УДК 517.542

Л. Р. Пейкре, асп. (Киев. ун-т)

АВТОМОРФИЗМ ГЕОМЕТРИИ ГРУППЫ $B_2(2^n)$ КАК ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Приведено построение автоморфизма геометрии группы $B_2(2^n)$ как продолжение автоморфизма системы корней. Доказаны некоторые свойства этого автоморфизма.

Наведена побудова автоморфізму геометрії групи $B_2(2^n)$ як продовження автоморфізму системи коренів. Доведені деякі властивості цього автоморфізму.

Класс систем инцидентности, ныне известных как геометрии Титса, введен в конце 50–х годов. В настоящей статье используется конструкция “накрытия” геометрии группы Вейля, сопоставляющая геометрию произвольной системе корней. Геометрии ранга 2 из этого класса могут быть конечными обобщенными m–угольниками при $m = 3, 4, 6$ (системы корней A_2, B_2, G_2). Построение такой конструкции описано в [1, 2].

Пусть Φ — неприводимая система корней. Элементы дуального пространства α_i^* являются линейными функциями на $\Phi(\alpha_i \in \Phi)$. Пусть W — группа Вейля данной системы корней Φ. Под $l(x)^w$, где $l(x)$ –линейная на Φ функция, $w \in W$, будем понимать $l(w(x))$. Рассмотрим орбиты H_i группы W на множестве линейных на Φ функций, содержащие α_i^*. Пусть $H = \bigcup H_i$, задана типовая функция $t(a) = i \Leftrightarrow a \in H_i$ и отношение инцидентности $a, b \in H$ $aIb \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a(x)b(x) \geq 0$ $\forall x \in \Phi$.

Известно, что заданная таким образом система инцидентности (H, I, t) изоморфна геометрии группы Вейля $\Gamma(W, S)$, т.е. множеству смежных классов группы W по максимальным стандартным подгруппам с отношением инцидентности $\alpha I\beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta \neq \varnothing$. Доказательство этого факта можно найти, например, в [3].

В случае системы корней B_2 имеется две орбиты группы Вейля

$$H_1 = \{l_1, l_2, l_3, l_4\} \text{ и } H_2 = \{h_1, h_2, h_3, h_4\},$$

где $l_1 = \alpha_1^*, l_2 = \alpha_2^* - \alpha_1^*, l_3 = \alpha_1^* - \alpha_2^*, l_4 = -\alpha_1^*$ и $h_1 = \alpha_2^*, h_2 = 2\alpha_1^* - \alpha_2^*, h_3 = \alpha_2^* - 2\alpha_1^*, h_4 = -\alpha_2^*, \alpha_1, \alpha_2 \in B_2^+$.

Определим множества $\eta^{\pm}(l_i) = \{\alpha_k \in B_2^+ \mid l_i(\alpha_k) \gtrless 0\}$, $o(l_i) = \{\alpha_k \in B_2^+ \mid l_i(\alpha_k) = 0\}$, $i = \overline{1, 4}$, и аналогичным образом множества $\eta^+(h_i), \eta^-(h_i), o(h_i), i = \overline{1,4}$.

Отношение инцидентности I между l_i, $i = \overline{1,4}$, h_j, $j = \overline{1,4}$, можно задать условием

$$l_i I h_j \Leftrightarrow |\eta^+(l_i) \cap \eta^-(h_j)| + |\eta^-(l_i) \cap \eta^+(h_j)| = 0.$$

