УДК 517.5

А. С. Романюк, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ КЛАССОВ $B^r_{p,\theta}$. I

Изучаются приближения классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных с помощью тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник. Полученные результаты используются для установления порядковых оценок приближения функций вида $f(x-y)$, $f(x) \in B^r_{p,\theta}$, комбинациями произведений функций меньшего количества переменных.

Вивчаються наближення класів $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних за допомогою тригонометричних поліномів із заданим числом гармонік. Одержані результати використовуються для встановлення порядкових оцінок наближення функцій вигляду $f(x-y)$, $f(x) \in B^r_{p,\theta}$, комбінаціями добутків функцій від меншої кількості змінних.

В настоящей работе продолжается [1] изучение вопросов приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в двух направлениях: приближение с помощью тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник и приближение линейными комбинациями произведений функций меньшего числа переменных. При изложении результатов будем пользоваться обозначениями и определениями из работы [1], но для удобства напомним некоторые из них.

Пусть R^m — евклидово пространство с элементами $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_my_m$, $L_p(\pi_m)$ — пространство периодических функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, определенных на кубе $\pi_m = \prod_{j=1}^m [-\pi;\pi]$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

В дальнейшем предполагаем, что $p \in (1, \infty)$ и

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Далее, пусть $s = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1,m}$. Положим

$$\rho(s) = \left\{ k \colon k = (k_1, \ldots, k_m),\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,m} \right\},$$

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(t) e^{-i(k,t)} dt.$$

Класс $B^r_{p,\theta}$ определяется следующим образом:

$$B^r_{p,\theta} = \left\{ f(\cdot) \colon \|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, \cdot)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \le 1 \right\},$$

где $r=(r_1,\ldots,r_m)$, $r_j\in R$, $r_j>0, j=\overline{1,m}$, $1<p<\infty$, если $1\le\theta<\infty$, и

$$B^r_{p,\infty}=\left\{f(\cdot)\colon \|\delta_s(f,\cdot)\|_p\le 2^{-(s,r)},\ s=(s_1,\ldots,s_m),\ s_j\in N,\ j=\overline{1,m}\right\}.$$

Отметим, что $B^r_{p,\infty}=H^r_p$, где H^r_p — известные классы С. М. Никольского (см., например, [2]).

Будем предполагать в дальнейшем, что координаты вектора $r=(r_1,\ldots,r_m)$ упорядочены таким образом, что $0<r_1=r_2=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\ldots\le r_m$. С вектором r будем связывать два вектора: $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$, где $\gamma_j=r_j/r_1$, $j=\overline{1,m}$, и $\gamma'=(\gamma'_1,\ldots,\gamma'_m)$, где $\gamma'_j=\gamma_j$ при $j=\overline{1,\nu}$ и $\gamma_{j-1}<\gamma'_j<\gamma_j$ при $j=\nu+1,\ldots,m$.

Число элементов множества S будем обозначать $|S|$.

1. Рассмотрим величину

$$e_M(f)_q=\inf_{k^j,c_j}\left\|f(\cdot)-\sum_{j=1}^{M}c_je^{i(k^j,\cdot)}\right\|_q,$$

где точная нижняя грань берется сначала по коэффициентам $\{c_j\}_{j=1}^M$, а затем — по всевозможным наборам векторов k^j из целочисленной решетки Z^m. Эту величину впервые рассматривал С. Б. Стечкин [3] при исследовании вопросов абсолютной сходимости ортогональных рядов.

Если F — некоторый функциональный класс, то полагаем

$$e_M(F,L_q)=\sup_{f\in F}e_M(f)_q. \tag{1}$$

В последнее время проводятся исследования поведения величин (1) для конкретных функциональных классов F и приближающих полиномов по полным ортонормированным системам. В одномерном случае отметим работу Б. С. Кашина [4], в которой изучались классы $\mathrm{Lip}\,\alpha$, заданные на $[0,1]$. Там же приведена библиография предшествующих работ.

На некоторых классах периодических функций приближение полиномами с заданным числом гармоник изучалось в работах В. Н. Темлякова (см. [5] и ссылки там же), Э. С. Белинского [6, 7] и др.

Пусть $L_q(\pi_{2m})$ обозначает множество функций $f(x,y)$, $x,y\in\pi_m$, с конечной "смешанной" нормой

$$\|f(x,y)\|_q=\left\|\,\|f(\cdot,y)\|_{q_1}\right\|_{q_2},$$

где $q=(q_1,q_2)$.

Для $f\in L_q(\pi_{2m})$ определим наилучшее билинейное приближение порядка M:

$$\tau_M(f)_q=\inf_{u_i(x),v_i(y)}\left\|f(x,y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_q, \tag{2}$$

где $u_i\in L_{q_1}(\pi_m)$, $v_i\in L_{q_2}(\pi_m)$.

