G_0)$ является непрерывным образом $\mathfrak{L}(G)$ ([6], лемма), то $\mathfrak{L}(G/G_0)$ псевдокомпактно, а тогда и компактно в силу ([3], с. 678). Следовательно, G/G_0 σ-компактна ([2] теорема 4), и так как группа G_0 σ-компактна, то группа G σ-компактна. Ввиду следствия 1 покрытие $\mathfrak{L}(G)$ полно по Дьедонне, и следовательно, компактно.

1. *Панасюк С. П., Султанов С. Р.* О полноте по Дьедонне пространств замкнутых подмножеств и подгрупп // XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть вторая. – Львов. – 1987. – С. 214 – 215.
2. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, № 2. – С. 378 – 385.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
4. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности.– М.: Наука, 1973.– 546 с.
5. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ: В 2-х т.– М.: Наука, 1975.–Т.1.– 656 с.
6. *Панасюк С. П.* Метризуемость в пространстве подгрупп группы Ли // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 3. – С. 351 – 355.

Получено 16. 05. 91