На множестве корней B_2 существует автоморфизм второго порядка, связанный с графом [4], обозначаемый далее ω. На B_2^+ он действует следующим образом: $\omega(\alpha_1) = \alpha_2, \omega(\alpha_2) = \alpha_1, \omega(\alpha_3) = \alpha_4, \omega(\alpha_4) = \alpha_3$, где $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_4 = \alpha_1 + 2\alpha_2$, Автоморфизм ω может быть продлен на элементы орбит H_1, H_2: $\omega(h_i) = l_i, \omega(l_i) = h_i, i = \overline{1,4}$. Рассмотрим накрытие $\tilde{\Gamma}(W, S)$ системы инцидентности $\Gamma(W, S)$. Пусть задано корневое разложение алгебры Ли, соответствующей простой группе $B_2(2^n)$: $L = L^- + H + L^+$, где $L^- = \sum_{\alpha\in\Phi^-} L_\alpha$, $L^+ = \sum_{\alpha\in\Phi^+} L_\alpha$, H — подалгебра Картана, L_α — корневое подпространство. Эта алгебра является аналогом комплексной алгебры Ли $B_2(\mathbb{C})$, определенным над $F_q (q = 2^n)$ с помощью базиса Шевалле. Геометрия группы $G = B_2(F_q)$ является совокупностью смежных классов по стандартным параболическим подгруппам P_1 и P_2. Из результатов работы [4] вытекает, что G / P_1 можно отождествить с элементами $l + \bar{x}$, где $l \in H_1$ и $\bar{x}$ принадлежит некоторому зависящему от l подпространству L^+, а G / P_2 можно отождествить с $h + \bar{y}$, где $h \in H_2$ и $\bar{y}$ также принадлежит некоторому зависящему от h подпространству L^+. По построению элементы $h \in H_i$, $i = 1, 2$, являются элементами алгебры Картана.

Тогда накрытие $\tilde{\Gamma}(W,S)$ системы инцидентности $\Gamma(W, S)$ содержит пары

$$\left(l_i, \sum_{\alpha_k\in\eta^-(l_i)} x_k\alpha_k\right), \left(h_i, \sum_{\alpha_k\in\eta^-(h_i)} y_k\alpha_k\right), x_k, y_k \in F_{2^n}, i=\overline{1,4},$$

с отношением инцидентности $\tilde{I}$:

$$\left(l_i, \sum_{\alpha_k\in\eta^-(l_i)} x_k\alpha_k\right) \tilde{I} \left(h_j, \sum_{\alpha_k\in\eta^-(h_j)} y_k\alpha_k\right) \Leftrightarrow$$

$$\text{i)}\quad l_i I h_j; \qquad \text{ii)}\quad \left[l_i + \sum_{\alpha_k\in\eta^-(l_i)} x_k\alpha_k, h_j + \sum_{\alpha_k\in\eta^-(h_j)} y_k\alpha_k\right] = 0,$$

[,] — умножение в алгебре Ли L.

Условие ii) соответствует условию (2) работы [2, с.387].

Исходя из этих условий, отношение инцидентности элементов системы $\tilde{\Gamma}(W,S)$ определяется табл.1 ("+" означает инцидентность без дополнительных условий, "–" – неинцидентность элементов).

Табл. 1

	$(h_1,0)$	$(h_2,y_2\alpha_2)$	$(h_3,y_1\alpha_1+y_3\alpha_3)$	$(h_4,y_2\alpha_2+y_3\alpha_3+y_4\alpha_4)$
$(l_1,0)$	+	+	–	–
$(l_2,x_1\alpha_1)$	+	–	$x_1=y_1$	–
$(l_3,x_2\alpha_2+x_4\alpha_4)$	–	$x_2=y_2$	–	$x_2=y_2$ $x_2y_3=x_4+y_4$
$(l_4,x_1\alpha_1+x_3\alpha_3+$ $+x_4\alpha_4)$	–	–	$x_1=y_1$ $x_3=y_3$	$x_3+y_3=x_1y_2$ $x_4+y_4=x_3y_2$

Продолжим автоморфизм ω на систему $\tilde{\Gamma}(W,S)$.

Теорема. *Отображение* ω, *заданное равенствами*

$$\omega(l_1, 0) = (h_1, 0),\ \omega(l_2, x_1\alpha_1) = (h_2, x_1\alpha_2),$$

$$\omega(h_1, 0) = (l_1, 0),\ \omega(h_2, y_2\alpha_2) = (l_2, y_2^2\alpha_1),$$

$$\omega(l_3, x_2\alpha_2 + x_4\alpha_4) = (h_3, x_2^2\alpha_1 + x_4\alpha_3),$$

$$\omega(h_3, y_1\alpha_1 + y_3\alpha_3) = (l_3, y_1\alpha_2 + y_3^2\alpha_4),$$

$$\omega(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4) = (h_4, x_1\alpha_2 + x_4\alpha_3 + (x_3^2 + x_1x_4)\alpha_4),$$

$$\omega(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4) = (l_4, y_2^2\alpha_1 + (y_4 + y_2y_3)\alpha_3 + y_3^2\alpha_4),$$

есть автоморфизм порядка $2n$ *геометрии группы* $B_2(2^n)$.