Первые результаты по приближению билинейными формами получены в работе Е. Шмидта [8], в которой найдены наилучшие приближения периодической функции двух переменных суммами произведений функций одной переменной в L_2. Ряд важных результатов по билинейной аппроксимации некоторых классов периодических функций многих переменных получен В.Н. Темляковым (см., например, [5], там же изложена история вопроса). Из других работ в этом направлении укажем на недавнюю работу М.-Б.А. Бабаева [9], в которой приведена подробная библиография, относящаяся, в основном, к непериодическому случаю.

Настоящая работа посвящена исследованию величин (1) и (2) на классах $B^r_{p,\theta}$.

В первой части работы изучаются величины $e_M(B^r_{p,\theta}, L_q)$ в двух случаях: когда $1 < p \le 2 < q < \infty$ и $2 \le p < q < \infty$ (теоремы 1 и 2). Отметим, что в первом случае порядки убывания $e_M(W^r_p, L_q)$ и $e_M(H^r_p, L_q)$ известны [6] (определение классов W^r_p и H^r_p см., например, в [5]). Во втором случае порядок убывания величин (1) был, по-видимому, не известен даже для классов W^r_p и H^r_p.

Во второй части работы полученные результаты применяются для установления порядковых оценок билинейной аппроксимации функций вида $f(x, y) = f(x - y)$, $f(x)$ — из класса $B^r_{p,\theta}$. При этом в ряде случаев найдены точные порядки величин

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2} = \sup_{f \in B^r_{p,\theta}} \tau_M(f)_{q_1,q_2}.$$

При доказательстве основных утверждений используются идейные подходы, которые применялись в работах [5–7] и др., с соответствующей модификацией, позволяющей учитывать более тонкую градацию функций из классов $B^r_{p,\theta}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp \begin{cases} M^{-1/2}(\log^\nu M)^{1/\theta'}, & r_1 = 1/p, \\ (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/2}(\log^{\nu-1} M)^{1/2 - 1/\theta}, & r_1 > 1/p, \end{cases}$$

где $\theta^{-1} + (\theta')^{-1} = 1$.

Доказательство. Сначала получим оценки сверху.

Для этого нам понадобится следующее утверждение (см., например, [7]).

Лемма А. *Пусть* $2 < q < \infty$. *Тогда для всякого тригонометрического полинома* $P(\Omega_N, x)$, *содержащего не более* N *гармоник, и для любого* $M < N$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_M, x)$, *у которого не более* M *коэффициентов отлично от нуля и*

$$\| P(\Omega_N, x) - P(\Omega_M, x) \|_q \le \sqrt{NM^{-1}} \| P(\Omega_N, x) \|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$.

Пусть $f(x)$ — некоторая функция из класса $B^r_{p,\theta}$; M — заданное число и n — число, удовлетворяющее соотношению $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$.

Построим для $f(x)$ приближающий полином, доставляющий требуемую оценку.

Положим

$$P(\Omega_M, x) = \sum_{(s,\gamma') < n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} P(\Omega_{N_s}, x),$$

где $P(\Omega_{N_s}, x)$ — полиномы, которые будем строить для каждого блока $\delta_s(f, x)$ в соответствии с леммой А, и $\alpha > 1$ — число, которое будем подбирать в каждом конкретном случае соответствующим образом.

В силу теоремы Литтлвуда – Пэли (см., например, [2, с. 63])

$$\|f(x)-P(\Omega_M,x)\|_q << \left\| \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \left|\delta_s(f,x)-P(\Omega_{N_s},x)\right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q +$$

$$+\left\| \sum_{(s,\gamma')\ge\alpha n} \delta_s(f,x) \right\|_q = \Sigma_1+\Sigma_2. \qquad (3)$$

Согласно теореме 2 из [1] для второй суммы будем иметь

$$\Sigma_2 << 2^{-n\alpha(r_1-1/p+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+}, \qquad (4)$$

где $a_+=\max\{a,0\}$.

Чтобы оценить Σ_1, воспользуемся последовательно неравенством Минковского, леммой А и неравенством Никольского (см., например, [5, с. 16]). В результате получим

$$\Sigma_1 \le \left(\left\| \sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \left|\delta_s(f,x)-P(\Omega_{N_s},x)\right|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} <<$$

$$<< \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \left\| \left|\delta_s(f,x)-P(\Omega_{N_s},x)\right|^2 \right\|_{q/2} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \left\|\delta_s(f,x)-P(\Omega_{N_s},x)\right\|_q^2 \right)^{1/2} << \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_2^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \frac{2^{\|s\|_1} 2^{\|s\|_1(1/p-1/2)}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \frac{2^{2\|s\|_1/p}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \right)^{1/2}, \qquad (5)$$

где $\|s\|_1 = s_1+s_2+\ldots+s_m$.