Доказательство. Заметим, что заданное таким образом отображение является автоморфизмом, если оно сохраняет отношение инцидентности и биективно. Проверим сохранение отношений инцидентности для образов всех попарно инцидентных элементов из табл.1.

Для элементов $(l_1, 0)$ и $(h_1, 0)$ это, очевидно, справедливо. Легко заметить, что для образов $(h_1, 0)$, $(l_2, y_2^2\alpha_1)$ инцидентной пары $(l_1, 0)$, $(h_2, y_2\alpha_2)$ также сохраняется отношение инцидентности. Совершенно аналогично сохраняется отношение инцидентности и для образов пары $(h_1, 0)$, $(l_2, x_1\alpha_1)$. Рассмотрим пару $(l_3, x_2\alpha_2 + x_4\alpha_4)$, $(h_2, y_2\alpha_2)$. Для нее условие инцидентности задается равенством $x_2 = y_2$, а для образов этой пары $(l_2, y_2^2\alpha_1)$, $(h_3, x_2^2\alpha_1 + x_4\alpha_3)$ условие инцидентности задается равенством $x_2^2 = y_2^2$. В поле характеристики 2 эти условия равносильны. Для пары $(l_2, x_1\alpha_1)$, $(h_3, y_1\alpha_1 + y_3\alpha_3)$ условие инцидентности $x_1 = y_1$ является также условием инцидентности их образов $(h_2, x_1\alpha_2)$ и $(l_3, y_1\alpha_2 + y_3^2\alpha_4)$. В случае пары $(l_3, x_2\alpha_2 + x_4\alpha_4)$, $(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4)$ условия инцидентности задаются системой

$$\begin{aligned} x_2 &= y_2, \\ x_2y_3 &= x_4 + y_4. \end{aligned} \tag{1}$$

Легко убедиться, что в поле F_{2^n} система (1) равносильна системе

$$\begin{aligned} x_2^2 &= y_2^2, \\ y_4 + y_2y_3 &= x_4, \end{aligned} \tag{2}$$

задающей условия инцидентности для

$$\omega(l_3, x_2\alpha_2 + x_4\alpha_4) = (h_3, x_2^2\alpha_1 + x_4\alpha_3),$$

$$\omega(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4) = (l_4, y_2^2\alpha_1 + (y_4 + y_2y_3)\alpha_3 + y_3^2\alpha_4).$$

Элементы $(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4)$, $(h_3, y_1\alpha_1 + y_3\alpha_3)$ инцидентны при

$$x_1 = y_1, \quad x_3 = y_3.$$

Домножим первое равенство системы на x_4 и прибавим ко второму, возведенному в квадрат, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_3^2 + x_1x_4 &= y_3^2 + y_1x_4. \end{aligned} \tag{3}$$

В поле $F_{2^n}(\mathrm{char} F_{2^n} = 2)$ систему (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_3^2 + x_1x_4 + y_3^2 &= y_1x_4. \end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) представляет собой условия инцидентности образов

$$\omega(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4) = (h_4, x_1\alpha_2 + x_4\alpha_3 + (x_3^2 + x_1x_4)\alpha_4),$$

$$\omega(h_3, y_1\alpha_1 + y_3\alpha_3) = (l_3, y_1\alpha_2 + y_3^2\alpha_4).$$

Условия инцидентности элементов $(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4)$, $(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4)$ задаются системой

$$x_3 + y_3 = x_1 y_2,$$
$$x_4 + y_4 = x_3 y_2.$$

Умножим первое равенство системы на y_2 и заменим $x_3 y_2$ на сумму $x_4 + y_4$ из второго равенства, имеем