Теперь, подставляя оценки (4), (5) в (3), приходим к соотношению

$$\|f(x)-P(\Omega_M,x)\|_q << \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} \frac{2^{\|s\|_1}}{N_s} \|\delta_s(f,x)\|_p^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ 2^{-n\alpha(r_1-1/p+1/q)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)_+} = \mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2. \qquad (6)$$

Дальнейшую оценку будем получать для каждого конкретного случая.

Пусть $r_1 = 1/p$. Оценим сначала $\mathfrak{I}_1$. Для этого положим

$$\alpha = q/2\left(1+(\nu-1)n^{-1}\log n\right)_{q_1,q_2}. \qquad (7)$$

и каждому вектору s, для которого $n\le(s,\gamma')<\alpha n$, поставим в соответствие число

$$N_s = \left[2^n n^{\nu/\theta-1} \|\delta_s(f,x)\|_p 2^{r_1\|s\|_1} \right]+1,$$

и покажем, что $\sum\limits_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} N_s << 2^n n^{\nu-1}$.

Действительно,

$$\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} N_s << n^m + 2^n n^{\nu/\theta-1} \sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{r_1\|s\|_1} \left\|\delta_s(f,x)\right\|_p =$$

$$= n^m + 2^n n^{\nu/\theta-1} \sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{(s,r)} \left\|\delta_s(f,x)\right\|_p 2^{-(s,r)} 2^{r_1\|s\|_1}.$$

Далее, применив неравенство Гельдера с показателем θ, продолжим оценку

$$\le n^m + 2^n n^{\nu/\theta-1}\left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{(s,r)\theta} \left\|\delta_s(f,x)\right\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \times$$

$$\times\left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{r_1\|s\|_1\theta'} 2^{-(s,r)\theta'}\right)^{1/\theta'} << n^m + 2^n n^{\nu/\theta-1}\|f\|_{B^r_{p,\theta}} \times$$

$$\times\left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{r_1(s,\gamma')\theta'} 2^{-r_1(s,\gamma)\theta'}\right)^{1/\theta'} <<$$

$$<< 2^n n^{\nu/\theta-1}\left(\sum_{l=n}^{\alpha n} 2^{r_1 l\theta'} \sum_{n\le(s,\gamma')<l+1} 2^{-r_1(s,\gamma)\theta'}\right)^{1/\theta'} = I_1.$$

Для оценки внутренней суммы воспользуемся соотношением из [5, с.11]

$$\sum_{(s,\gamma')\ge n} 2^{-\alpha(s,\gamma)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{\nu-1}, \ \alpha>0, \tag{8}$$

в силу которого будем иметь

$$I_1 << 2^n n^{\nu/\theta-1}\left(\sum_{l=n}^{\alpha n} 2^{r_1 l\theta'} 2^{-r_1 l\theta'} l^{\nu-1}\right)^{1/\theta'} << 2^n n^{\nu/\theta-1} n^{\nu/\theta'} = 2^n n^{\nu-1}.$$

Таким образом, получаем требуемую оценку для количества гармоник.

Далее, подставляя в $\mathcal{J}_1$ значение N_s и проводя аналогичные рассуждения, приходим к оценке

$$\mathcal{J}_1 \le 2^{-n/2} n^{-(\nu/\theta-1)/2}\left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{r_1\|s\|_1} \left\|\delta_s(f,x)\right\|_p\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2^{-n/2} n^{-(\nu/\theta-1)/2} n^{\nu/2\theta'} = 2^{-n/2} n^{-\nu/\theta} n^{(\nu+1)/2}. \tag{9}$$

Для оценки слагаемого $\mathcal{J}_2$ вместо α подставим его значение из (7) и, принимая во внимание равенство $r_1 = 1/p$, получаем при $\theta\ge q$

$$\mathcal{J}_2 = 2^{-\frac{n}{q}\frac{q}{2}\left(1+\frac{\nu-1}{n}\log n\right)} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)} =$$

$$= 2^{-n/2} n^{-(\nu-1)/2} n^{(\nu-1)(1/q-1/\theta)} = 2^{-n/2} n^{-\nu/\theta} n^{1/\theta} n^{(\nu-1)(1/q-1/2)},$$

что, очевидно, не превышает правой части (9).