$$x_4 + y_4 + y_2 y_3 = x_1 y_2^2. \tag{5}$$

Возведем первое равенство в квадрат и прибавим к обеим сторонам $x_1 x_4$: $x_3^2 + x_1 x_4 + y_3^2 = x_1(x_1 y_2^2 + x_4)$. Заменим $x_1 y_2^2$ на соответствующее значение из равенства (5). Таким образом, учитывая, что $\operatorname{char} F_{2^n} = 2$, получаем систему

$$x_4 + y_4 + y_2 y_3 = y_2^2 x_1,$$
$$x_3^2 + x_1 x_4 + y_3^2 = x_1(y_4 + y_2 y_3),$$

которая задает условия инцидентности для

$$\omega(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4) = (h_4, x_1\alpha_2 + x_4\alpha_3 + (x_3^2 + x_1 x_4)\alpha_4),$$
$$\omega(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4) = (l_4, y_2^2\alpha_1 + (y_4 + y_2 y_3)\alpha_3 + y_3^2\alpha_4).$$

Для того чтобы показать, что отображение ω биективно, построим отображение φ, обратное к ω. Известна теорема о том, что преобразование поля F_{p^n} вида $x \to x^p$ является автоморфизмом (см., например, [5]), и значит, имеет обратное преобразование, которое можно обозначить $x \to x^{1/p}$. Используя это преобразование поля, зададим следующее отображение φ:

$$\varphi(l_1, 0) = (h_1, 0),\ \varphi(h_1, 0) = (l_1, 0),$$
$$\varphi(l_2, x_1\alpha_1) = (h_2, x_1^{1/2}\alpha_2),\ \varphi(h_2, y_2\alpha_2) = (l_2, y_2\alpha_1),$$
$$\varphi(l_3, x_2\alpha_2 + x_4\alpha_4) = (h_3, x_2\alpha_1 + x_4^{1/2}\alpha_3),$$
$$\varphi(h_3, y_1\alpha_1 + y_3\alpha_3) = (l_3, y_1^{1/2}\alpha_2 + y_3\alpha_4),$$
$$\varphi(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4) = (h_4, x_1^{1/2}\alpha_2 + x_4^{1/2}\alpha_3 + (x_3 + x_1^{1/2} x_4^{1/2})\alpha_4),$$
$$\varphi(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4) = (l_4, y_2\alpha_1 + y_3\alpha_4 + (y_4 + y_2 y_3)^{1/2}\alpha_3).$$

Вычислим значения отображений $\varphi\omega$ и $\omega\varphi$ для элементов общего положения. Для всех остальных вычисления проводятся аналогичным образом:

$$\omega(\varphi(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4)) = \omega(h_4, x_1^{1/2}\alpha_2 + x_4^{1/2}\alpha_3 + (x_3 + x_1^{1/2} x_4^{1/2})\alpha_4) =$$
$$(l_4, (x_1^{1/2})^2\alpha_1 + (x_3 + x_1^{1/2} x_4^{1/2} + x_1^{1/2} x_4^{1/2})\alpha_3 + (x_4^{1/2})^2\alpha_4) = (l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4),$$
$$\varphi(\omega(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4)) = \varphi(h_4, x_1\alpha_2 + x_4\alpha_3 + (x_3^2 + x_1 x_4)\alpha_4) = (l_4, x_1\alpha_1 +$$
$$+ (x_3^2 + x_1 x_4 + x_1 x_4)^{1/2}\alpha_3 + x_4\alpha_4) = (l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4),$$
$$\omega(\varphi(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4)) = \omega(l_4, y_2\alpha_1 + y_3\alpha_4 + (y_4 + y_2 y_3)^{1/2}\alpha_3) = (h_4, y_2\alpha_2 +$$
$$+ (y_4 + y_2 y_3 + y_2 y_3)\alpha_4 + y_3\alpha_3) = (h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4),$$

$$\varphi(\omega(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4)) = \varphi(l_4, y_2^2\alpha_1 + (y_4 + y_2y_3)\alpha_3 + y_3^2\alpha_4) =$$

$$=(h_4', y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + (y_4 + y_2y_3 + (y_2^2)^{1/2}(y_3^2)^{1/2})\alpha_4) = (h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4).$$

Таким образом убедились, что $\varphi = \omega^{-1}$ и отображение ω является автоморфизмом.