Если же $\theta<q$, то

$$\vartheta_2 = 2^{-\frac{n}{q}\frac{q}{2}\left(1+\frac{\nu-1}{n}\log n\right)} = 2^{-n/2} n^{-\nu} n^{(\nu+1)/2} \le \vartheta_1.$$

Таким образом, в обоих случаях $\vartheta_2 \le \vartheta_1$, отсюда с учетом (6) и (9) получаем искомую оценку.

Пусть $r_1 > 1/p$. Рассмотрим два случая: а) $\theta \ge 2$; б) $1 \le \theta < 2$.

В случае а) будем полагать

$$\alpha = \frac{r_1 - 1/p + 1/2}{r_1 - 1/p + 1/q},$$

$$N_s = \left[2^{n\left(r_1 - 1/p + 1\right)} 2^{-(s,\gamma)\left(r_1 - 1/p\right)}\right] + 1. \tag{10}$$

Тогда в силу соотношения (8) получаем

$$\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} N_s \ll n^m + 2^{n\left(r_1 - 1/p + 1\right)} \sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{-(s,\gamma)\left(r_1 - 1/p\right)} \ll$$

$$\ll 2^{n\left(r_1 - 1/p + 1\right)} 2^{-n\left(r_1 - 1/p\right)} n^{\nu-1} = 2^n n^{\nu-1},$$

и, таким образом, для ϑ_1 выполняется оценка

$$\vartheta_1 \le 2^{-n\left(r_1 - 1/p + 1\right)/2} \left(\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{2(s,\gamma)/p} 2^{(s,\gamma)\left(r_1 - 1/p\right)} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^2 \right)^{1/2} =$$

$$= 2^{-n\left(r_1 - 1/p + 1\right)/2} \left(\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{2(s,r)} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^2 2^{-(s,\gamma)\left(r_1 - 1/p\right)} \right)^{1/2}.$$

Далее, применив неравенство Гельдера с показателем $\theta/2$ и воспользовавшись соотношением (8), продолжим оценку

$$\le 2^{-n\left(r_1 - 1/p + 1\right)/2} \left(\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{n \le (s,\gamma') < \alpha n} 2^{-(s,\gamma)(r_1 - 1/p)\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2 - 1/\theta} \ll 2^{-n\left(r_1 - 1/p + 1\right)/2} \| f \|_{B^r_{p,\theta}} 2^{-n\left(r_1 - 1/p\right)/2} \times$$

$$\times n^{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)} \asymp 2^{-n\left(r_1 - 1/p + 1/2\right)} n^{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)}. \tag{11}$$

Чтобы оценить слагаемое ϑ_2, подставим вместо α его значение из (10) и с учетом неравенства $q > 2$ получим

$$\vartheta_2 \le \vartheta_1. \tag{12}$$

Таким образом, сопоставив (6), (11) и (12), приходим к искомой оценке в случае $\theta \ge 2$.

Пусть теперь $1 \le \theta < 2$. Полагаем

$$\alpha = \frac{r_1 - 1/p + 1/2}{r_1 - 1/p + 1/q} - \frac{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)\log n}{(r_1 - 1/p + 1/q)n},$$

$$N_s = \left[2^{n\left(r_1 - 1/p + 1\right)} n^{(\nu-1)} 2^{-(s,\gamma)\left(r_1 - 1/p\right)} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^\theta\right] + 1. \tag{13}$$

Тогда

$$\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} N_s << n^m + 2^{n(r_1 - 1/p + 1)} n^{(\nu-1)} 2^{-n(r_1 - 1/p)} \sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^{\theta} <<$$

$$<< n^m + 2^n n^{\nu-1} \| f \|_{B^r_{p,\theta}}^{\theta} << 2^n n^{\nu-1}$$

и, таким образом, для ϑ_1 будем иметь оценку

$$\vartheta_1 \le 2^{-n(r_1 - 1/p + 1)/2} n^{-(\nu-1)/2} \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{(s,\gamma)(r_1 + 1/p)} 2^{-(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^{2-\theta} \right)^{1/2} =$$

$$= 2^{-n(r_1 - 1/p + 1)/2} n^{-(\nu-1)/2} \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{(s,\gamma)(1/p - r_1)} 2^{(s,r)(2-\theta)} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^{2-\theta} \right)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателем $\theta / (2-\theta)$, продолжим оценку далее:

$$\le 2^{-n(r_1 - 1/p + 1)/2} n^{-(\nu-1)/2} \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta - 1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{n\le(s,\gamma')<\alpha n} 2^{-(s,\gamma)(r_1 - 1/p)\theta/(2\theta-2)} \right)^{1 - 1/\theta} << 2^{-n(r_1 - 1/p + 1/2)} n^{(\nu-1)(1/2 - 1/\theta)}.$$

При значении α из (11) убеждаемся, что $\vartheta_2 \le \vartheta_1$, и следовательно, в этом случае оценка установлена.