Легко вычислить, что

$$\omega^2(l_4, x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4) = (l_4, x_1^2\alpha_1 + x_3^2\alpha_3 + x_4^2\alpha_4),$$

$$\omega^2(h_4, y_2\alpha_2 + y_3\alpha_3 + y_4\alpha_4) = (h_4, y_2^2\alpha_2 + y_3^2\alpha_3 + y_4^2\alpha_4). \tag{6}$$

Получим аналогичные преобразования при применении ω^2 и ко всем остальным элементам геометрии $\tilde{\Gamma}(W, S)$.

Известно, что все автоморфизмы конечного поля F_{2^n} составляют конечную циклическую группу порядка n с образующей $\sigma\colon x \to x^2$ (см., напр., [5]). Из равенства (6) видно, что ω^2 совпадает с автоморфизмом поля σ. Так как порядок автоморфизма σ равен n, то $\omega^{2n} = \sigma^n = e$, где e – тождественный автоморфизм. Следовательно, порядок автоморфизма ω равен $2n$. Теорема доказана.

Если Δ — произвольный автоморфизм поля F_{2^n}, то $\omega\Delta$ будет автоморфизмом геометрии $\tilde{\Gamma}(W, S)$. Найдем условия, при которых $\omega\Delta$ будет автоморфизмом второго порядка, т.е. $(\omega\Delta)^2 = e$.

Предложение. *При нечетном* $n = 2k + 1$ *существует автоморфизм* Δ *поля* F_{2^n} *такой, что* $(\omega\Delta)^2 = e$ *– тождественный автоморфизм. При четном* n *такого автоморфизма не существует.*

Доказательство. Поскольку ω^2 порождает группу автоморфизмов поля F_{2^n}, то ω коммутирует с любым автоморфизмом этого поля. Тогда равенство $(\omega\Delta)^2 = e$ можно переписать в виде $\omega^2 = \Delta^{-2}$. Запись Δ^{-2} корректна, так как автоморфизмы поля F_{2^n} образуют группу, и поэтому у автоморфизма Δ^2 существует обратный Δ^{-2}. Как было установлено в ходе доказательства теоремы, $\omega^2 = \sigma$, где σ является образующей циклической группы $\mathrm{Aut}(F_{2^n})$ (всех автоморфизмов поля F_{2^n}), поэтому можно записать

$$\Delta^{-2} = \sigma. \tag{7}$$

Группа $\mathrm{Aut}(F_{2^n})$ изоморфна Z_n с образующей $\overline{1}$, поэтому в терминах Z_n равенство (7) можно записать в виде $\overline{-2}\cdot\overline{\Delta}=\overline{1}$, где $\overline{\Delta}$ — элемент из Z_n, соответствующий Δ из $\mathrm{Aut}(F_{2^n})$. Или, иначе,

$$(n-2)\cdot\overline{\Delta} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n). \tag{8}$$

При четном n уравнение (8) не имеет решения, а при нечетном $n = 2k + 1$ решением будет $\overline{\Delta} = k$, и соответствующее ему отображение Δ имеет вид $\Delta : x \to x^{2^k}$. Предложение доказано.

1. *Устименко В. А.* Геометрии Титса и алгебры с делением // Докл. АН СССР.–1987.–**296**, №5.–С.1061–1065.
2. *Устименко В. А.* Линейная интерпретация геометрии флагов групп Шевалле // Укр. мат. журн.–1990.–**42**, № 3.–С.383–387.
3. *Freydental H., deWries H. Linear Lie group.–London: Acad. press., 1969.–320p.*
4. *Картер Р.* Простые группы и простые алюебры Ли // Математика. Сб. переводов.–1966.–10: 5.–С.3–47.
5. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.–М.: Наука, 1977.–С.427–431.

Получено 05.05.91