При доказательстве оценок снизу будем пользоваться двойственным соотношением, которое вытекает из более общего результата С.М. Никольского (см., например, [10, с. 25]). Речь идет о следующем соотношении

$$e_M(f, L_q) = \inf_{\Omega_M} \sup_{\substack{P \in L^{\perp}(\Omega_M) \\ \|P\|_{q'} \le 1}} \left| \int_{\pi_m} f(x) P(x) dx \right|, \tag{14}$$

где $L^{\perp}(\Omega_M)$ — множество функций, ортогональных пространству тригонометрических полиномов с гармониками из множества Ω_M.

Предварительно покажем, что оценку снизу достаточно получить для случая $\nu = m$. Действительно, пусть $B^{r^\nu}_{p,\theta}$ обозначает класс Бесова функций ν переменных, где $r^\nu = (r_1, \ldots, r_1)$, $r^\nu \in R^\nu$, $r_1 > 0$; S_ν — множество m-мерных векторов s вида $(s_1, \ldots, s_\nu, 1, \ldots, 1)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1,\nu}$, и $N^\nu = \{s\colon s = (s_1, \ldots, s_\nu),$ $s_j \in N, j = \overline{1,\nu}\}$. Рассмотрим множество функций

$$G = \left\{ g(x_1, \ldots, x_\nu) \prod_{j=\nu+1}^{m} e^{ix_j},\ g \in B^{r^\nu}_{p,\theta} \right\}.$$

Тогда для $f \in G$ будем иметь

$$\| f \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} = \left(\sum_{s\in S_\nu} 2^{(s,r)\theta} \left\| \delta_s(f,x) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} =$$

$$= 2^{\sum_{j=\nu+1}^{m} r_j} \left(\sum_{s \in N^{\nu}} 2^{(s,r^{\nu})\theta} \| \delta_s(g,x) \|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} << 1.$$

Следовательно, справедливо вложение $C_1 G \in B_{p,\theta}^r$, $C_1 > 0$, и, таким образом,

$$e_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) >> e_M\left(G, L_q\right). \tag{15}$$

Далее, поскольку

$$e_M\left(G, L_q\right) >> e_M\left(B_{p,\theta}^{r^{\nu}}, L_q\right), \tag{16}$$

то, сопоставив (15) и (16), приходим к соотношению

$$e_M\left(B_{p,\theta}^r, L_q\right) >> e_M\left(B_{p,\theta}^{r^{\nu}}, L_q\right),$$

откуда вытекает, что для получения оценки снизу достаточно рассмотреть случай $\nu = m$.

Теперь перейдем непосредственно к установлению оценок снизу.

Пусть $r_1 = 1/p$. По заданному натуральному числу M подберем число l из соотношения $l = q(\log M) / 2 - (m-1)(q-1)\log\log M$ и рассмотрим функцию

$$g_1(x) = \sum_{(s,1) \le l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \tfrac{1}{k_j} \cos k_j x_j,$$

где $\rho^+(s_j) = \{k_j : 2^{s_j - 1} \le k_j < 2^{s_j}\}$. Оценим $\| g_1 \|_{B_{p,\theta}^r}$. С этой целью воспользуемся оценкой [11]

$$\left\| \mathcal{D}_{N_1+N_2}^{(\beta)} - \mathcal{D}_{N_1}^{(\beta)} \right\|_p \asymp N_1^{\beta} N_2^{1-1/p}, \ \beta \in R, \ 1 < p < \infty, \ N_1 \ge N_2, \tag{17}$$

где $\mathcal{D}_N = \sum_{k=1}^{N} \cos kt$ — одномерное ядро Дирихле. Полагая в (17) $\beta = -1$, $N_1 = 2^{s_j} - 1$, $N_2 = 2^{s_j - 1}$, будем иметь

$$\left\| \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \tfrac{1}{k_j} \cos k_j x_j \right\|_p \asymp 2^{-s_j/p} \tag{18}$$

и, таким образом, для

$$\delta_s^+(g_1, x) = \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \tfrac{1}{k_j} \cos k_j x_j$$

в силу (18) получаем

$$\left\| \delta_s^+(g_1, x) \right\|_p \asymp 2^{-(s,1)/p}.$$

Поэтому

$$\| g_1 \|_{B_{p,\theta}^r} \asymp \left(\sum_{(s,1) \le l} 2^{(s,1)\theta/p} \left\| \delta_s^+(g_1, x) \right\|_p^{\theta} \right)^{1/\theta} \asymp \left(\sum_{(s,1) \le l} 1 \right)^{1/\theta} \asymp \left(\sum_{n=1}^{l} n^{m-1} \right)^{1/\theta} << l^{m/\theta},$$

и, следовательно, функция

$$f_1(x) = C_2 l^{-m/\theta} g_1(x) \tag{19}$$

с некоторой постоянной $C_2 > 0$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$.

Теперь построим функцию $P(x)$, которая удовлетворяла бы условиям соотношения (14). Пусть

$$v(x) = \sum_{(s,1)\le l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j \tag{20}$$

и Ω_M — некоторый набор из M векторов $k = (k_1, \dots, k_m), k_j \in N, j = \overline{1,m}$.

Обозначим через

$$u(x) = \sum_{k \in \Omega_M}^{*} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j$$

функцию, содержащую только те слагаемые из (20), которые имеют "номера" из множества Ω_M, и положим $F(x) = v(x) - u(x)$.

Оценим $\| F \|_{q'}$, учитывая, что $1 < q' < 2$ $(q' = q / (q-1))$.

Отправляясь от соотношения (17), нетрудно установить, что

$$\| F \|_{q'} \le \| v \|_{q'} + \| u \|_{q'} << 2^{l/q} l^{(m-1)/q'} + \| u \|_2 << 2^{l/q} l^{(m-1)/q'} + \sqrt{M},$$

откуда следует, что функция

$$P_1(x) = C_3 \left(2^{l/q} l^{(m-1)/q'} + \sqrt{M} \right)^{-1} F(x) \tag{21}$$

с некоторой постоянной $C_3 > 0$ удовлетворяет требованиям соотношения (14).

Из соотношений (19), (21) и (14) получаем оценку

$$e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) >> \frac{\sum_{l_1 < (s,1) \le l} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1}}{l^{m/\theta}\left(2^{l/q} l^{(m-1)/q'} + \sqrt{M}\right)}, \tag{22}$$

где l_1 — число, удовлетворяющее условию $2^{l_1} l_1^{m-1} \asymp M$. Чтобы продолжить оценку (22), заметим, что

$$\sum_{l_1 < (s,1) \le l} \sum_{k \in \rho^+(s)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \asymp \sum_{l_1 < (s,1) \le l} 1 = \sum_{i=l_1}^{l} \sum_{(s,1)=i+1} 1 \asymp \sum_{i=l_1}^{l} i^{m-1} >> l^m, \tag{23}$$

и в силу выбора числа l

$$2^{l/q} l^{(m-1)/q'} + \sqrt{M} << 2^{l/q} l^{(m-1)/q'}. \tag{24}$$

Таким образом, учитывая (22) – (24), приходим к искомой оценке

$$e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) >> \frac{(\log^m M)^{1/\theta'}}{M^{1/2}}.$$

Пусть $r_1 > 1/p$. Заметим, что в этом случае оценку достаточно получить при $q = 2$. По заданному M подберем l таким образом, чтобы для количества элементов множества

$$F_l = \bigcup_{(s,1)\le l} \rho(s)$$

выполнялись соотношения: 1) $|F_l| \ge 2M$; 2) $|F_l| \asymp 2^l l^{m-1}$ и рассмотрим ступенчато-гиперболическое ядро Дирихле

$$D_l(x) = 2^{-m} \sum_{(s,1)\le l} \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}.$$

Принимая во внимание, что

$$\|\delta_s(D_l,x)\|_p = \left\| \sum_{k\in\rho(s)} e^{i(k,x)} \right\|_p \asymp 2^{(s,1)(1-1/p)},$$

будем иметь

$$\|D_l(x)\|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{(s,1)\le l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(D_l,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(s,1)\le l} 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)(1-1/p)\theta} \right)^{1/\theta} << 2^{l(r_1+1-1/p)} l^{(m-1)/\theta}.$$

Отсюда заключаем, что функция

$$f_2(x) = C_4 2^{-l(r_1+1-1/p)} l^{-(m-1)/\theta} D_l(x),\ C_4 > 0,$$

принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$.

Далее, выбрав функцию $P(x)$ в виде (21) и учитывая, что $q = 2$, получаем

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_2) >> \frac{2^l l^{m-1} - M}{2^{l(r_1+1-1/p)} l^{(m-1)/\theta} \left(2^{l/2} l^{(m-1)/2} + \sqrt{M} \right)} >>$$

$$>> \frac{l^{(m-1)(1/2-1/\theta)}}{2^{l(r_1+1/2-1/p)}} \asymp \left(M^{-1} \log^{m-1} M \right)^{r_1+1/2-1/p} \left(\log^{m-1} M \right)^{1/2-1/\theta}$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $2 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда при* $r_1 > 1/2$

$$e_M(B^r_{p,\theta}, L_q) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}$$

Доказательство. Сначала заметим, что оценка сверху следует из соответствующей оценки, полученной в теореме 1 при $p = 2$, поскольку $B^r_{p,\theta} \subset B^r_{2,\theta}$ при $p \ge 2$. Поэтому перейдем к установлению оценки снизу. При этом будем пользоваться таким результатом Рудина – Шапиро (см., например, [12, с.155]): для каждого $k \in N$ найдется полином

$$R_k(x) = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_j e^{ijx},\ \varepsilon_j = \pm 1,$$

такой, что $\| R_k(x) \|_\infty << 2^{k/2}$.

Выберем число l из соображений, аналогичных использованным в предыдущей теореме при $r_1 > 1/p$, и рассмотрим функцию

$$g_2(x) = \sum_{(s,1)\le l} \prod_{j=1}^m R_{s_j}(x_j).$$

Тогда, учитывая (25), будем иметь

$$\| g_2 \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{(s,1)\le l} 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(g_2,x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} <<$$

$$<< \left(\sum_{(s,1)\le l} 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)\theta/2} \right)^{1/\theta} \asymp 2^{l(r_1+1/2)} \left(\sum_{(s,1)=l} 1 \right)^{1/\theta} \asymp 2^{l(r_1+1/2)} l^{(m-1)/\theta}.$$

Следовательно, функция

$$f_3(x) = C_5 2^{-l(r_1+1/2)} l^{-(m-1)/\theta} g_2(x), \; C_5 > 0,$$

принадлежит классу $B^r_{p,\theta}$. Пусть, далее,

$$v_1(x) = \sum_{(s,1)\le l} \prod_{j=1}^{m} R_{s_j}(x_j)$$

и

$$u_1(x) = \sum_{(s,1)\le l}^{*} \prod_{j=1}^{m} R_{s_j}(x_j)$$

обозначает функцию, содержащую только те слагаемые $v_1(x)$, которые имеют "номера" из множества Ω_M. Положим $F_1(x) = v_1(x) - u_1(x)$ и оценим $\| F_1 \|_{q'}$.

Принимая во внимание, что $1 < q' < 2$, будем иметь

$$\| F \|_{q'} \le \| v_1 \|_2 + \| u_1 \|_2 << 2^{l/2} l^{(m-1)/2} + \sqrt{M} << 2^{l/2} l^{(m-1)/2}$$

и, таким образом, функция

$$P_2(x) = C_6 2^{-l/2} l^{-(m-1)/2} F_1(x), \; C_6 > 0,$$

удовлетворяет требованиям правой части (14). Следовательно,

$$e_M\left(B^r_{p,\theta}, L_q\right) >> \frac{2^l l^{m-1} - M}{2^{l(r_1+1/2)} l^{(m-1)/\theta} 2^{l/2} l^{(m-1)/2}} >> \frac{2^l l^{m-1}}{2^{l(r_1+1)} l^{(m-1)(1/\theta - 1/2)}} =$$

$$= \frac{l^{(m-1)(1/2 - 1/\theta)}}{2^{lr_1}} \asymp \frac{\left(\log^{m-1} M\right)^{r_1+1/2-1/8}}{M^{r_1}},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q,\infty} << \begin{cases} M^{-1/2} (\log^{\nu} M)^{1/\theta'}, & r_1 = 1/p, \\ (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2 - 1/\theta}, & r_1 > 1/p. \end{cases}$$

Доказательство. Оценки в обоих случаях получаются как следствие теоремы 1.

Деиствительно, пусть $r_1 = 1/p$. Тогда в силу теоремы 1 $\forall f \in B^r_{p,\theta}$ найдется множество m-мерных векторов $(k^1, \ldots, k^M)$ и чисел $c_1, \ldots, c_M$ таких, что

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_q << M^{-1/2} (\log^{\nu} M)^{1/\theta'}. \tag{26}$$

С другой стороны,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)} \right\|_q = \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x-y)} \right\|_{q,\infty} =$$

$$= \left\| f(x-y) - \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)} e^{-i(k^j, y)} \right\|_{q,\infty}. \tag{27}$$

Полагая в последней сумме

$$u_j(x) = c_j e^{i(k^j, x)}, \; v_j(y) = c_j e^{-i(k^j, y)}$$

и сопоставляя (26) и (27), получаем искомую оценку.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < 2$, $r_1 > 1/p - 1/2$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{2,1} >> \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/\theta'}}{M^{r_1 - 1/p + 1/2}}.$$

Доказательство. Как отмечалось, искомую оценку достаточно получить для $\nu = m$.

Пусть задано натуральное число M, а число n таково, что для количества элементов множества

$$F_n = \bigcup_{\|s\|_1 = n} \rho(s) \tag{28}$$

выполнены соотношения:

$$1)\ |F_n| > 4M; \qquad 2)\ |F_n| \asymp 2^n n^{m-1}. \tag{29}$$

Рассмотрим функцию

$$f_4(x) = 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} \sum_{k \in F_n} e^{i(k,x)} = 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} d(x). \tag{30}$$

Поскольку

$$\| f_4 \|_{B^r_{p,\theta}} = \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(f_4, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} = 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{(s,r)\theta} \| \delta_s(d, x) \|_p^\theta \right)^{1/\theta} \asymp 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,1)=n} 2^{r_1 (s,1)\theta} 2^{(s,1)(1 - 1/p)\theta} \right)^{1/\theta} << 1,$$

то $f_4 \in C_7 B^r_{p,\theta}$, $C_7 > 0$. Далее, для оценки $\tau_M(f_4)_{2,1}$ воспользуемся вспомогательным утверждением [5, с.93].

Лемма Б. *Пусть множество* F_n *удовлетворяет условиям* (28) *и* (29). *Тогда для любой функции*

$$w(x) = \sum_{k \in F_n} c_k e^{i(k,x)}, \ |c_k| = 1,$$

справедливо

$$\inf_{u_i(x), v_i(y)} \left\| w(x-y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x) v_i(y) \right\|_{2,1} >> M^{1/2}.$$

Таким образом, поскольку функция $d(x)$ удовлетворяет условиям леммы Б, то $\tau_M(d)_{2,1} >> M^{1/2}$, и следовательно,

$$\tau_M(f_4)_{2,1} = 2^{-n(r_1 + 1 - 1/p)} n^{-(m-1)/\theta} \tau_M(d)_{2,1} >> \frac{(\log^{m-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/\theta'}}{M^{r_1 + 1/2 - 1/p}}.$$

Теорема доказана.

Как следствие из теорем 3 и 4 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < 2$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $r_1 > 1/p$. *Тогда при* $2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \infty$

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2} \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/\theta'}}{M^{r_1 - 1/p + 1/2}}.$$

В заключение приведем две теоремы и следствие из них, которые являются аналогами теорем 3, 4 и следствия 1 при других соотношениях между параметрами p и q.

Теорема 5. *Пусть* $2 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q,\infty} << \begin{cases} M^{-1/2}(\log^{\nu} M)^{1/\theta'}, & r_1 = 1/2, \\ (M^{-1}\log^{\nu-1} M)^{r_1}(\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta}, & r_1 > 1/2. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть* $2 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тогда*

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{2,1} >> M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}.$$

Следствие 2. *Пусть* $1 \le \theta \le \infty$ *и* $r_1 > 1/2$. *Тогда при* $2 \le q_1 < \infty$, $1 \le q_2 \le \le \infty$, $2 \le p \le q_1$

$$\tau_M(B^r_{p,\theta})_{q_1,q_2} \asymp \frac{(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}}{M^{r_1}}.$$

Отметим, что схема доказательств теорем 5 и 6 аналогична примененной в теоремах 3, 4. Только при доказательстве теоремы 6 нужно вместо функции $f_4(x)$ из (30) рассмотреть функцию

$$f_5(x) = 2^{-n(r_1+1/2)} n^{-(m-1)/\theta} \sum_{(s,1)=n} \prod_{j=1}^{m} R_{s_j}(x_j),$$

где n подобрано так, чтобы выполнялись соотношения (28) и (29).

Некоторые из изложенных в работе результатов анонсированы в [13].

1. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн.– 1991.– **43**, №10.– С. 1398–1408.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.– М.: Наука, 1989.– 480 с.
3. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР.– 1955.– **102**, №1.– С. 37–40.
4. *Кашин Б. С.* об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР.– 1985.– **172**.– С. 187–191.
5. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Там же.– 1986.– **178**.– 112 с.
6. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических гладких функций // Там же.– 1987.– **180**.– С. 46–47.
7. *Белинский Э. С.* Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных.– Ярославль: Ярослав. ун-т, 1988.– С. 16–33.
8. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I // Math. Ann.– 1907.– **63**.–P. 433–476.
9. *Бабаев М.-Б. А.* О порядке приближения соболевского класса W^r_q билинейными формами в L_p при $1 \le q \le p \le 2$ // Мат. сб.– 1991.– **182**, №1.– С. 122–129.
10. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения.– М.: Наука, 1987.– 424 с.
11. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме // Мат. сб.– 1982.– **117**, №1.– С. 32–43.
12. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды.– М.: Наука, 1984.– 495 с.
13. *Романюк А. С.* Приближение классов периодических функций многих переменных $B^r_{p,\theta}$ в пространстве L_q.– Киев, 1990.– 47 с.– (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 90.30).

Получено 17. 01. 92